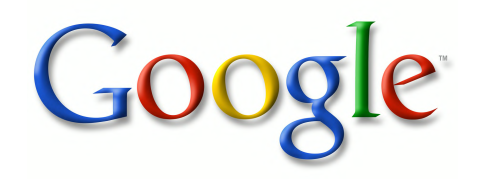
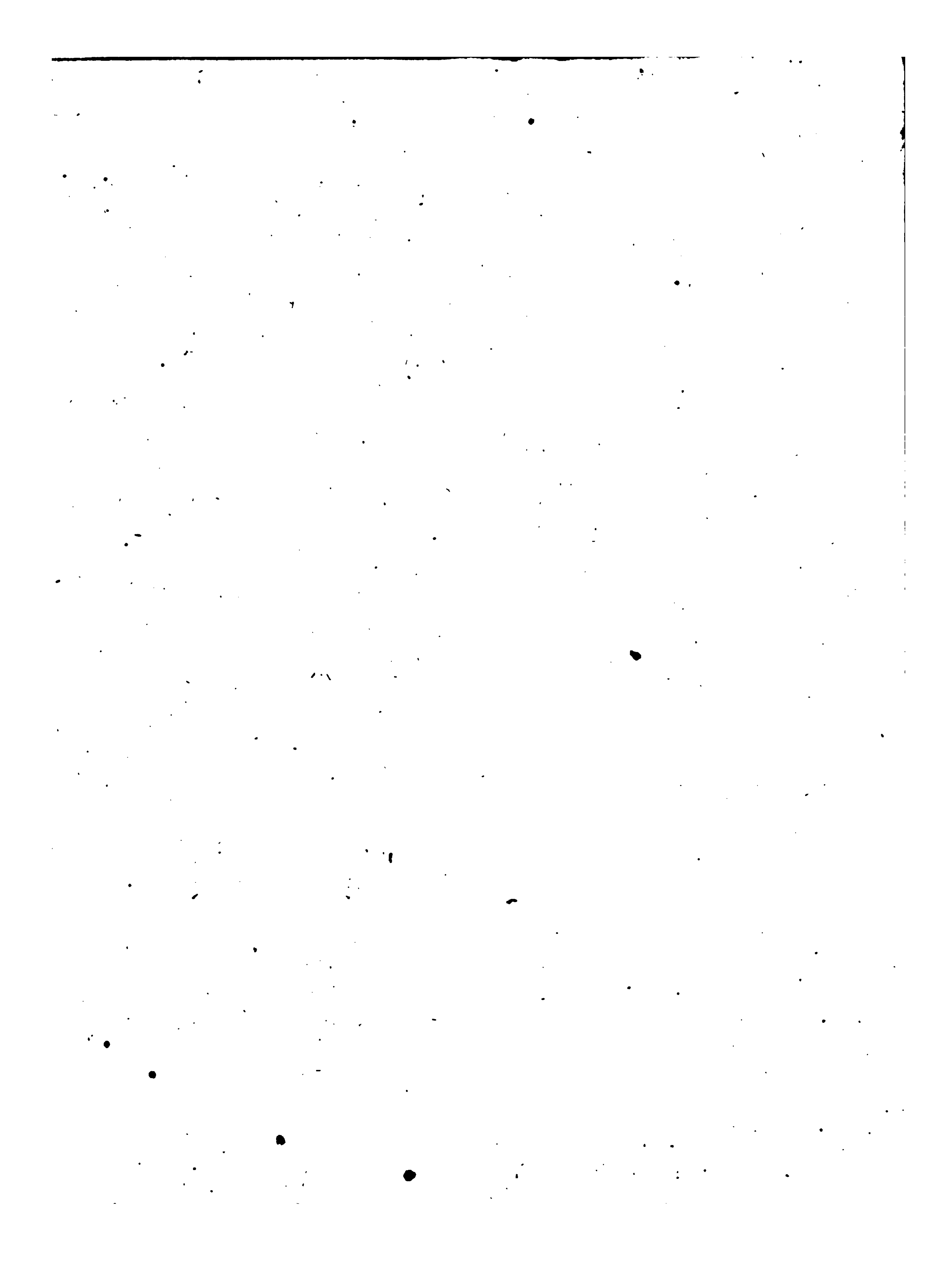










HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

Année M. DCC. IV.

Avec les Memoires de Mathematique & de Physique, pour la même Année.

Tirez des Registres de cette Academie.

Seconde Edition, revûë, corrigée & augmentée.



A PARIS,
Chez CHARLES-ESTIENNE HOCHEREAU, Quay des Augustins, au Phenix.

M. DCC. XXII.

AVEC APPROBATION, ET PRIVILEGE DU ROY.


BIBLIOTHECA · BODLEIANA ·

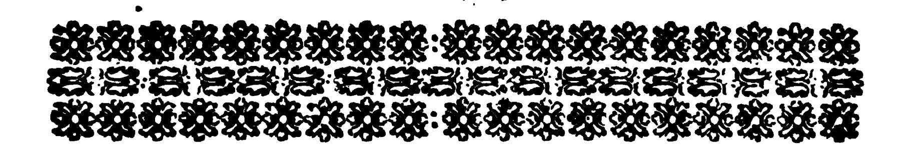


TABLE POUR L'HISTOIRE.

PHYSIQUE GENERALE.

ANATOMIE.

CHIMIE.

BOTANIQUE.

ARITHMETIQUE.

TABLE.

GEOMETRIE.

ASTRONOMIE.

DIOPTRIQUE.

MECHANIQUE.

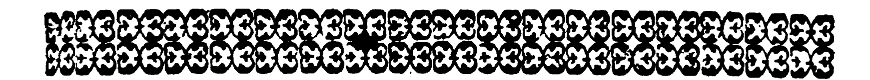


TABLE
POUR
LES MEMOIRES.

TABLE.

AVERTISSEMENT.

ON *a imprimé dans les Memoires de* 1703 *pag.* 312 *un Ecrit de M. Rolle intitulé* Du nouveau Systême de l'Infini. *Les Reflexions que diverses personnes ont faites sur cet Ecrit, sur les principes qui y sont avancés, & sur les consequences qu'on en pourroit tirer, obligent à declarer que quoiqu'il se trouve parmi les autres Ouvrages destinés à l'impression par l'Academie, son intention n'a jamais été d'adopter rien de ce qui s'y peut trouver.*

HISTOIRE



HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES.

Année M. DCCIV.

PHYSIQUE GENERALE.

SUR LE BAROMETRE RECTIFIE'.



NOus mesurons aujourd'hui ce qui n'avoit jamais été mesuré, le chaud, le froid, la pesanteur de l'air. Mais cet avantage de notre siecle sur tous ceux qui l'ont precedé seroit imparfait, si les Mesures nouvelles n'étoient portées à toute la justesse & à toute la précision que demande le caractere general de Mesure. V. les M. p. 164. & 271.

M. Amontons, après avoir rectifié le Thermometre, ainsi qu'on a vû dans l'Histoire de 1702*, a passé au * p. 1. & suiv.

Barometre. Le Barometre, uniquement destiné à mesurer la pesanteur de l'air, se ressent des differens degrés de froid ou de chaud, & devenant Thermometre en partie, devient défectueux, & équivoque. S'il est simple, ou à une seule branche, le Mercure tout pesant qu'il est n'est pas exempt de rarefaction dans le chaud, ainsi que M. Homberg l'a remarqué le premier par l'usage de son Aréometre; il s'eleve donc par la chaleur seule, & trompe l'Observateur, parce que l'on conte qu'il ne s'éleve que par l'augmentation de la pesanteur de l'air. Si le Barometre est double ou à deux branches, la même source d'erreur s'y trouve, mais d'une maniere d'autant plus dangereuse que le Barometre double donne les mêmes degrés plus grands que le simple, ce qui fait tout son avantage. De plus les degrés y sont marqués par une liqueur que l'on met dans la boëte inferieure, & dans la seconde branche; & quoique cette liqueur qui est ordinairement ou de l'Eau Seconde, ou de l'Huile de Tartre teinte, ait été choisie exprès parce qu'elle se rarefie peu, elle se rarefie pourtant, & met une nouvelle confusion dans le Barometre.

M. Amontons a trouvé par experience que du plus grand froid au plus grand chaud de nôtre Climat, le Mercure augmente son volume, ou, ce qui est la même chose, diminuë sa pesanteur specifique de $\frac{1}{115}$. On a experimenté d'ailleurs que les deux termes entre lesquels est renfermée la variation de hauteur du Mercure dans le Barometre simple sont 26 pouces 4 lignes, & 28 pouces 4 lignes. Et prenant donc ces 28 pouces 4 lignes pour la plus grande hauteur du Mercure, & supposant que la pesanteur de l'Atmosphere le tienne suspendu à cette hauteur pendant le plus grand froid de nôtre Climat, & que cette pesanteur ne varie point jusqu'au plus grand chaud, le Mercure haussera necessairement de la 115e partie de 28 pouces 4 lignes, c'est-à-dire de 3 lignes environ, sans que la pesanteur de l'Atmosphere soit devenuë plus grande.

Ces 3 lignes sont très-considerables puisqu'elles sont la 8ᵉ partie des 2 pouces que peut parcourir toute la variation du Mercure, mais elles deviennent encore plus considerables dans certaines operations, par exemple, lorsqu'on mesure la hauteur des Montagnes par le Barometre*, car une ligne de Mercure répond alors à plusieurs toises de la hauteur de la Montagne, & l'air peut être en même temps beaucoup plus chaud au pied qu'au sommet, difference qui sera d'autant plus grande que la Montagne sera plus élevée.

* V. l'Hist. de 1703, p. 11.

Voici maintenant d'où viendra l'erreur du Barometre double. On sçait que la colonne de Mercure qui y fait équilibre tant avec le poids de l'Athmosphere, qu'avec le poids de la liqueur contenuë dans une partie de la boëte inferieure & dans la seconde branche, n'a pour sa longueur ou hauteur que la distance des deux surfaces du Mercure renfermé dans les deux boëtes. Quand la surface du Mercure de la boëte inferieure baisse, & que celle du Mercure de la boëte superieure hausse, la colonne de Mercure qui fait tout l'equilibre s'allonge, & cela arrive quand le poids de l'Atmosphere augmente. Alors la liqueur baisse dans son tuyau. C'est tout le contraire quand la surface du Mercure de la boëte superieure baisse, & que celle du Mercure de la boete inferieure hausse; la colonne qui fait l'equilibre s'accourcit, & la liqueur monte dans son tuyau. Si la surface du Mercure de la boëte superieure hausse, & qu'il soit possible que celle du Mercure de la boëte inferieure hausse aussi, & également, la colonne ne s'allonge ni ne s'accourcit. Or si l'on suppose, comme on a fait pour le Barometre simple, que la colonne de Mercure du Barometre double, c'est-à-dire, la distance des deux surfaces de Mercure, ait la longueur de 28 pouces 4 lignes dans le plus grand froid, & qu'ensuite vienne le plus grand chaud de nôtre Climat, sans que la pesanteur de l'Atmosphere change, le Mercure des deux boëtes se rarefiera également, & par consequent sa sur-

face s'élevera également dans toutes les deux, & la colonne qui fait l'équilibre demeurera de la même longueur dont elle étoit. Mais cette colonne de Mercure qui par la rarefaction a augmenté son volume de $\frac{1}{115}$ a aussi diminué son poids d'autant; elle ne peut donc plus faire équilibre à la pesanteur de l'Atmosphere qui n'a point changé, & par consequent l'air qui pese immediatement sur la liqueur la fait baisser, & donne au Barometre une fausse apparence d'une augmentation de pesanteur de l'Atmosphere. Si la liqueur est 14 fois plus legere que le Mercure, comme on le suppose ordinairement, l'air qui agit contre une colonne de Mercure affoiblie de la valeur de 3 lignes, ou, ce qui est la même chose, l'air devenu plus fort de cette même valeur, fera baisser la liqueur de 3 fois 14 lignes, ou de 3 pouces $\frac{1}{2}$, ce qui est une très-grande variation, à laquelle cependant le poids de l'Atmosphere n'a aucune part. La liqueur ne peut baisser, que la surface du Mercure de la boëte inferieure ne baisse aussi, & que celle du Mercure de la boëte superieure ne hausse, ce qui allonge la colonne de Mercure, & la remet en équilibre avec l'Atmosphere.

Le calcul des 3 pouces $\frac{1}{2}$ dont la liqueur baisse, n'est juste qu'en ne considerant point sa rarefaction. Mais réellement elle se rarefie, & plus considerablement que le Mercure. Comme dans la supposition presente, la pesanteur de l'Atmosphere n'a point changé, mais seulement celle de la colonne de Mercure, la liqueur qui trouve du côté de l'air plus de resistance à l'extension que demande sa rarefaction, qu'elle n'en trouve du côté du Mercure, ne s'étend que de ce côté plus foible, & par consequent elle ne prend cette nouvelle extension que dans la boëte inferieure, & non dans son tuyau. Or elle occupe par là une partie de l'espace qu'abandonne le Mercure qui sort de la boëte inferieure, & par consequent baisse d'autant moins dans son tuyau; de sorte que si elle occupoit par sa rarefaction tout l'espace abandonné

par le Mercure, elle ne bailleroit nullement dans le tuyau, mais il est constant qu'elle ne se rarefie pas assés pour cela, & elle baisse dans le tuyau, sans que la pesanteur de l'Atmosphere soit augmentée.

Il est donc sûr que l'un & l'autre Barometre avoient besoin de correction, & comme tout le mal venoit de la variation du chaud & du froid, en vain eût-on travaillé à y chercher un remede, si l'on n'avoit eu un Thermometre exact & fixe, tel que celui de M. Amontons. Aussi un des premiers fruits de ce Thermometre est la rectification du Barometre.

Le Barometre simple est d'une telle simplicité dans sa construction, qu'il est impossible d'y rien changer, & tout ce qu'a pû faire M. Amontons, a été de dresser une Table qui marquât de combien la colonne de Mercure varioit pour tous les degrés de chaleur indépendamment de la pesanteur de l'Atmosphere.

Il suppose une colonne de Mercure de 28 pouces 9 lignes dans le plus grand froid de nôtre Climat. Il est vrai que réellement cette colonne ne passe point 28 pouces 4 lignes, mais parce que la rarefaction du Mercure dans le plus grand chaud est de $\frac{1}{115}$, & que 3 lignes sont précisément $\frac{1}{115}$ de 28 pouces 9 lignes, cette supposition est plus commode pour le calcul, & elle ne produit nulle erreur sensible. Le Thermometre de M. Amontons est dans le plus grand froid à 50 degrés, & dans le plus grand chaud à 58, & ces degrés étant des pouces, ce sont 8 pouces ou 96 lignes que le Thermometre parcourra, tandis que le Barometre simple parcourra 3 lignes par la seule action de la chaleur. 3 étant 32 fois dans 96, le Barometre haussera de $\frac{1}{32}$ de ligne, pour chaque ligne dont haussera le Thermometre; & par consequent le Barometre étant supposé construit dans le grand froid, & sa colonne de Mercure longue alors de 28 pouces 9 lignes, il faut pour chaque ligne dont le Thermometre s'élevera au-dessus du 50e degré, retrancher de la hauteur du Barometre $\frac{1}{32}$ de ligne, &

l'on aura la veritable hauteur où se tient la pesanteur de l'Atmosphere, indépendamment de la variation de chaud & du froid.

Quant au Barometre double, M. Amontons change sa construction en partie. Nous avons déja suffisamment insinué, que du plus grand froid au plus grand chaud il ne varieroit point, la pesanteur de l'Atmosphere demeurant la même, si la liqueur se rarefioit assés pour occuper dans la boëte inferieure tout l'espace que le Mercure a quitté. C'est cette reflexion qui a donné à M. Amontons tout le secret de la correction de ce Barometre. Il faut que la colonne de Mercure affoiblie par la chaleur, s'allonge de 3 lignes pour se remettre en équilibre avec l'Atmosphere. Elle ne peut s'allonger de cette quantité que la surface du Mercure de la boëte inferieure ne baisse d'une ligne $\frac{1}{2}$, ce qui fera hausser d'autant la surface du Mercure de la boëte superieure, & augmentera de 3 lignes leur distance. Il faut donc qu'il sorte de la boëte inferieure 1 ligne $\frac{1}{2}$ de Mercure, & afin que la liqueur ne baisse point dans son tuyau, il faut qu'elle se rarefie dans la boëte précisément de cette quantité.

Cela ne dépend plus que de la nature de la liqueur, & de la capacité de la boëte. M. Amontons prend de l'Esprit-de-vin, dont il a trouvé par experience que la rarefaction du grand froid au grand chaud, étoit de $\frac{1}{27}$. Par consequent afin que l'Esprit-de-vin prenne la place de 1 ligne $\frac{1}{2}$ de Mercure, il faut que la quantité de l'Esprit-de-vin contienne 27 fois cette ligne & demie, c'est-à-dire 27 fois un cilindre de 1 ligne $\frac{1}{2}$ de hauteur, qui auroit pour diametre celui de la boëte. Cette quantité d'Esprit-de-vin étant determinée, M. Amontons est obligé de changer la figure de la boëte qui contient le Mercure & la liqueur. Il la laisse telle qu'elle étoit dans sa partie qui contient le Mercure, & comme on ne peut pas augmenter la hauteur du tout, il augmente beaucoup la largeur de la partie qui contiendra

l'Esprit-de-vin, afin qu'elle en contienne toute la quantité necessaire. On peut remarquer ici que M. Amontons pour reparer les desordres que causoit la rarefaction dans le Barometre double, employe une liqueur qui se rarefie beaucoup plus que celle qu'on y employoit auparavant.

Le Barometre ainsi construit, si l'on a eu soin en le remplissant de bien purger d'air tout le haut de la boëte superieure au-dessus du Mercure, il est clair que la pesanteur de l'Atmosphere demeurant la même, il ne variera point quelque variation qui arrive à la chaleur, & d'ailleurs que le grand froid, pendant lequel on le suppose construit, demeurant le même, il variera exactement selon toutes les variations qui arriveront à la pesanteur de l'Atmosphere. Jusque-là, il est dans toute la perfection possible; mais si la chaleur & le poids de l'Atmosphere varient en même temps, ce qui arrive le plus communément, comment se reglera-t-on?

La liqueur du Barometre élevée le plus qu'elle le puisse être & par le peu de pesanteur de l'Atmosphere, & par l'action de la chaleur ne peut guere passer 28 pouces. Si cette liqueur est de l'Esprit de-vin, il y aura, dans la supposition presente, un pouce à retrancher de cette hauteur, pour n'avoir que celle où l'Esprit-de-vin est élevée par le peu de pesanteur de l'Atmosphere, car ce pouce est precisément la 27e partie que la rarefaction a ajoûtée à l'élevation causée par l'Atmosphere. Ce retranchement d'un pouce n'étant que pour le temps de la plus grande chaleur, où le Thermometre de M. Amontons est à 58, il se fera toûjours un retranchement moindre à proportion pour tous les degrés inferieurs jusqu'à 50, où est le plus grand froid, ainsi selon le degré où sera le Thermometre on retranchera de la hauteur de l'Esprit-de-vin dans le Barometre double ou un pouce ou une partie dun pouce, jusqu'à ce que le Thermometre étant à 50 on ne retranche rien. Voilà le principe d'une espece de Table que M. Amontons a

construite, qui donne tout d'un coup les hauteurs à retrancher.

Il ne faut pas oublier que le Barometre double de M. Amontons a encore un avantage sur l'ancien. Un Barometre est d'autant plus *sensible* qu'il marque les mêmes changemens dans une plus grande étenduë. Ainsi le Barometre double est plus sensible que le simple, parce que tout le jeu de la variation du simple étant renfermé dans l'étenduë de deux pouces de Mercure, cette même variation est marquée dans le double par une liqueur qui est beaucoup plus legere que le Mercure, & dont plusieurs pouces haussent ou baissent par l'élevation d'un pouce de Mercure, selon la proportion de leurs pesanteurs. L'Eau Seconde que l'on employe communément dans le Barometre double est 14 fois plus legere que le Mercure, & donne les degrés 14 fois plus grands. Mais l'Esprit-de-vin qui dans une constitution moyenne de l'air est 16 $\frac{1}{4}$ fois plus leger que le Mercure produira donc une plus grande sensibilité dans le Barometre double de M. Amontons.

DIVERSES OBSERVATIONS
DE PHYSIQUE GENERALE.

I.

MONSIEUR Maraldi ayant communiqué à l'Academie des Relations qu'il avoit reçûës des Tremblemens de terre arrivés en Italie, nous en détacherons ici ce qu'elles contenoient de plus physique.

Les Tremblemens commencerent en Italie au mois d'Octobre 1702, & continuerent jusqu'au mois de Juillet 1703. Les Pays qui en ont le plus souffert, & qui furent aussi ceux par où ils commencerent, sont la Ville de Norcia avec ses dépendances dans l'Etat Ecclesiastique, & la Province de l'Abrusse. Ces pays sont conti-

gus,

gus, & situés au pied de l'Apennin du côté du Midi.

Souvent les Tremblements ont été accompagnés de bruits épouvantables dans l'air, & souvent aussi on a entendu ces bruits sans qu'il y ait eu de tremblements, le ciel étant même fort serain. Le tremblement du 2 Fevrier 1703, qui fut le plus violent de tous, fut accompagné, du moins à Rome, d'une grande serenité du ciel, & d'un grand calme dans l'air. Il dura à Rome une demi-minute, & à l'Aquila Capitale de l'Abrusse trois heures. Il ruina toute la Ville de l'Aquila, ensevelit 5000 personnes sous les ruines, & fit un grand ravage dans les environs.

Communément les balancemens de la Terre ont été du Nort au Sud, ou à peu près, ce qui a eté remarqué par le mouvement des Lampes des Eglises.

Il s'est fait dans un champ deux ouvertures d'où il est sorti avec violence une grande quantité de pierres qui l'ont entierement couvert, & rendu sterile. Après les pierres il s'élança de ces ouvertures deux jets d'eau qui surpassoient beaucoup en hauteur les arbres de cette campagne, qui durerent un quart-d'heure, & inonderent jusqu'aux campagnes voisines. Cette eau est blanchâtre, semblable à de l'eau de savon, & n'a aucun goût.

Une Montagne qui est près Sigillo, Bourg éloigné de l'Aquila de 22 Milles, avoit sur son sommet une plaine assés grande environnée de rochers, qui lui servoient comme de murailles. Depuis le tremblement du 2 Fév. il s'est fait à la place de cette plaine un gouffre de largeur inégale dont le plus grand diametre est de 25 toises, & le moindre de 20. On n'a pû en trouver le fond; quoiqu'on ait été jusqu'à 300 toises. Dans le temps que se fit cette ouverture, on en vit sortir des flâmes, & ensuite une très grosse fumée qui dura 3 jours avec quelques interruptions.

A Gennes le 1er & le 2 Juillet 1703, il y eut deux petits tremblements. Le dernier ne fut senti que par des

gens qui travailloient sur le Mole. En même temps la mer dans le Port s'abbaissa de 6 pieds, en sorte que les Galeres dans la Darce toucherent le fond, & cette basse mer dura près d'un quart d'heure.

L'eau souffrée qui est dans le chemin de Rome à Tivoli s'est diminuée de deux pieds & demi de hauteur tant dans le bassin, que dans le fossé. En plusieurs endroits de la plaine appellée *le Testine* il y avoit des sources & des ruisseaux d'eau qui formoient des marais impraticables. Tout s'est seché. L'eau d'un Lac appellé l'Enfer a diminué aussi de 3 pieds en hauteur. A la place des anciennes sources qui ont tari, il en est sorti de nouvelles environ à une lieuë des premieres, en sorte qu'il y a apparence que ce sont les mêmes eaux qui ont changé de route.

II.

V. les M. p. 452.
M. de la Hire avoit publié dans les Memoires de l'Academie de 1692, ce qu'il avoit découvert sur des Insectes qui s'attachent aux Orangers, & qu'on appelle communément Punaises. Ce qu'ils ont de plus particulier, c'est qu'on les voit attachés pandant 8 mois entiers à un même endroit soit d'une feüille d'Oranger, soit de la tige de l'arbre, sans l'abandonner jamais. Pendant ce temps-là ils croissent beaucoup, & jusqu'à devenir 20 ou 30 fois plus gros qu'ils n'etoient d'abord, & puis ils pondent leurs œufs. Mais en quel temps se sont-ils accouplés? Cette parfaite immobilité, & si rare dans des Animaux, rend la question difficile. M. de la Hire en a enfin trouvé le dénouëment. Il a vû ces insectes nouvellement éclos de leurs œufs courir sur les Orangers avec une grande vîtesse, & il faut que leur accouplement se fasse dans le temps qu'ils ont cette legereté & cette vivacité. Après cela, ils s'attachent pour toûjours à quelque endroit de l'Arbre, & leurs œufs sont 8 mois à acquerir la maturité necessaire pour sortir.

Ce qui fut cause que M. de la Hire examina ces Insectes nouvellement éclos, c'est qu'il avoit crû qu'ils

pouvoient être les mêmes que ceux qui font la Cochenille. Il a remarqué autrefois que ce qu'on appelle graine de Cochenille, n'est que le ventre d'un petit Insecte, dont il ne reste rien de plus. Ce ventre est couvert d'écailles, & s'est conservé par sa dureté, tandis que les autres parties, inutiles apparemment pour la teinture, se sont desséchées, & ont peri. La plante à laquelle cet Insecte s'attache est l'Opuntia, dont les fruits sont rouges, & teignent en un rouge de sang les urines de ceux qui en ont mangé. Le ventre des Insectes des Orangers est assez semblable à celui de ces Insectes qui font la Cochenille, les Insectes des Orangers étant écrasés entre les doigts leur donnent une couleur roussâtre qui tient fort à la peau; ces conformitez firent naître à M. de la Hire la pensée que peut-être les Insectes des Orangers étoient-ils les mêmes que ceux qui font la Cochenille, & que s'ils étoient nourris d'Opuntia ils donneroient la même teinture. Il mit au-dessous d'un Oranger quelques plantes d'Opuntia, & répandit de part & d'autre une grande quantité d'œufs des Insectes des Orangers. Ils vinrent à éclorre sur l'une & l'autre plante, mais les petits animaux qui étoient sur l'Opuntia le quitterent tous sans exception pour aller sur l'Oranger, & de là M. de la Hire conclut qu'assurément les Insectes des Orangers n'étoient pas ceux qui donnent la Cochenille. Mais il les vit dans leur premiere jeunesse, & conjectura, comme nous l'avons dit, que c'étoit alors qu'ils s'accouploient.

III.

Il doit paroître assés étonnant que quand on envelope de sa main la boule d'un Thermometre pour en échauffer la liqueur, & la faire monter dans le tuyau, cette liqueur commence par baisser, & ne monte au-dessus de son premier niveau qu'après ce mouvement si irregulier en apparence, & si contraire à ce qu'on auroit prévû. M. Amontons qui en parla à l'occasion de ses nouveaux Thermometres, rapporte ce mouvement par lequel la

liqueur baiſſe d'abord, à la rarefaction que la chaleur de la main cauſe dans la ſubſtance même du verre de la boule, avant que d'en cauſer dans la liqueur. La capacité de la boule augmente donc, & par conſequent la liqueur du tuyau baiſſe, juſqu'à ce qu'elle ait pris aſſés de chaleur pour monter malgré l'augmentation de la capacité de la boule.

M. Amontons a calculé ſur des experiences exactes de combien s'augmentoit cette capacité, & il n'a trouvé qu'un milliéme. Ce milliéme dont la boule s'augmente & qui eſt la quantité de liqueur qui y entre, ou qui baiſſe, deviendra d'autant plus ſenſible ſur le tuyau, que la capacité du tuyau ſera plus petite par rapport à celle de la boule.

---

* V. les M. p. 1.

MOnſieur de la Hire a donné à l'ordinaire ſon Journal de l'année precedente.

---

* V. les M. p. 235.

MOnſieur Poupart a donné l'Hiſtoire du Formicaleo.

ANATOMIE.

SUR L'IRIS DE L'OEIL.

* V. les M. p. 261.

L'Anatomie moderne a fait de ſi grands & de ſi utiles progrès, qu'il doit lui être permis de ſe délaſſer quelquefois de ſes importantes recherches, par des

curiosités qui ne seront qu'agréables. Tel est le mouvement de l'Iris, dont la mechanique a été jusqu'à present inconnuë.

L'Iris est cette membrane de l'Oeil, qui lui donne les differentes couleurs qu'il a en differens sujets, & de là vient son nom d'Iris. C'est une espece de Zone ou d'anneau circulaire assés large, dont le milieu qui est vuide est la Prunelle, par où les rayons entrent dans l'œil. Quand l'œil est exposé à une grande lumiere, la prunelle se rétrecit sensiblement, c'est-à-dire que l'Iris s'élargit & s'étend, au contraire dans l'obscurité la prunelle se dilate, ou, ce qui est la même chose, l'Iris se resserre. A une lumiere moyenne, l'ouverture de la prunelle, ou l'extension de l'Iris est moyenne aussi. Ces mouvements ne dépendent point de la volonté, ils sont purement naturels, & par là l'œil s'accommode & se proportionne de lui-même au degré de lumiere qu'il doit recevoir. Il s'ouvre beaucoup quand elle est foible, pour en recevoir davantage; il s'ouvre peu, quand elle est forte, de peur d'en recevoir trop, & d'en être blessé. Quelle sagesse a dû presider à cette Mechanique!

Mais ce n'est pas assés de connoître la fin qu'elle s'est apparemment proposée, il faut tâcher de découvrir les moyens dont elle s'est servie. La difficulté consiste à trouver & comment se fait la dilatation ou le resserrement de la membrane Iris, & comment la lumiere plus ou moins forte cause ces deux mouvements contraires. Si l'Iris avoit des fibres circulaires & concentriques à la prunelle, on concevroit aussi-tôt que ces fibres seroient autant de petits muscles, qui en se gonflant & en se contractant accourciroient les cercles qu'ils formeroient, & en diminuëroient l'espace, & par consequent l'ouverture de la prunelle. Il ne resteroit plus qu'à imaginer comment une grande lumiere causeroit le gonflement de ces petits muscles. Mais l'Iris n'a point de fibres circulaires, elles sont toutes tirées de la cir-

conference vers le centre, & si l'on pretendoit que des muscles ainsi posés se gonflassent par une grande lumiere, il paroît qu'ils s'accourciroient necessairement, & augmenteroient l'ouverture de la prunelle, ce qui est précisément contraire au fait qu'il faut expliquer. Je laisse à part la difficulté de concevoir comment les rayons de la lumiere gonfleroient les petites fibres de l'Iris, il seroit inutile de s'en mettre en peine, puisque ce gonflement n'a pas lieu.

Voila où l'on en étoit sur ce Phenomene, lorsqu'une experience que fit M. Méry, lui donna une idée qu'il a crû qui le conduisoit au dénouëment. Il est certain qu'une infinité de choses ne demeurent obscures, que faute d'un assez grand nombre de faits, qui les presentent à nos yeux de plusieurs manieres differentes, ou qui nous en apprennent toutes les circonstances essentielles. M. Méry plongea dans l'eau un Chat vivant, & exposa en même temps sa tête & ses yeux au Soleil. Il vit que malgré la grande lumiere la prunelle de l'animal ne se rétrecissoit point, qu'au contraire elle se dilatoit; dès qu'il l'eut retiré de l'eau encore vivant, elle se resserra.

Quoiqu'il passe moins de rayons dans l'eau que dans l'air, & qu'il semble par consequent que les yeux du Chat plongé dans l'eau, en recevoient moins que s'ils eussent été à l'air, cependant comme ils étoient directement exposés au Soleil, leur prunelle auroit toûjours dû se resserrer, quoiqu'un peu moins; & de ce qu'elle se dilata, loin de se resserrer, M. Méry en conclut que la lumiere seule ne pouvoit causer le resserrement. Et comme l'animal étoit plongé dans l'eau, quel changement cet état apportoit-il par rapport au phenomene? Le Chat ne respiroit point, la circulation de son sang étoit presqu'entierement arrêtée, & par consequent aussi le mouvement des Esprits animaux, & par consequent ces Esprits sont necessaires afin que la prunelle puisse se resserrer, ou plûtôt afin que l'Iris puisse s'élargir.

Cette conſequence eſt appuyée par l'exemple de tous ceux en qui la vûë eſt éteinte par une ſimple obſtruction du nerf optique. Leur prunelle ne ſe reſſerre point à la plus grande lumiere, ſelon la remarque de M. Méry, & il eſt certain que les Eſprits animaux ne coulent plus dans le nerf qui fait la viſion, ou n'y coulent pas en aſſés grande abondance.

Puiſque ces Eſprits concourent avec la lumiere à cauſer l'extenſion & l'élargiſſement de l'Iris, il faut abſolument & que la lumiere détermine les Eſprits à couler en plus grande quantité dans les fibres, & que ces fibres en ſoient allongées. Pour le premier point, on peut le concevoir par ce principe general d'experience, que les Eſprits coulent plus abondamment dans une partie nerveuſe, quand elle eſt chatoüillée ou irritée par quelque cauſe que ce ſoit, & il faudra ſuppoſer que la lumiere cauſe une eſpece d'irritation aux fibres de l'Iris. Mais ſur le ſecond point, il ſemble que l'on retombe dans la difficulté que nous avons marquée. Tous les muſcles ou toutes les fibres s'accourciſſent par une plus grande quantité d'Eſprits, comment celles de l'Iris s'allongent-elles par cette même cauſe? Cette difficulté ſeroit inſurmontable ſans un exemple unique, mais très-ſenſible, d'une partie qui ſe gonfle & s'allonge en même temps. Ni l'accourciſſement ni l'allongement d'une partie gonflée ne ſont des ſuites neceſſaires du gonflement, mais ſeulement de ſa ſtructure interieure.

Les fibres de l'Iris doivent comme toutes les autres fibres avoir un reſſort. Il les retire, les raccourcit & reſiſte à leur allongement. Ainſi dès que la grande lumiere ceſſe de les tenir dans cet allongement violent, elles ſe reſſerrent d'elles-mêmes, & agrandiſſent la prunelle. Ce reſſort & la lumiere ſont deux puiſſances oppoſées, dont les differens degrés de force combinés enſemble, tiennent la prunelle plus ou moins ouverte.

Cela ſuffiroit pour l'explication du Phenomene que M. Méry s'étoit propoſé, mais afin de la rendre encore

plus vraisemblable, & d'établir mieux que la lumière sans le concours des Esprits animaux ne fait rien sur l'Iris, il pretend que les yeux du Chat plongé dans l'eau recevoient plus de lumiere, que s'il eût été à l'air. Ce n'est pas qu'il ne passe plus de rayons dans l'air que dans l'eau, mais c'est que les yeux d'un animal en reçoivent davantage dans l'eau.

Il est constant par l'experience qu'un Plongeur apperçoit au fond de l'eau à une assés grande distance des objets qu'il n'appercevra plus dès qu'il sera hors de l'eau, quand ils se seroient assés rapprochés pour être toûjours à la même distance de ses yeux. M. Méri imagine une raison de ce fait qui peut paroître embarrassante. Il croit que la Cornée, cette Membrane dure & transparente qui enveloppe exterieurement le globe de l'œil, n'est pas aussi lisse ni aussi unie qu'elle le paroît, quand les yeux sont à l'air. Il s'y fait alors des plis & des rides qui augmentant son épaisseur dans les endroits où ils se forment, la rendent plus difficile à penetrer aux rayons, & par consequent en font reflechir un grand nombre, qui sont perdus pour l'œil. Mais dans l'eau, ces rides & ces plis s'applanissent, parce que la membrane est humectée, elle est également penetrable à la lumiere en toutes ses parties, & il ne s'y reflechit plus de rayons, qu'autant qu'il est indispensable qu'il s'en reflechisse sur une surface parfaitement transparente. L'œil qui reçoit plus de rayons, voit mieux.

A cette quantité de rayons plus grande que reçoit un œil plongé dans l'eau, parce que sa Cornée est applanie, si l'on joint l'ouverture de la prunelle qui est plus grande, parce que, selon le Sistême de M. Méry, les fibres de l'Iris sont moins remplies d'Esprits, on aura deux causes qui conspirent ensemble pour rendre la vision plus forte que l'eau. Une plus grande ouverture de la prunelle doit aussi faire paroître les objets plus grands.

Il est si vrai, selon M. Méry, qu'un œil qui est dans l'eau

l'eau en est plus éclairé, que c'est par cette raison qu'il est mieux vû, & que ses parties sont mieux distinguées. On y voit la Choroïde qui est une membrane placée derriere la Retine, les vaisseaux de la Choroïde, & l'extremité du Nerf Optique. Rien de tout cela ne se verroit dans un œil exposé à l'air, & quant aux parties qui ne s'y voyent pas dans l'eau, telles que sont les humeurs & la Retine, c'est qu'elles sont transparentes, & de la couleur de l'eau.

On pourroit croire que la seule dilatation de la prunelle dans l'eau, y rendroit les parties de l'œil plus visibles, & que l'applanissement de la Cornée n'entreroit pour rien dans cet effet, & ne seroit qu'une fiction. Mais M. Méry previent cette pensée par l'exemple qu'il rapporte de ceux qui ont la Goutte sereine, c'est-à-dire une obstruction dans le nerf Optique. Ils ont la prunelle extremement dilatée, & cependant on ne distingue aucune des parties du fond de leur œil. D'où cela vient-il, sinon de ce qu'il n'est pas assés éclairé? Et qui empêche qu'il ne le soit assés, si ce ne sont les plis de la Cornée?

De ce que les Humeurs & la Retine de l'œil d'un Chat plongé dans l'eau disparoissent également, & sont par consequent également transparentes, M. Méry en tire cette consequence que la Retine n'est pas plus que les Humeurs l'organe immediat de la vision, ou, pour ainsi dire, la toile qui reçoit la peinture des objets. Il donne cet usage à la Choroïde, qui est derriere la Retine, & beaucoup plus opaque, puisqu'elle arrête les rayons, & se fait voir. Cette question a été autrefois agitée dans l'Academie & fort au long, & fort ingenieusement, par deux habiles Adversaires, dont l'un soûtenoit la Retine selon l'opinion commune, & l'autre pretendoit mettre la Choroïde en sa place. Le Public fut instruit du procès en ce temps-là; & il n'est pas besoin de rappeller ici une contestation fort delicate & fort subtile, sur laquelle M. Méry ne prend parti que par occasion.

DIVERSES OBSERVATIONS ANATOMIQUES.

I.

MOnsieur Littre ouvrant le cadavre d'une Femme âgée de 80 ans, qui avoit été tuée d'un coup de timon de Carrosse, la trouva d'une si prodigieuse maigreur, que ses Muscles les plus gros n'étoient pas plus epais que des Membranes, & qu'à peine avoient-ils conservé quelque teinture de rouge. Cependant elle avoit à la partie moyenne interieure de la Cuisse gauche une tumeur grosse comme le poing, ronde, de la même couleur que le reste de la peau, toute formée de la plus belle graisse qu'on puisse voir dans le corps le plus sain.

Cette tumeur toute formée de graisse eût été extraordinaire, même dans un corps qui n'en eût pas été d'ailleurs si parfaitement denué. Elle étoit contenuë dans son lieu naturel, c'est-à-dire, dans les cellules de la Membrane Adipeuse.

La graisse est un suc huileux, qui est separé du sang par les glandes des cellules de cette membrane, & qui se fige & se congele dans ces cellules. On est maigre, soit quand on a peu de suc huileux dans le sang, soit quand ce suc est trop dissous ou par la grande chaleur, ou par les autres principes du sang, ou par un grand & long exercice, soit quand les glandes destinées à le filtrer font mal leur fonction. Dans les personnes fort maigres, ces glandes qui ne filtrent rien, & les cellules de la Membrane Adipeuse qui ne contiennent rien, s'affaissent, s'effacent & en quelque sorte s'aneantissent. Au contraire, dans les personnes fort grasses les glandes sont visibles quoiqu'elles ne le soient qu'avec le Microscope, & les cellules fort étenduës; & si ces cellules le sont au point qu'elles en ayent perdu le ressort par le

quel elles chassent hors d'elles une partie du suc qui y est entré, & le font retourner dans les voies de la circulation, il se fait un amas excessif de ce suc qui séjourne, c'est-à-dire une tumeur. Cet accident est fort rare, & peut-être ne connoissoit-on point encore une tumeur de graisse.

Il n'y a point d'apparence qu'une tumeur de cette espece doive être accompagnée ni d'inflammation, puisqu'il n'y a point de sang extravasé, ni de douleur, parce que la graisse est une matiere fort douce, & qui humectant les fibres nerveuses les rend peu susceptibles d'une tension violente.

Cette tumeur de graisse s'étant formée dans un sujet en qui toutes les glandes & toutes les cellules de tout le reste de la Membrane adipeuse s'étoient entierement flétries & dessechées, on peut concevoir que les glandes qui avoient causé la tumeur étoient seules demeurées en état de filtrer le suc huileux, & qu'elles en avoient filtré une quantité dautant plus grande, que les autres n'en filtroient plus du tout.

Il ne sera pas impossible d'imaginer des remedes à un pareil accident, quand on jugera qu'il en merite. M. Littre croit que si la tumeur est récente, il y faut appliquer d'abord un Topique astringent, qui resserrant la peau, les glandes & les cellules de la Membrane adipeuse, les mette en état de resister à l'impulsion des sucs qui surviennent toûjours de nouveau, qu'ensuite un remede resolutif fera transpirer une partie de la graisse amassée en trop grande quantité, que dans tout le cours du pensement il sera à propos d'employer un bandage qui aide à l'effet du topique astringent, que si la tumeur est inveterée, on ne peut plus que la couper, parce que les parties ne sont plus en état de reprendre leur ressort, & qu'il faut bien observer de la couper toute entiere, de peur que s'il restoit quelques glandes & quelques cellules dilatées, elles ne reçûssent encore dans la suite une trop grande quantité de suc huileux qu'elles

ne pourroient chaſſer hors d'elles, & ne cauſaſſent une nouvelle tumeur.

II.

Dans une jeune Femme de 38 ans, & de bonne conſtitution, que deux Hommes avoient étranglée avec leurs mains, M. Littre trouva que la peau du Tambour de l'Oreille gauche étoit déchirée, & qu'il étoit ſorti par cette Oreille environ une once de ſang; que les Vaiſſeaux ſanguins du Cerveau étoient plus pleins qu'à l'ordinaire, qu'il y avoit du ſang d'un rouge clair épanché dans les Ventricules du Cerveau, & ſur la baſe du Crane; que le Poumon étoit fort tendu, & ſa membrane, où il ne paroît naturellement aucun vaiſſeau ſanguin, toute parſemée de vaiſſeaux gros comme de moyennes épingles, qu'au travers de cette membrane on appercevoit beaucoup plus d'air qu'à l'ordinaire dans les cellules du Poumon; qu'en ouvrant le ventricule droit du cœur, il en ſortit de l'air avec impetuoſité, & que cette cavité contenoit une once de ſang vermeil & écumeux comme celui du Poumon: Tous ces faits extraordinaires ne tiennent pas tant à ce que cette Femme fut étranglée, qu'à la maniere dont elle le fut. Les mains des deux hommes ne lui ſerrerent pas la gorge auſſi fort, auſſi continuëment, ni auſſi également qu'auroit fait une corde; elle ſe défendit, ſe débatit, & vécut aſſés long-temps, comme à diverſes repriſes, & pendant ce temps-là le ſang qui étoit pouſſé par le cœur vers les parties ſuperieures, & qui n'en redeſcendoit pas librement, s'y amaſſa, les gonfla, & même en quelques endroits creva les vaiſſeaux. Celui des veines du Poumon ne recevant plus l'air qui auroit dû le pouſſer dans le ventricule gauche, ou plûtôt ne le recevant pas en aſſés grande quantité, reflua par l'artere du Poumon dans le ventricule droit, & y porta de l'air avec lui. Cependant M. Littre en ſoufflant par la Trachée ne put jamais faire paſſer d'air dans le ventricule droit, mais ſeulement dans le gauche, encore cela n'arrivoit-il pas toûjours.

III.

Dans ce même sujet, M. Littre observa que les deux Trompes de la Matrice étoient plus grosses, plus épaisses, & plus charnuës que de coûtume. Elles s'ouvroient à l'ordinaire dans la Matrice par leur petit bout, mais par le gros elles n'avoient ni l'une ni l'autre aucune ouverture, ni aucune apparence d'en avoir jamais eu. Elles étoient même sans Pavillon. Cependant cette Femme avoit eu deux Enfans, le dernier 3 ans avant sa mort. A moins qu'on ne suppose que ces deux Trompes s'étoient fermées également, & de maniere à ne laisser nulle trace de leur ouverture naturel, ou que du moins l'une ayant toûjours été naturellement fermée, il en étoit arrivé autant à l'autre par accident, le Sistême des Oeufs paroît détruit; mais il est d'ailleurs si vraisemblable & même si necessaire qu'il merite qu'on se resolve à cette supposition Les deux Trompes étoient pleines, l'une de serosité sanguinolente, & l'autre d'une serosité jaunâtre. leur surface interieure étoit inégale en quelques endroits, & percée par-tout d'un très-grand nombre de petits trous, qui répondoient à autant de grains glanduleux, situés sur la superficie exterieure de ces deux conduits.

IV.

M. Lémery a parlé d'une Dame de Paris, grande, robuste, d'un temperament vif & sanguin, sujette à des passions fortes, mais peu durables, qui depuis l'âge de 24 ans jusqu'à 40 ayant fait 14 couches en a eu 6 d'extraordinaires par les differentes envies, dont elle a été frappée. L'un de ces acouchemens monstrueux a été d'une fille parfaitement bien formée à l'exterieur, & même d'une si grande beauté que feu M. le Brun la voulut peindre. Elle n'avoit ni foie, ni ratte, ni intestins, mais seulement une masse charnuë qui communiquoit avec l'Estomac, & n'avoit point d'ouverture vers le fondement, grosse à peu près comme la tête de l'Enfant,

parsemée d'artères & de veines, & rougeâtre. Cette fille vecut 8 jours.

V.

M. du Verney le jeune a parlé d'une cure fort heureuse qu'il avoit faite. Une jeune Demoiselle qui n'avoit pû épouser un homme qu'elle aimoit, tomba d'abord dans une sombre melancolie, & ensuite par degrés dans une telle fureur, qu'elle ne connoissoit plus aucune retenuë, & donnoit toutes les marques les plus indecentes de la passion qui la tourmentoit. Elle étoit devenuë d'une extrême maigreur, on lui avoit fait inutilement beaucoup de remedes & la maladie duroit déja depuis 5 ou 6 mois, & paroissoit desesperée, lorsque M. du Verney fut appellé. Il lui vint d'abord en pensée de bassiner avec de l'eau tiede les parties qui étoient la source du mal, & qui apparemment devoient être dans une grande irritation. Il vit aussi-tôt du soulagement, il continua à les bassiner, & même y fit des injections avec une forte décoction de racine d'Ellebore noir & de Patience, de Solanum & de Guimauve, où il avoit ajoûté du Sel de Saturne. Il appliqua de plus sur la tête de la Malade qu'il avoit fait raser, un Emplâtre où entroit le Sel de Saturne, le Castoreum, l'Opium, & le Camphre. Le soulagement fut très-considerable; M. du Verney passa aux remedes interieurs, & fit user à la Malade d'une teinture d'Hiera elleborinée. Les premieres voies ayant été débarrassées par ce moyen, il lui fit prendre soir & matin deux cuillerées d'une teinture faite avec le Vin, la racine d'Ellebore noir, les fleurs de Millepertuis, & le Coquelicot, le tout aiguisé d'un peu d'Eau-de-vie, & mêlé de plus ou de moins de Sel de Saturne selon les diverses circonstances de la maladie. En un mois ou six semaines au plus, la Demoiselle fut entierement guerie, & n'a eu depuis ni ressentiment ni rechûte.

Comme les Vapeurs sont une espece de Manie, mais beaucoup moins forte, & plus familiere, M. du Verney

assûre que dans toutes celles qui ne sont point accompagnées de convulsions, il a toûjours vû de très bons effets de la teinture qu'on a décrite ici, & qu'il n'a eu besoin d'y joindre le Sel de Saturne, que quand les Malades étoient furieux. A l'égard de ceux qui ont des convulsions, il ajoûte à cette teinture celle de Venus faite avec l'Esprit volatil armoniac, l'Esprit-de-vin, le Camphre, & le Verdet. Par ce remede, les mouvements convulsifs sont arrêtés presque dans le moment. Il faut purger dès qu'on le peut, & en cette occasion M. du Verney n'a point trouvé de meilleur Purgatif que l'Hiera elleborinée, ou seule, ou mêlée, ou en teinture, sur tout aux Femmes & aux Filles qui ne sont pas reglées.

VI.

M. Homberg a dit que quand on pile de l'Ipecacuanha en assés grande quantité, & qu'on en respire par le nez, il arrive assés souvent qu'on en crache le sang, & qu'on a de grands maux de tête pendant 2 ou 3 jours.

VII.

M. Lémery a vû cracher à un Malade parmi des flegmes assés épais des fibres blanches, grosses comme le tuyau d'une plume de Poulet, mêlées ou entourées d'un peu de sang, formées en branches ou ramifications, & representant parfaitement la figure des veines qui paroissent sur les Poumons. Elles étoient molasses, sembloient creuser en dedans, ne se rompoient pas aisément, & s'allongoient beaucoup quand on les tiroit. M. Lémery crut que ces fibres pouvoient être un Polipe qui s'étoit formé dans quelque artere ou dans quelque veine du Poumon. Leur substance étoit semblable à celle des Polipes du cœur, mais elles étoient plus grêles, & se ramifioient comme les vaisseaux pulmonaires. Elles devoient être sorties par une ouverture qui s'étoit faite à leur vaisseau, aussi étoient-elles accompagnées de sang, & le Malade avoit fait effort pour les jetter.

De petits corps blancs & molasses qui paroissoient souvent dans les saignées à l'ouverture de la veine, qui empêchent le cours du sang, & que les Chirurgiens prennent pour de petits morceaux de graisse, & quand ils sont allés longs, pour des Vers, pourroient donc, selon la conjecture de M. Lémery, n'être que des parcelles de quelque Polipe, qui se seroient rompuës, & auroient coulé avec le sang.

VIII.

M. Méry apporta un Enfant venu à terme, bien formé, & bien nourri, qui n'avoit que la base du Crane, & point de Cerveau, ni de Cervelet. Il lui ouvrit dans l'Assemblée le Canal de l'Epine, & il s'y trouva un filet de moëlle, plus petit qu'il n'auroit dû être naturellement. Ce seul filet avoit dû faire les fonctions du Cerveau. On peut voir sur ce sujet l'Histoire de 1703.*

* pag. 26. & suiv.

IX.

M. Lémery a dit qu'il a vû une Pierre d'un pouce de diametre, & d'un pouce & demi de long, qui étoit dans les Intestins d'une Femme, & en bouchoit exactement le passage, de sorte qu'elle faisoit refluer les matieres. Le fait est fort singulier. Les Intestins ne paroissent pas propres à produire une Pierre. Celle-là étoit trop grosse pour s'être formée telle qu'elle étoit dans la Vesicule du Fiel, & en être sortie ensuite par le canal Colidoque, on peut seulement concevoir qu'elle en étoit sortie beaucoup plus petite, & avoit grossi dans les Intestins.

X.

Dans le Lion, la Vesicule du Fiel a plusieurs plis ou feüillets, & de là M. du Verney a conjecturé que la bile y pouvant séjourner plus long-temps, & s'exalter davantage, c'étoit peut-être la cause de la grande ardeur de cet Animal, & de la Fievre continuelle qu'on lui attribuë.

XI.

XI.

M. Littre a vû un Homme en qui un accident avoit rendu le battement du Cœur si violent & si impetueux qu'on l'entendoit quelquefois de plus de dix pas. A l'âge de 16 ou 17 ans, il avoit reçû dans le Sternon un coup qui le lui avoit un peu enfoncé dans la poitrine. Aussitôt sa respiration devint difficile, & il commença un mois après à sentir dans la poitrine une douleur qui ne le quitta plus. Ensuite il devint sujet à des palpitations de Cœur, & c'étoit dans leur grande force qu'on entendoit de si loin son cœur battre. Il mourut subitement à 32 ans, mais moins, à ce qu'on put juger, par les suites de cet accident, que par l'excessive quantité d'Eau-de-vie & de Ratafia qu'il prenoit tous les jours, & qui étoit presque sa seule nourriture. M. Littre l'ouvrit. Il trouva les Poumons secs, flétris, & leur membrane fort épaisse, les deux troncs de la Veine Cave, l'Oreillette, & le Ventricule droit du Cœur, le tronc & les branches de l'Artere Pulmonaire, avant qu'elle entrât dans le Poumon, beaucoup plus grands que dans l'état naturel, & leurs parois beaucoup moins épaisses, les branches des Veines Pulmonaires, tant au dedans qu'au dehors du Poumon plus petites que les branches de l'Artere Pulmonaire hors du Poumon, mais proportionnées à ces mêmes branches contenuës dans le Poumon, leurs parois plus épaisses quand leurs cavités étoient plus petites, les parois du Ventricule gauche du Cœur, du tronc & des grosses branches de l'Aorte plus épaisses qu'à l'ordinaire, & les capacités plus petites. Il est aisé de juger que toute cette conformation extraordinaire venoit de l'enfoncement du Sternon, qui ayant rétreci la cavité de la poitrine, & cela précisément dans un âge où l'accroissement des parties s'avance beaucoup, avoit empêché les Poumons de s'étendre autant qu'ils eussent fait naturellement. Leur membrane & en general tout leur tissu s'étoit donc moins dilaté, & peut-être aussi que tou-

te la nourriture qu'ils prenoient ne servoit qu'à augmenter leur épaisseur. Les Poumons ayant moins d'étenduë, & étant plus difficiles à penetrer, le sang de l'Artere Pulmonaire y passoit en moindre quantité, & de là s'ensuivent naturellement tous les autres phenomenes.

Le Cœur étoit de figure presque ronde, le milieu en étant fort élevé, & la pointe rapprochée de la base, c'est-à-dire que son dernier mouvement avoit été une contraction imparfaite. Aussi les Ventricules étoient-ils entierement pleins de sang.

XII.

Ce même Homme avoit la substance du Cerveau & du Cervelet molle & fort imbibée d'eau, beaucoup d'eau épaisse & sanguinolente, ou du sang noir & caillé répandus dans tous les Ventricules. De là venoit qu'il étoit comme hebeté, & le plus souvent assoupi. Mais, ce qui paroît avoir été la principale cause de sa mort, son Cervelet étoit déchiré par la partie superieure, & il y avoit en cet endroit une cavité de 3 pouces de largeur, & de 2 pouces de profondeur, qui s'étendoit jusqu'au dedans du Ventricule du Cervelet. Elle étoit pleine de sang noir & caillé, & il s'étoit écoulé plus de 3 onces de semblable sang sur la base du Crane, ou dans le commencement du canal de l'Epine. M. Littre jugea que de cette déchirure & de cet épanchement il devoit s'ensuivre une cessation de filtration d'esprits dans les glandes déchirées du Cervelet, une dissipation d'esprits par les fibres nerveuses rompuës qui étoient en grand nombre, une compression d'une grande partie du Cervelet par le sang épanché, aussi-bien que de la Moëlle allongée, & du commencement de la Moëlle épiniere, une privation d'esprits dans le Cœur & dans les Poumons, & par consequent une cessation de mouvement presque subite.

XIII.

Une Femme âgée de 50 ans, & qui pendant 19 an-

nées de mariage n'avoit point eu d'enfans, fut tuée d'un coup d'arme à feu. Elle rendoit peu de sang dans le temps de ses Regles, elle étoit alors fort gonflée, & souffroit de grandes douleurs dans le bas ventre, & quelques années après qu'elle eut commencé à être reglée, elle mouchoit & crachoit du sang dans ces temps-là. M. Littre l'ayant ouverte, vit la cause de tous ces accidens, & de sa sterilité. L'orifice interieur de la Matrice étoit fermé par la membrane qui tapisse interieurement le Vagin, & cette membrane y étoit aussi adherente qu'à la superficie du Vagin. Elle étoit seulement percée de deux petits trous d'un quart de ligne de diametre. Le col de la Matrice étoit deux fois plus long qu'à l'ordinaire, apparemment parce que le corps de la Matrice étoit obligé dans le temps des Regles à faire de grands efforts pour chasser de sa cavité par deux si petites ouvertures le sang qu'il contenoit. Aussi ce sang, qui y séjournoit long-temps, en avoit-il étendu la cavité, & rendu les parois plus minces qu'à l'ordinaire. La cavité des Trompes, principalement vers leur ouverture dans la Matrice, étoit plus grande que de coûtume, parce que la limphe filtrée par les glandes des Trompes, s'amassoit là, ne pouvant être reçûë dans la Matrice qui presque toûjours étoit pleine de sang.

Une autre singularité de la constitution de cette Femme, & qui n'est pas tout-à-fait indigne d'être remarquée, c'est qu'un pli à un drap de son lit, un ourlet de chemise, lui faisoit venir presque dans le moment des taches noires sur la peau. Il falloit que son sang eût une grande disposition à se figer.

XIV.

M. du Verney le jeune ouvrant une jeune Femme morte deux mois après être relevée de ses couches, & dont le mal étoit une extrême douleur dans le ventre, qu'elle avoit fort tendu, quoiqu'il ne fût pas fort élevé, trouva qu'auprès de l'orifice inferieur de l'estomac,

qui étoit dilaté à y pouvoir mettre le poing, il y avoit un trou où l'on passoit le pouce. La capacité du ventre étoit remplie de beaucoup de matiere très-corrompuë, toutes les parties de cette region étoient enflammées, ou livides. Il ne pouvoit y avoir nul soupçon de poison, & c'est ce qui rend ce trou de l'estomac fort extraordinaire.

XV.

Voici encore un fait approchant. Un Homme d'environ 63 ans, après une Colique violente, pour laquelle il prit de l'Emetique, eut une tumeur sur les Côtes du côté droit. Elle s'étendoit de haut en bas; & comme elle s'augmentoit toûjours, & qu'on crut que c'étoit un abscès, on l'ouvrit le long de la derniere Côte des vraies, & la premiere des fausses, & même on penetra entre les deux Côtes. On fut fort surpris de voir sortir parmi du pus & d'autres matieres, des Pierres de la figure de Cachets à trois faces, & d'une couleur tirant sur le Bol. Il en est sorti jusqu'à six pendant près de deux mois; il y en a eu quelques-unes de si grosses qu'elles ont eu de la peine à passer par l'ouverture, & même celle qui s'est presentée la derniere n'y a jamais pû passer, & elle ne s'y est plus fait sentir. Ces pierres surnagent sur l'eau, & elles paroissent de la même nature que celles qui se forment dans le Foie & dans la vesicule du Fiel.

Comme il sort toûjours des matieres par l'ouverture, on s'est déterminé à y tenir une Canulle, & à penser le Malade matin & soir. On lui tire toûjours une palette, & quelquefois jusqu'à deux d'une matiere telle qu'elle est dans l'Estomac après la digestion, & même on y a vû plusieurs fois des morceaux de ce qu'il avoit mangé, car il a toûjours bon appetit. M. Littre a rapporté cette Histoire sur la foi d'un témoin oculaire, & on n'en a pas sçû la suite. Il est difficile d'imaginer d'où viennent les Pierres. Il faut d'ailleurs que l'Estomac, ou peut-être le Duodenum & le Diaphragme se soient percés naturel-

lement, car il ne paroît pas possible qu'ils l'ayent été par l'operation, & cet accident a été fort singulier.

XVI.

Un Homme fort & robuste, âgé de 60 ans, eut pendant 32 jours une suppression d'urine causée par une grande inflammation du col de la Vessie, ensuite il urina un peu, mais lentement, goutte à goutte, & continuellement. Cela dura 10 jours, & il mourut. Vers le milieu de sa maladie son ventre avoit commencé à enfler beaucoup, & avoit toûjours grossi jusqu'à la mort. M. Littre ayant ouvert le cadavre, trouva la Vessie extrêmement dilatée, & à tel point que par sa partie superieure elle faisoit une espece de cloison qui separoit la capacité du Ventre en deux, & comprimoit fortement la fin de l'intestin Colon, & le milieu de l'Uretere droit. La membrane interieure de la Vessie étoit devenuë si mince, à force d'avoir été étenduë, que l'on y voyoit comme à nû les fibres charnuës, ramassées en paquets, gros comme des fers d'aiguillette, & laissant entre eux des intervalles à peu près quarrés, de 3 à 5 lignes de long. Dans tous ces intervalles la membrane interieure étoit inseparablement colée à l'exterieure.

Il est plus que vraisemblable que l'inflammation du col de la Vessie avoit été la premiere cause de tout le desordre. Elle avoit gonflé & par consequent rapproché les parois de ce col, & fermé le passage à l'urine, qui s'amassant toûjours dans la Vessie, l'avoit extraordinairement dilatée. Les fibres charnuës renfermées entre les deux membranes & dans la substance de la Vessie & qui en se contractant chassent l'urine hors de ce reservoir, perdirent leur ressort par leur excessive dilatation. La grande quantité de l'urine ramassée força enfin la resistance du col de la Vessie, mais comme l'urine ne couloit alors que par l'impulsion de son propre poids, & non par celle des fibres charnuës contractées, elle couloit lentement, goutte à goutte, ce qui fait bien voir que

c'eſt la contraction de ces fibres qui chaſſe l'urine avec force, & la fait ſortir à plein canal. Quant à la continuité de l'écoulement, elle venoit de ce que le ſphincter du col de la Veſſie avoit perdu ſon reſſort par l'extenſion que lui avoit cauſée l'inflammation, de ſorte qu'ayant été une fois forcé, il ne pouvoit plus après que l'inflammation eut ceſſé, ſe remettre, ni refermer le paſſage.

La compreſſion que faiſoit la Veſſie dilatée ſur le Colon, & ſur l'Uretere droit, avoit été cauſe que toute l'étenduë de ces conduits qui étoit au-deſſus de l'endroit comprimé, s'étoit extrêmement dilatée.

XVII.

Un Homme de 26 ans étant mort après avoir eu durant 3 ſemaines une douleur continuelle d'Eſtomac, des maux de Cœur frequens & des nauſées, & avoir rendu les derniers jours de ſa vie beaucoup de ſang par haut & par bas, fut ouvert par M. Littre, qui lui trouva dans l'Eſtomac un Ulcere rond, de 5 lignes de diametre, & de demi-ligne de profondeur, ſitué à un pouce & demi du Pilore, & 3 chopines de ſang dont une partie étoit caillée & l'autre liquide épanchées dans la cavité de l'Eſtomac, les Inteſtins à moitié remplis de ſang, les Ventricules, les Oreillettes, & les Vaiſſeaux du Cœur, auſſi bien que les autres gros Vaiſſeaux du reſte du Corps entierement vuides de ſang, & pleins d'air, & peu de ſang dans les Vaiſſeaux moyens & dans les petits. Il eſt aſſés clair que l'Ulcere de l'Eſtomac a été la cauſe de ce grand épanchement de ſang, auſſi y voyoit-on fort ſenſiblement pluſieurs Vaiſſeaux ſanguins ouverts; mais pour la cauſe de l'Ulcere, on ſoupçonna que ce pouvoient être des medicamens violents que le Malade avoit pris d'un Homme peu experimenté.

M. Littre dit que dans ceux qui ſont morts d'une Perte de ſang, de quelque nature qu'elle ait été, il a toûjours trouvé pleins d'air les Vaiſſeaux qui étoient vui-

des de sang. Apparemment par la respiration continuelle le corps se penetre & s'imbibe entierement d'air, qui entre dans tous les pores des membranes & des tuniques des vaisseaux, où il est sans cesse comprimé par le cours rapide du sang, & d'où il ne sort que quand ces vaisseaux etant vuides, il a la liberté de se dilater. Alors il prend une grande extension, & les remplit.

XVIII.

Un Homme de 40 ans, sujet quelque temps avant sa mort à des coliques & à une douleur dans la region du Foie, mourut après avoir rendu par les selles quantité de corps semblables à de petites vessies. Il n'en avoit point rendu les 4 derniers jours qu'il vécut. Ces corps etoient de figure ovale, les plus petits étoient gros comme des noisettes, & les plus grands comme de petits œufs, remplis les uns & les autres d'une liqueur visqueuse, transparente, & de couleur approchante de l'eau. Il pendoit à la superficie exterieure de chacun une espece de pedicule membraneux, par lequel apparemment ils tenoient à des parties dont ils s'étoient détachés.

M. Littre ouvit le cadavre, & chercha inutilement dans toutes ses parties internes la source de ces corps vesiculaires. Il trouva bien dans le grand lobe du Foie une cavité large de 4 pouces, pleine de semblables corps, dont quelques-uns tenoient encore par leur pedicule à la membrane interieure de la cavité, mais elle n'avoit nulle ouverture, par où ils eussent pû sortir. Il n'étoit resté aucun corps vesiculaire dans tout le canal des intestins, & ils n'avoient rien de particulier sinon que la partie inferieure du Colon, & la superieure du Rectum étoient dépoüillées en plusieurs endroits de leur membrane interieure de la largeur de 3 à 5 lignes, Ce fut là la seule trace que M. Littre put découvrir de l'origine & de la formation des corps vesiculaires qui étoient sortis. C'étoient vraisemblablement les grains glandu-

leux du Rectum & du Colon extrêmement dilatés, parce que l'humeur destinée à s'y filtrer, ne s'y filtroit plus, & ne faisoit que s'y amasser, Comme il est de l'essence d'une glande d'avoir un conduit excretoire par où sorte l'humeur filtrée, ces grains glanduleux doivent en avoir un, & c'est là que s'étoit faite l'obstruction. Ce conduit excretoire gonflé & tendu par l'amas de la liqueur, avoit tiré par son poids les autres vaisseaux du grain glanduleux, les avoit excessivement allongés, & leur avoit enfin donné la figure d'un pedicule. Ce changement de figure les avoit rendus incapables de se nourrir, & avoit causé leur dessechement, après quoi le pedicule s'étoit détaché naturellement de la membrane qui contenoit le grain glanduleux, ou plûtôt avoit emporté avec lui la partie de la membrane qui lui répondoit, de là venoit que le Colon & le Rectum en étoient dépoüillés en quelques endroits. On peut croire que le passage continuel des matieres dans les Intestins avoit contribué à détacher les pedicules, & que comme cette cause n'avoit point de lieu à l'égard des corps vesiculaires renfermés dans le Foie, il en étoit demeuré quelques uns attachés à leur membrane, au lieu que tous ceux des Intestins sans exception, l'avoient quittée ou plûtôt emportée avec eux & étoient sortis.

XIX.

M. Littre qui avoit déja montré d'autres fois dans la Dure-Mere des grains glanduleux sensibles, car ils ne le sont pas ordinairement, en a fait voir encore dans celle d'un homme de 60 ans fort sain, mort subitement d'une mort violente. Ils étoient placés principalement près des Sinus, & des autres gros vaisseaux sanguins de cette membrane, situés dans son épaisseur les uns du côté de sa superficie exterieure & les autres du côté de l'interieure, de sorte qu'il paroissoit de part & d'autre une petite portion de ces grains avec leur conduit excretoire, par lequel il sortoit un peu de serosité lorsqu'on les

les pressoit entre les doits. L'usage des grains glanduleux placés du côté exterieur de la Dure-Mere, est vraisemblablement d'humecter par la serosité qu'ils separent du sang la superficie interieure du Crane, & l'exterieure de la Dure-Mere dans le peu d'endroits où elles ne sont pas attachées ensemble, & l'usage des grains glanduleux situés du côté interieur de la Dure-Mere, est de rendre le même office à la superficie interieure de cette membrane, & à l'exterieure de la Pie-Mere. Il est clair que si ces deux membranes, ou la Dure-Mere & le Crane se coloient ensemble, faute de quelque serosité qui coulât entre-deux, les mouvements du Cerveau n'auroient plus la liberté necessaire.

XX.

M. Antoine, Chirugien de Méry sur Seine, dont il a été parlé dans l'Hist. de 1703.* a envoyé à M. Méry la relation d'un Polipe plus gros qu'à l'ordinaire qu'il avoit heureusement arraché à une Femme en une seule fois. Une branche du Polipe lui remplissoit la narine droite, & s'avançoit quelquefois au dehors, l'extremité de ce corps étranger descendoit plus bas que la Luette. Il l'arracha par la bouche. Il croit que c'étoit une extension de la membrane glanduleuse qui revêt les Lames du Nés, & par consequent il attribuë la même origine à tous les Polipes pareils. Leurs vaisseaux sanguins, & leurs fibres nerveuses qui ne peuvent être des generations nouvelles, leur tissu fongueux qui marque des glandules étenduës au-delà du naturel, des serosités ou d'autres liqueurs qui s'y filtrent encore, restes des fonctions de ces glandules, sont les principales preuves de M. Antoine. De plus, le Polipe dont il s'agit étoit recouvert d'une espece de membrane, qu'il étoit impossible d'en separer sans interesser les fibres interieures, ce qui fait voir que tout le Polipe n'étoit formé que d'une même membrane allongée. C'est ainsi qu'à l'endroit des cicatrices dont les playes ont été profondes, on ne peut en-

* pag. 28.

lever la peau sans interesser les chairs qui sont au dessous, parce que ces cicatrices sont une espece de peau qui a été produite non seulement par les fibres de la peau allongées, mais encore par celles des chairs, & ces chairs qui ont contribué à cette production ont été d'autant plus profondes que la playe l'a été. En general on ne peut concevoir qu'il y ait des productions nouvelles ni d'Animaux ni de leurs parties dès qu'elles sont organisées, mais seulement des dévelopements, & des extensions. Une partie organisée qui ne s'étend que jusqu'à sa mesure prescrite ou ordinaire, demeure veritablement partie; si elle va beaucoup au-delà, elle devient Corps étranger, Polipe &c.

XXI.

M. Littre a vû dans une Femme de 40 ans qui n'avoit eu qu'un enfant, la Trompe gauche colée par son Pavillon à l'Ovaire du même côte, de sorte qu'elle en embrassoit une partie; & sur l'exterieur de cette partie il a remarqué une cicatrice fort sensible, & au dedans ce Corps spongieux, dont nous avons parlé dans l'Hist. de 1701.* On l'appelle communément *Caroncule*. Celle-là étoit ronde & grosse comme un pois. Il n'y avoit dans tout cet Ovaire ni dans le droit aucune autre cicatrice, ni aucune autre Caroncule, marque assés apparente que le Fœtus unique étoit sorti par cet endroit. De plus, il ne pouvoit absolument avoir passé par la Trompe droite, car vers son embouchure dans la Matrice ses parois étoient colées ensemble, & il n'y avoit à son autre extremité nulle ouverture, ni apparence de Pavillon. Cette disposition avoit été cause qu'il s'étoit amassé dans la cavité de cette Trompe un demi-septier de la serosité que filtrent les glandes dont elle est semée. Cette serosité étoit claire, & sans mauvaise odeur. Quand M. Littre l'eut évaporée à petit feu, il resta au fond du Vaisseau une pellicule épaisse de demi-ligne, qui sentoit bon, & avoit un bon goût.

* pag 44.

XXII.

M. Berger a parlé d'un Malade qu'il avoit vû âgé de 65 ans, d'une completion saine & robuste, qui mourut après une maladie dont les principaux simptomes avoient été une suppression d'urine, mais sans douleur, & une simple pesanteur dans le bas ventre. On l'ouvrit; on lui trouva le Colon extraordinairement dilaté, & quand on perça cet Intestin il en sortit beaucoup de vents avec le même bruit & les mêmes siflements que d'un balon bien enflé. On trouva aussi à la Vessie deux appendices qui en sortoient en forme de sacs, & qui étoient remplies d'urine. Toute la merveille consiste en ce que ces dilatations extraordinaires & du Colon & de la Vessie étoient sans douleur. Il falloit absolument que ces deux Visceres fussent devenus paralitiques. M. Berger rapporte cette paralisie à ce que le Malade bûvoit beaucoup de vin & d'eau-de-vie, & mangeoit peu. Les sels acres de ces liqueurs pouvoient avoir corrodé les fibres nerveuses de ces Visceres, avoir affoibli peu à peu, & enfin absolument détruit leur ressort, ce qui les avoit renduës incapables en même temps & de resister à une grande extension, ou de se remettre après l'avoir soufferte, & de recevoir les esprits qui font le sentiment. La maniere dont ces deux effets sont produits ensemble demanderoit un grand détail Mechanique, où M. Berger entra, mais c'est un Sistême assés important, & assés difficile pour meriter d'être traité à part.

MOnsieur Homberg a donné une Observation sur un Battement de Veines semblable à celui des Arteres. V. les M. p. 159.

V. les M. pag. 6.

MOnſieur du Verney le jeune a donné ſur une Hidropiſie du Cerveau, une Obſervation rapportée dans les Memoires, & qui fait part d'une eſpece de corps d'Obſervations qu'il a faites ſur l'Hidropiſie en general.

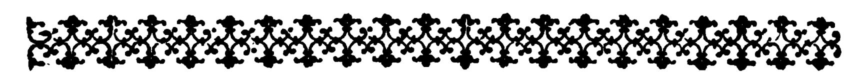
V. les M. pag. 48.

MOnſieur Tournefort lut à l'Academie une ample & exacte Deſcription du Caſtor, qui lui avoit été envoyée de Quebec par M. Sarraſin ſon Correſpondant, Medecin du Roi en Canada.

CEtte année M. Lémery le fils imprima une *Diſſertation ſur la nourriture des Os* qu'il avoit lûë à l'Academie. Il y prouve que ce n'eſt point la Moëlle qui nourrit les Os, mais un Suc tout different verſé dans leur ſubſtance par les arteres, car les Os malgré leur ſolidité ont des arteres & des veines auſſi bien que les chairs, & M. Méry a fait voir un Os fort dur traverſé en long dans toute ſon épaiſſeur par un gros vaiſſeau ſanguin. Sur la Moëlle & ſur les vaiſſeaux ſanguins des Os, inviſibles ordinairement à un certain âge, M. Lémery tombe dans les mêmes penſées que l'on a rapportées dans l'Hiſt. de 1700.* Il confirme par une experience qu'il a faite, la difference de la Moëlle & du Suc nourricier des Os. Il a fait boüillir dans de l'eau aſſés longtemps des Os concaſſés avec leur Moëlle, & enſuite il a vû que l'eau contenoit deux ſortes de ſubſtances, l'une huileuſe, qui ſurnageoit, & qui ſe figeoit quand le boüillon étoit refroidi, l'autre ſemblable par ſon goût & par ſa conſiſtance à de la gelée de viande, & qui devenoit plus épaiſſe quand on la faiſoit boüillir de nouveau, &

* pag. 14.

qu'on la laissoit ensuite refroidir. Il est plus que vraisemblable que la premiere substance étoit la Moëlle, & la seconde le Suc nourricier. La Moëlle destinée à entretenir la souplesse de l'Os, & à l'empêcher de devenir trop cassant, est une Huile fort fine que la chaleur du corps tient toûjours assés liquide pour s'insinuer entre les fibres serrées de l'Os. Le suc nourricier qui doit se changer en la substance même de l'Os est une gelée, ainsi que tout autre suc nourricier, & une gelée qui s'épaissit toûjours à la chaleur, & par consequent peut enfin acquerir la solidité de l'Os. On ne tire la substance huileuse que des Os qui ont de la Moëlle, & de tous on en tire la gelée, ce qui appuye fort encore le sentiment de M. Lémery. Il remarque aussi que les seuls Os qui ayent de la Moëlle sont ceux qui font de grands mouvements, & qui par là pourroient se dessecher trop, de même que les parties où la nature a attaché le plus de graisse sont ordinairement celles où les Muscles ayant plus d'action ont plus de besoin d'être humectés & rafraîchis. De là vient encore qu'il y a beaucoup moins de Moëlle à proportion dans les jeunes Os, qui sont eux-mêmes assés tendres.



CHIMIE.

SUR LA RECOMPOSITION DU SOUFFRE.

ON n'est jamais si sûr d'avoir décomposé un Mixte en ses veritables principes, que quand avec les mêmes principes on le peut recomposer. Ce rétablissement n'est pas toujoûrs possible, & quand il ne l'est pas, V. les M. pag. 178.

il ne conclut pas necessairement contre l'analise du Mixte, mais il la démontre quand il réussit. C'est un espece de bonheur dont il faut joüir quand il se presente.

On a vû dans l'Hist. de 1703.* l'analise que M. Homberg a fait du Souffre commun. M. Geoffroy a voulu voir s'il la verifieroit par la recomposition de ce corps, & le succés a été pleinement favorable.

* pag. 47. & suiv.

Il a pris de l'Esprit de Souffre bien desflegmé, c'est-à-dire le Sel acide du Souffre aussi pur qu'on le puisse avoir, une partie égale de cette Gomme que M. Homberg tire du Souffre, & qui en est la partie inflammable, & grasse, & pour suppléer au troisiéme principe qui est une terre, ou un alcali terreux, il a joint une partie d'huile de Tartre; l'operation ayant été conduite selon les regles de l'art, il a tiré de ce mélange du Souffre brûlant tout pur.

Il a fait plus, il a composé du Souffre, non en le recomposant avec les mêmes matieres qui en étoient sorties, mais en employant d'autres matieres qu'il a jugé devoir être de la même nature. Ainsi en substituant au Sel acide du Souffre l'Huile de Vitriol, & à la partie grasse & inflammable, l'Huile de Terebenthine, il a réüssi de la même maniere.

Les Sels Fixes, qui sont des Acides absorbés & retenus par une terre, tenant lieu de deux principes du Souffre à la fois, n'ont eu besoin que d'être mêlés avec une Huile inflammable, & ils ont aussi-tôt donné du Souffre; & même au lieu de cette Huile, M. Geoffroy a employé aussi heureusement des matieres solides inflammables, comme le bois, le charbon de bois, le charbon de terre. L'effet a été le même parce que ces matieres ne brûlent que par une huile qu'elles renferment.

Il faut remarquer que tous les Sels acides envelopés dans une terre ne se sont pas trouvés propres à faire du Souffre. M. Geoffroy excepte le Sel marin décrepité, & le Nitre Fixé. Peut-être leur acide est-il different

de celui du Souffre ou du Vitriol, ou de l'Alun, qui ne sont que le même. L'acide qui entre dans le Souffre devra donc être d'une nature particuliere, & on peut l'appeller *vitriolique*.

Boyle & Glauber, deux grands Chimistes, ont fait tous deux du Souffre commun, & par des mêlanges tels que M. Geoffroy les prescrit. Mais ils se sont trompés tous deux dans les consequences qu'ils ont tirées. Ils ont crû, l'un que le Souffre qui lui venoit avoit été renfermé dans un sel Fixe, l'autre, dans du charbon, & ils n'ont pas sçû que c'étoit le mêlange seul de trois principes, qui produisoit ce Mixte. L'erreur de ces grands Hommes releve le merite de la découverte de M. Homberg.

Si celle que M. Geoffroy a faite en travaillant sur le Souffre, se verifie dans la suite, elle sera plus importante que tout ce qui avoit été le principal objet de son travail. Il croit avoir reconnu que le fer n'est, aussi-bien que le Souffre commun, qu'un composé du Souffre principe, ou d'une matiere inflammable, d'un Sel vitriolique, & d'une terre. La roüille du fer, c'est à dire une dissolution qui se fait de quelques-unes de ses parties par l'humidité de l'air, prouve assés que ces parties là sont salines, & leur goût, qu'elles sont vitrioliques, & la facilité avec laquelle le fer s'enflamme, fait voir combien il est sulfureux. Mais à ces indices manifestes M. Geoffroy joint des preuves plus philosophiques. Il a fait du fer par le mêlange des trois principes rapportés, du moins c'est une poudre noire, pesante, & qui s'attache à l'Aiman, caractere specique du fer.

Si la composition de ce metal étoit une fois bien sûrement dévelopée, apparemment ce seroit un degré pour passer à celle des autres Metaux. La Chimie ne se peut rien proposer de plus grand ni de plus difficile que de les connoître jusque dans leurs principes, & peut-être après cela ce fameux objet de tant de recherches inutiles, cesseroit-il d'être chimerique.

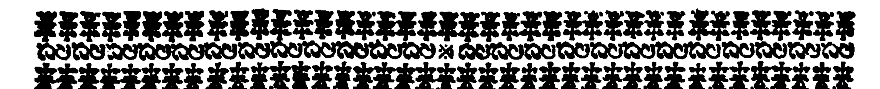
OBSERVATION

CHIMIQUE.

MOnsieur Homberg a fait voir une espece de petit arbisseau d'argent, haut de près de 2 pouces, élevé sur une plaque d'argent de la grandeur d'une piece de trente sous, & un peu plus pesente, dont la superficie qui portoit l'arbrisseau étoit extrêmement polie, l'opposée étant grenuë & raboteuse. Le fait est que M. Homberg avoit mis à la Coupelle environ deux Onces d'argent pour le purifier par trois fois autant de plomb. La Coupelle étant faite & l'argent congelé dans le feu, il s'éleva de dessus sa superficie comme un petit jet d'argent liquide, qui forma l'arbisseau. Apparemment la matiere qui étoit sous cette petite voute, & qui boüillonnoit encore, n'ayant pas la liberté de s'étendre, avoit percé la voute par l'endroit le plus foible, ou du moins à l'endroit qui répondoit à la plus grande chaleur du feu, & avoit fait le jet qui s'étoit ensuite congelé à l'air.

MOnsieur Lémery a continué son grand Traité de l'Antimoine.

BOTANIQUE.



BOTANIQUE.

OBSERVATION BOTANIQUE.

MOnsieur Lémery a dit qu'un de ses amis, curieux du jardinage, ayant enté sur un Coignassier une branche de Prunier, plia la greffe en arc, & en fit entrer la pointe dans un autre endroit du Coignassier, après quoi il fit avec de la terre glaise ce qu'on appelle des *Poupées* aux deux bouts de cette greffe. Elle prit par les deux bouts, & jetta des branches garnies de feüilles, qui produisirent dans leur temps des Prunes de l'espece de celles que portoit le Prunier, & d'un goût fort approchant. Mais celles qui étoient sorties de la pointe de la greffe, n'avoient pour noyau qu'un pepin gros comme celui du raisin, & fort dur, au lieu que les Prunes sorties du bout d'en-bas avoient un noyau à l'ordinaire.

MOnsieur Tournefort a donné la Description de l'*Alhagi*, Plante d'Armenie & de Perse, d'où l'on tire une espece de Manne purgative, & du *Chamærhododendros* de Levant. V. les M. p. 341.

M. Marchand a lû la Description de la *Linaria hederæ Foliis Col.* ou *Cymbalaria C. B.* reservée pour un ouvrage particulier.

M. Chomel a lû aussi la Description de la *Moschatellina Foliis Fumariæ bulbosæ J. B.*

LE P. Goüye a communiqué à l'Academie des descriptions de quelques Plantes d'Amerique envoyées par le P. Breton, Missionnaire Jesuite. Ces Plantes sont le Thé, le Sapotile, Liane, Cuébé, Mabouya pommier, & le Mahot à coton.

ARITHMETIQUE.

SUR UNE PROPRIETE' GENERALE DE TOUTES LES PUISSANCES.

MOnsieur Carré parla un jour par occasion d'une proprieté du nombre 6. Les nombres Cubiques naturels, 8, 27, 64, 125, dont la racine est moindre que 6, étant divisés par 6, le residu des divisions est leur racine même. Ainsi 8 étant divisé par 6, 2 residu de la division est la racine cubique de 8. 3 residu de la division de 27 par 6, est la racine cubique de 27 &c.

Si l'on pousse plus loin la Suite des Cubes naturels, 216 cube de 6 étant divisé par 6 ne laisse aucun reste, & le diviseur 6 est lui-même la racine cubique, mais 343 cube de 7 divisé par 6 laisse pour residu 1, qui joint à 6, fait cette racine cubique de 343, 512 cube de 8 divisé par 6, laisse 2, qui joint à 6 fait 8 racine cubique de 512, & ainsi de suite, de sorte que le residu des divisions des cubes au dessus de 216 divisés par 6, étant joint à 6, donne toûjours la racine du cube qu'on a di-

viſé, juſqu'à ce que ce reſte ſoit 5, & par conſequent 11 la racine cubique du nombre diviſé, après quoy le Cube ſuperieur étant diviſé par 6 il ne reſte rien, parce que la racine cubique eſt 12, multiple de 6, & enſuite ſi l'on continuë de diviſer par 6 les Cubes ſuperieurs, il ne faut plus ajoûter le reſidu des diviſions à 6, mais à 12 premier multiple de 6, & immediatement après qu'on aura paſſé le Cube de 18, où lon trouvera encore une diviſion ſans reſte, il ne faudra plus ajoûter le reſidu des diviſions à 6, ni à 12, mais à 18 ſecond multiple de 6, & toûjours ainſi de ſuite, prenant toûjours de ſix cubes en ſix cubes après une diviſion ſans reſte un multiple ſuperieur de 6, auquel on ajoûtera le reſidu de la diviſion faite par 6.

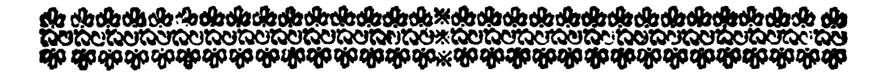
Il arrive preſque toûjours que les proprietés qui paroiſſent particulieres à quelques grandeurs, ſoit nombres, ſoit lignes, ſont generales & communes à une infinité d'autres grandeurs, conditionnées de la même maniere, mais on n'apperçoit pas toûjours ce qui fait que ces autres grandeurs ſont de la même condition, & du même ordre, & de là vient que des proprietés generales paſſent pour n'être que particulieres à certaines grandeurs, en qui elles ſe manifeſtent plus ſenſiblement. M. de la Hire en examinant la proprieté du nombre 6, par rapport aux nombres cubiques, trouva que tous les autres nombres élevés à quelque puiſſance que ce fût, avoient leur diviſeur qui faiſoit par rapport à eux le même effet, que 6 par rapport aux nombres cubiques.

Telle eſt la regle generale qu'il a découverte. Si l'expoſant de la puiſſance d'un nombre eſt pair, c'eſt-à-dire, ſi ce nombre eſt élevé à la 2de, 4e, 6e puiſſance &c, il faut le diviſer par 2, & le reſidu de la diviſion, en cas qu'il y en ait un, ajoûté à 2 ou à un multiple de 2 donnera la racine de ce nombre correſpondante à ſa puiſſance, c'eſt-à-dire, la racine 2e, ou 4e ou 6e &c. mais ſi l'expoſant de la puiſſance du nombre eſt impair, c'eſt-à-dire, ſi le nombre eſt élevé à la 3e, 5e, 7^{e}

puissance &c, le double de cet exposant sera le diviseur qui aura la proprieté dont il s'agit. C'est par là qu'elle se trouve dans 6, double de 3 qui est l'exposant de la puissance de tous les Cubes. De même 10 est le diviseur de tous les nombres élevés à la 5e puissance, 14 de tous ceux qui sont élevés à la 7e &c.

Quand on aura bien conçû quel est à l'égard des nombres cubiques l'effet du nombre 6, dans quels cas les divisions sont sans reste, & selon quel orde il faut ajoûter aux residus les differents multiples de 6 au lieu de 6, il sera très-facile d'appliquer de même le nombre 2 à toutes les puissances paires, & les nombres 10, 14, 18 &c. aux differentes puissances impaires.

La démonstration de la Regle generale de M. de la Hire dépend de la formation des puissances, & de quelques considerations sur la nature des Nombres. Les proprietés des Nombres sont un champ infini, ouvert à la curiosité, & aux recherches de l'Esprit humain.



GEOMETIRE.

SUR LA RECTIFICATION DES COURBES.

V. les M. p. 66.

* pag. 83.

ON a déja vû dans l'Hist. de 1701.* que M. Carré avoit donné des Methodes generales pour la Rectification des Courbes. Il la consideroit alors en elle-même, & sans aucun rapport étranger, mais parce qu'il arrive quelquefois que la rectification d'une Courbe dépend de la quadrature d'une autre, il considere maintenant les rectifications comme liées aux quadratures.

Que l'on prenne pour les deux premiers termes d'une proportion la Soutangente de tel point qu'on voudra d'une Courbe quelconque, & sa Tangente, & pour troisiéme terme une ligne droite constante quelconque, il est visible que comme la Soutangente & la Tangente varieront toûjours entre elles, le quatriéme terme de la proportion variera toûjours aussi, & variera dépendamment de la variation de la Soutangente & de la Tangente, & par consequent on en pourra former continuellement les Appliquées d'une seconde Courbe. Or cette seconde Courbe étant ainsi formée, M. Carré démontre que l'espace qu'elle comprendera sera égal à un parallelogramme fait de la droite constante employée pour troisiéme terme de la proportion, & d'une autre droite égale à la premiere Courbe, c'est à dire que la rectification de cette premiere & la quadrature de la seconde ne seront qu'un même Problême, & ne demanderont que la même solution.

Si sur la Parabole on construit de cette maniere une seconde Courbe, on voit naître aussi-tôt l'Hiperbole, & par consequent la rectification de la Parabole tombe dans la même impossibilité que la quadrature de l'Hiperbole.

Si la premiere Courbe est la seconde Parabole cubique, il s'en forme la Parabole ordinaire, qui étant quarrable donne une ligne droite égale à la seconde Parabole cubique. C'est une curiosité agréable en Geometrie, & même un progrès dans cette Science que de découvrir la source de la dépendance mutuelle où sont les uns à légard des autres les Problêmes des quadratures & des rectifications. On sçait donc non seulement que toute Courbe rectifiable répond à quelque Courbe quarrable, & toute Courbe non rectifiable à quelque autre non quarrable, & reciproquement, mais encore de quelle maniere il faut trouver l'une par l'autre.

Sur les Lieux qui se forment par le concours des Tangentes de la Cycloïde, & des Sections Coniques.

V. les M. p. 209.

SUr une Courbe une fois formée, on en peut toûjours construire d'autres, & il n'y a qu'à imaginer les conditions que l'on prescrira à cette nouvelle construction. Ainsi étant donnée une Cycloïde ordinaire, dont la base est égale à la circonference du cercle generateur, les Tangentes que l'on tirera à deux de ses points quelconques prolongées jusqu'à ce qu'elles concourent, feront toûjours un angle droit, pourvû qu'elles soient conditionnées d'une certaine maniere que M. de la Hire prescrit. Tous les points que déterminent par leur concours hors de la Cycloïde toutes ces Tangentes ainsi prises deux à deux, font une suite qui n'étant pas en ligne droite compose une nouvelle Courbe, ou un *Lieu*, car on appelle Lieu en Geometrie toute ligne ou tout espace qui se détermine par la variation de quelques grandeurs, toûjours reglée de la même maniere, & assujetie à une certaine Loi.

En cherchant quelle est la nouvelle Courbe produite par la Cycloïde, M. de la Hire trouve que c'est une autre Cycloïde, mais *accourcie*, c'est-à-dire dont la base est plus petite que la circonference de son cercle generateur.

Mais si les angles par lesquels se forme la seconde Courbe, au lieu d'être droits comme on les a supposés, étoient aigus ou obtus, & tous égaux entre eux, comme ce seroit une autre generation, ce seroit aussi une autre recherche. En ce cas-là, M. de la Hire démontre que la seconde Courbe seroit encore une Cycloïde accourcie. Il fait ensuite un grand nombre de remarques sur les contours, les positions, enfin sur les differentes

particularités de ces nouvelles Cycloïdes.

Il étend après cela toute cette Theorie aux Sections Coniques, & examine les Lieux qui naissent du concours de leurs Tangentes, sous quelques angles qu'elles se rencontrent, pourvû seulement qu'ils soient égaux. Toutes les nouvelles Courbes qui naissent, ne sont que des Sections Coniques; mais tout le détail qui n'est que de pure Geometrie doit être renvoyé au Memoire de l'Auteur.

SUR LES SPIRALES
A L'INFINI.

SI l'on vouloit faire un parallele des Geometres Anciens & Modernes, & comparer leur different merite, les Spirales dont nous allons parler, en fourniroient peut-être une occasion plus heureuse qu'aucune autre matiere. V. les M. p. 69.

Archimede a fait un Traité des Spirales, & tout le monde connoît leur generation. On suppose le rayon d'un cercle divisé en autant de parties que sa circonference, par exemple en 360. Le rayon se meut sur la circonference, & la parcourt toute entiere. Pendant ce même temps, un point qui part du centre du cercle se meut sur le rayon, & le parcourt tout entier, de sorte que les parties qu'il parcourt à chaque instant sur le rayon sont proportionelles à celles que le rayon parcourt dans le même instant sur la circonference; c'est-à-dire, que tandis que le rayon parcourt, par exemple, un degré de la circonference, le point qui se meut sur le rayon en parcourt la 360e partie. Il est évident que le mouvement de ce point est composé, & si l'on suppose qu'il laisse une trace, ce sera une Courbe qu'Archimede a nommée *Spirale*, dont le *Centre* est le même que celui du Cercle, & dont les Ordonnées ou *Rayons* sont

les differentes longeurs du rayon du cercle, prises depuis le centre, à l'extremité desquelles le point mobile s'est trouvé à chaque instant. Par consequent les Ordonnées de cette Courbe concourent toutes en un point, & elles sont entre elles comme les parties de la circonference du cercle correspondantes, qui ont été parcouruës par le rayon, & qu'on peut appeller *arcs de revolution*.

Quand le rayon du cercle a parcouru toute la circonference, & que par consequent le point mobile est arrivé à l'extremité du rayon, on peut concevoir que ce rayon soit prolongé hors du cercle d'une quantité égale à celle dont il étoit, & qu'il commence une seconde revolution dans les mêmes conditions que la premiere, & de même à l'infini. Voila donc la Spirale infiniment prolongée. Le cercle de la premiere revolution est toûjours le même, mais dans la seconde revolution les arcs ausquels les Ordonnées de la Spirale doivent être proportionnelles, sont la circonference du cercle de la premiere revolution, plus l'arc decrit de nouveau dans la seconde, & toûjours ainsi de suite. Si l'on conçoit à la fin de chaque revolution un nouveau cercle décrit, concentrique au premier, on les appelle *Cercles circonscrits*, chacun à sa revolution.

Archimede, inventeur de la Spirale est aussi le premier qui l'a examinée. Il en a trouvé les Tangentes, ou, ce qui revient au même, les Soutangentes, & ensuite les Espaces. Il démontre qu'à la fin de la premiere revolution la Soutangente de la Spirale est égale à la circonference du cercle circonscrit, qui est alors le même que celui sur lequel on a pris les arcs de revolution, qu'à la fin de la seconde revolution la Soutangente est double de la circonfereuce du cercle circonscrit, triple à la fin de la troisiéme revolution, & toûjours ainsi de suite. Quand aux Espaces, qui sont toûjours compris entre le rayon qui termine une revolution, & l'arc Spiral qui s'y termine aussi, pris depuis le centre, Archimede

chimede a prouvé que l'espace spiral de la premiere revolution est à l'espace de son cercle circonscrit comme 1 à 3, que l'espace de la seconde revolution est au cercle circonscrit comme 7 à 12, celui de la troisiéme, comme 19 à 27 &c. Ce sont là les deux plus considerables découvertes du Traité d'Archimede.

Nous avons ses propres démonstrations. Elles sont si longues, & si difficiles à embrasser, que, comme on l'a pû voir dans la Préface de l'Analise des Infiniment petits, M. Boüillaud a avoüé qu'il ne les avoit jamais bien entenduës, & que Viete les a injustement soupçonnées de paralogisme, parce qu'il n'avoit pû non plus parvenir à les bien entendre. Mais toutes les preuves qu'on peut donner de leur difficulté & de leur obscurité tournent à la gloire d'Archimede, car quelle vigueur d'esprit, quelle quantité de vûës differentes, quelle opiniâtreté de travail n'a-t-il pas fallu pour lier & pour disposer un raisonnement que quelques-uns de nos plus grands Geometres ne peuvent suivre, tout lié & tout disposé qu'il est?

L'esprit de la Geometrie moderne est d'élever toûjours les verités soit anciennes, soit nouvelles à la plus grande universalité qu'il se puisse. Dans la Spirale d'Archimede les Ordonnées ou rayons sont comme les arcs de revolution; M. de Fermat rendit la generation de cette Courbe plus universelle, en supposant que les rayons y fussent comme telle puissance qu'on voudroit de ces arcs, c'est-à-dire, comme leurs quarrés, leurs cubes &c, ou même leurs racines quarrées, cubiques &c. Car les Geometres sçavent que les racines sont des puissances mises en fraction.

La nature de la Parabole en général consiste en ce que ses Abscisses sont comme quelque puissance des Ordonnées, & c'est l'infinité de ces puissances possibles qui fait le nombre infini des differentes especes de Paraboles. Sur cela, M. Varignon fit reflexion que prendre une puissance quelconque des arcs circulaires, à la maniere

de M. de Fermat, ou les prendre comme les Ordonnées de quelque Parabole, c'étoit donc la même chose. Mais pourquoi ne les prendre que comme des Ordonnées de quelque Parabole? Pourquoi ne suivroient-ils pas la raison des Ordonnées de toute autre Courbe? Voilà donc la generation de la Spirale devenuë plus universelle qu'elle ne l'étoit selon M. de Fermat, puisque ces arcs de revolution peuvent suivre telle raison qu'on voudra. D'un autre côté, rien n'assujetit les rayons de la Spirale à se regler sur les arcs de revolution, ni sur aucune de leurs puissances, & par consequent la generation de la Spirale n'est plus renfermee dans aucunes bornes, puisque cette Courbe se peut former de telle raison qu'on voudra imaginer entre ses rayons, & de telle autre qu'on supposera entre ses arcs de revolution.

En concevant la formation de toute Spirale en general, ainsi que nous avons conçû celle de la Spirale d'Archimede, c'est-à-dire en concevant une ligne qui parcourt une circonference de cercle, & un point mobile sur cette ligne, il est bien clair que le mouvement de la ligne & celui du point sont absolument indépendants l'un de l'autre, & peuvent suivre, chacun en particulier, telle progression qu'on voudra. De là vient l'universalité infinie de la generation de la Spirale, car c'est le mouvement de la ligne qui détermine les arcs de revolution, & celui du point qui détermine les rayons.

Quelques differentes raisons ou progressions qu'on établisse pour les deux mouvements, on peut toûjours imaginer une Courbe dont les Abscisses representeront l'une, & les Ordonnées l'autre, & par consequent il n'y a nulle Courbe qui ne puisse servir à former une Spirale, & qui, pour ainsi dire, n'ait sa Spirale particuliere. Les Abscisses de la Courbe generatrice sont les rayons de la Spirale, & les Ordonnées déterminent les arcs de revolution.

Afin que les Abscisses de la Courbe generatrice soient les rayons de sa Spirale, ou, ce qui est la même chose,

soient égales à ces rayons, il faut que comme la Spirale a son origine au centre du cercle de revolution, la Courbe generatrice y ait aussi la sienne. Mais parce que cette position de la Courbe generatrice à l'égard du cercle de revolution n'est nullement necessaire, quoique la plus naturelle & la plus simple, & qu'on en peut supposer telle autre qu'on voudra, M. Varignon laisse cette position indifferente & indéterminée, ce qui donne encore une plus grande generalité à la formation des Spirales; car non seulement il peut y en avoir autant de differentes que de Courbes, mais encore autant que l'origine de chaque Courbe peut avoir de positions differentes par rapport au centre du cercle de revolution. Ainsi, ce qui auroit pû paroître un Paradoxe, il y a plus de genres de Spirales possibles, que d'autres Courbes, quoique les Spirales ne soient qu'une espece de Courbes.

Quand l'origine de la Courbe generatrice n'est pas au centre du cercle de revolution, ses Abscisses ne laissent pas de regler toûjours les rayons de la Spirale. Seulement il faut ajoûter à ces Abscisses ou en retrancher une certaine quantité, qui est déterminée par l'éloignement de l'origine de la Courbe à l'égard du centre du cercle de revolution.

La position de la Courbe generatrice demeurant donc indéterminée, & par consequent aussi le rapport de ses Abscisses aux rayons de sa Spirale, il ne reste rien de constant que le rapport de ses Ordonnées aux arcs de revolution; qu'elles déterminent toûjours. Aussi est-ce uniquement sur ce rapport que M. Varignon fonde une Equation generale pour toutes les Spirales possibles à l'infini. Il ne faut pour amener cette Equation à quelque chose de particulier qu'y faire entrer l'expression des Ordonnées de quelque Courbe particuliere. Et comme l'expression des Ordonnées d'une Courbe enferme necessairement ses Abscisses, on trouvera par là quels seront les rayons de la Spirale, selon la position qu'on aura donnée à la Courbe generatrice.

Par exemple, si la generatrice est une Parabole en général, dont les Ordonnées montent à telle puissance ou tel degré qu'on voudra, & si l'on suppose que son sommet soit au centre du cercle de revolution, on voit aussi-tôt la Spirale generale qui devient particuliere, ou plûtôt moins generale, puisqu'elle comprend encore une infinité d'especes, dont chacune répond à chaque espece de Parabole. M. Varignon trouve les Soutangentes de cette Spirale Parabolique generale, le rapport de ces Soutangentes, soit au cercle de revolution, soit à leur cercle circonscrit, lorsqu'elles terminent une revolution, ou, lorsqu'elles sont dans le cours d'une revolution, leur rapport à la portion de cercle correspondante; tous les espaces spiraux, soit tout ce qu'il y en a de compris dans tel nombre de revolutions qu'on voudra, soit l'espace seul de quelque revolution complete, soit l'espace seul de quelque partie de cette espace; enfin les *déroulemens* de ces Spirales, c'est-à-dire les Courbes qui naîtroient, si les rayons ou Ordonnées qui concourent toutes en un point étoient toutes posées sur un axe parallelement entre elles, selon l'ordre qu'elles avoient, & en conservant la même grandeur.

Tout l'artifice de cette Spirale Parabolique generale ne consiste qu'en ce que le degré de la Parabole generatrice a été laissé indéterminé, & lorsqu'on le détermine, il vient enfin une Spirale particuliere, &, pour ainsi dire, individuelle, & qui ne peut descendre davantage. Les Geometres conviennent que le Triangle peut passer pour la premiere espece de Parabole, dans laquelle les Ordonnées sont en même raison que les Abscisses; d'ailleurs dans la Spirale d'Archimede les arcs de revolution sont comme les rayons, & par consequent elle peut être produite par le Triangle ou par la Parabole du premier degré. Aussi quand on détermine le degré general de la Parabole à n'être que l'unité, toutes les proprietés qu'Archimede a découvertes dans sa Spirale s'offrent aussi-tôt, & accompagnées de plusieurs autres qu'il n'a pas vûës.

C'eſt-là le grand avantage des Geometres modernes ſur les Anciens. Un nombre de verités infiniment plus grand nous coûte infiniment moins, non que nous ayons un genie ſuperieur, mais parce que nous avons d'excellentes methodes. La gloire des Anciens eſt d'avoir pû faire ſans le ſecours de nôtre art le peu qu'ils ont fait, & la gloire des Modernes eſt d'avoir trouvé un art ſi merveilleux. Les Anciens reſſemblent aux Habitans du Mexique & du Perou, qui n'ayant ni Gruës ni Inſtruments pareils, & ne ſçachant point échafauder, ne laiſſoient pas d'élever des Bâtimens à force de bras, & les Modernes ſont les Européens qui bâtiſſent incomparablement mieux, mais avec des Machines.

On voit d'un ſeul coup d'œil par la Formule generale de M. Varignon, que dans la Spirale d'Archimede engendrée par la Parabole du premier degré ou par le Triangle, les Soutangentes qui terminent chaque revolution ſont entre elles comme la ſuite des quarrés naturels, 1, 4, 9 &c. Que dans la Spirale engendrée par la Parabole du ſecond degré qui eſt la Parabole ordinaire, ces mêmes Soutangentes ſont entre elles comme les racines quarrées des Cubes des nombres naturels, c'eſt-à-dire, comme les racines quarrées de 1, de 8, de 27, de 64 &c. Que dans la Spirale engendrée par la Parabole du troiſiéme degré, ou cubique, elles ſont comme les racines cubiques des quatriémes puiſſances des nombres naturels, & enfin l'on trouve toûjours avec la même facilité la progreſſion qui regne entre ces Soutangentes dans quelque Spirale parabolique que ce ſoit, ce qui fourniroit encore de nouveaux Theorêmes fort univerſels, ſi l'on vouloit comparer ces differentes progreſſions en differentes Spirales. Rien ne plaît davantage à l'eſprit en fait de Geometrie, que de voir naître d'une même grandeur differemment conditionnée, ces differens ordres infinis de progreſſions, également invariables dans toutes leurs parties, & qui ne ſe démentent jamais.

Les Soutangentes comprises dans le cours de quelque revolution se tirent de la Formule generale avec la même facilité que celles qui terminent une revolution quelconque, seulement elles ne sont pas exprimées par les nombres de ces progressions que nous venons de marquer, mais par des nombres moyens. Les Soutangentes trouvées rien n'est plus facile que de déterminer en general leur rapport aux circonferences de leurs cercles circonscrits, ou à celle du seul cercle de révolution.

Il en va de même des espaces de toutes les Spirales paraboliques, comparés à leurs cercles circonscrits, soit qu'on les prenne par revolutions completes ou incompletes. M. Varignon les donne tous à la fois, & ce qu'on a rapporté ci-dessus des espaces de la Spirale d'Archimede, est presque étouffé & anéanti dans cette multitude.

La Theorie des déroulements n'est pas moins generale. Toute Spirale parabolique se déroule en une Parabole plus élevée d'un degré que sa generatrice. Ainsi la Spirale d'Archimede déroulée devient la Parabole commune. De là il suit fort naturellement qu'une Spirale Parabolique déroulée contient un espace parabolique double de l'espace spiral qu'elle contenoit.

La Spirale parabolique déroulée est de la même longueur dont elle étoit auparavant ; & par consequent elle n'est rectifiable que quand la Parabole en laquelle elle se change l'est aussi, car il n'y a que certaines especes de Paraboles qui soient rectifiables. La Parabole commune ne l'étant pas, la Spirale d'Archimede ne l'est pas non plus.

Si au lieu de prendre la Parabole en general pour generatrice d'une Spirale, on prend de même en general l'Hyperbole entre ses Asymptotes, tout le reste demeurant le même, les changements qu'il faut faire dans la formule des Spirales à l'infini, sont bien-tôt faits, & la Spirale hyperbolique generale paroît avec toutes ses proprietés envelopées dans son Equation, d'où le calcul

algebrique les dévelope facilement.

L'origine de la Spirale hyperbolique est à une distance infinie du centre de son cercle de revolution, au lieu que l'origine de la Spirale parabolique est à ce même centre. La Spirale hyperbolique, quoiqu'elle parte d'un point infiniment éloigné de ce cercle, y arrive cependant après une seule revolution, & quand elle en a coupé la circonference, quoique de là au centre il n'y ait qu'une distance finie, elle n'y peut arriver qu'après une infinité de revolutions, ou, ce qui est la même chose, elle n'y peut arriver.

Cet exemple peut suffire pour faire imaginer les varietés dont les Spirales sont susceptibles selon les differentes Courbes qui les produisent. Une Courbe fort simple peut produire une Spirale assés bisarre. Ainsi celle qui resulte du Cercle pris pour Courbe generatrice a un point de rebroussement tel que ses deux concavités sont tournées du même côté, ce qui est l'espece la moins ordinaire de rebroussement. Après cela, on ne sera pas surpris de trouver des Spirales avec des points d'inflexion. On en verra même qui ont des contours plus singuliers qu'aucune Courbe que l'on ait examinée jusqu'à present.

Les Methodes dont M. Varignon s'est servi pour trouver les Soutangentes, les longueurs, les espaces, les déroulements &c, des Spirales paraboliques, se peuvent aisément appliquer à toutes les autres especes de Spirales. Il donne même des exemples de la maniere dont il faudroit considerer des Spirales produites par des Courbes, qui seroient autrement posées à l'égard du centre du cercle de revolution qu'on ne l'a supposé jusqu'ici.

Il ne nous resteroit plus rien à dire pour donner une idée de la Theorie de M. Varignon sur les Spirales, si ce n'étoit une Spirale assés fameuse chés les nouveaux Geometres pour meriter d'être traitée en particulier, & qui le merite d'autant plus qu'elle a servi de modele à M. Varignon pour en former d'autres de son

espece qui n'étoit point encore connuë.

La Courbe qu'on appelle *Logarithmique* est telle que si l'on prend ses Abscisses en progression arithmetique, ses Ordonnées seront en progression geometrique, & de là vient son nom. Si ses Ordonnées sont croissantes vers une extremité de l'axe, elles sont necessairement décroissantes vers l'autre, & comme elles sont en progression geometrique, elles ne peuvent jamais décroître jusqu'à zero, c'est-à-dire que la Courbe Logarithmique ne peut jamais venir à rencontrer son axe, quoiqu'elle s'en approche toûjours, & que par consequent cet axe est son Asimptote.

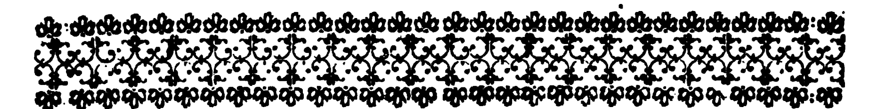
Il y a long-temps que sur l'idée de la Logarithmique on a imaginé une Spirale, qu'on a appellée *Spirale Logarithmique*, parce qu'elle est Logarithmique aussi, car si sur son cercle de revolution on prend les arcs en progression arithmetique, les rayons de cette Spirale seront en progression geometrique.

Pour la former, M. Varignon pose la Logarithmique, de maniere que son Asimptote soit perpendiculaire au rayon, où commencent & se terminent les revolutions completes. Mais s'étant avisé de donner à la Logarithmique une position qui fist un effet contraire, il a vû naître une autre Spirale, & qui étoit Logarithmique aussi, puisque ses Ordonnées étant prises en progression arithmetique décroissante, les arcs de revolution en suivoient une geometrique croissante. Cette nouvelle Spirale Logarithmique, qui a l'Asimptote de la Logarithmique pour le commencement & la fin de ses revolutions completes, a aussi l'extremité de cette Asimptote pour son origine, & par consequent commence à une distance infinie de son cercle de revolution, ainsi que la Spirale hiperbolique, au lieu que l'ancienne Spirale Logarithmique ne commence qu'à une distance finie de son cercle. La nouvelle arrive au centre, & l'ancienne n'y peut arriver.

Les deux Spirales Logarithmiques épuisent toutes les combinaisons qu'on peut faire de la progression arithmetique.

tique & de la geometrique entre les Ordonnées ou rayons, & les arcs de revolution, & ce sont les seules Spirales que la Logarithmique puisse produire. Mais si l'on vouloit que les arcs d'une Spirale quelconque pussent suivre la progression soit arithmetique soit geometrique, tandis que les Ordonnées ou les arcs de revolution suivroient celle que les arcs de la Spirale ne suivroient point, il resulteroit de ces deux progressions differemment distribuées à trois grandeurs six combinaisons, & par consequent six Spirales Logarithmiques possibles, puisque ce qui fait qu'une Spirale est Logarithmique, c'est que quelques-unes des grandeurs qui la composent suivent l'une des deux progressions, tandis que les autres grandeurs suivent l'autre. C'est là la reflexion qui a conduit M. Varignon à découvrir cinq nouvelles Spirales Logarithmiques. Nous avons déja vû la formation de la premiere des cinq, qui appartient, ainsi que l'ancienne, à la Logarithmique. Quant aux quatre autres nouvelles, M. Varignon a trouvé les differentes Courbes dont elles devroient naître, & il a donné leur formation & leurs proprietés, toûjours par sa methode generale.

Une Spirale quelconque étant donnée, on peut aisément retrouver sa generatrice. Or toute Courbe dont les Ordonnées concourent en un ponit, peut être considerée comme une Spirale, & par consequent on peut supposer qu'elle a une generatrice, & la trouver. S'il est donc question de décrire une Courbe quelconque dont les Ordonnées soient concourantes en un point, on peut la traiter de Spirale, remonter à sa generatrice, & par le moyen de cette génératrice la décrire, selon la methode de M. Varignon. On peut donner à sa Theorie cet usage, si l'on ne veut pas qu'elle demeure simple Theorie.



ASTRONOMIE.

SUR DEUX ECLIPSES DE LUNE.

V. les M. pag. 6. 14. 197. 199.

UNe Eclipse de Lune du 23 Decembre 1703, dont on ne parla dans l'Academie qu'en 1704, ne put être observée à Paris à cause des nuages dont le Ciel fut couvert. On en a pû voir le détail dans la *Connoissance des Temps* de 1703, tel qu'il avoit été predit par le calcul astronomique.

Mais l'Academie reçut les observations qui en avoient été faites à Dunquerque par M. de Chazelles, à Montpellier par Mrs de Plantade & Clapiers, à Arles par M. Davisard, à Avignon par le P. Bonfa Jesuite, & à Marseille par le P. Laval Jesuite, Professeur en Hidrographie.

Il y eut dans ces differentes observations des particularités remarquables. L'Eclipse arriva le matin, elle devoit commencer à Paris à $4^h\ 40'$, la Lune devoit se coucher éclipsée. A Montpellier on la vit, après l'immersion totale, vers les 6 heures, si sombre & si obscure qu'on avoit beaucoup de peine à y distinguer les taches, qui d'ordinaire sont aisées à reconnoître, quoique la Lune soit plongée dans l'ombre. Quelque temps après elle commença à rougir vers sa circonference, & circulairement, le milieu du disque demeurant plus obscur, & vers les 6 heures $\frac{1}{4}$ ce milieu obscur, & l'anneau rougeâtre qui l'envelopoit partageoient assés également le diametre du disque. Mais ce qui fut fort extraordinai-

re, c'est qua 6 heures $\frac{1}{2}$ la Lune disparut dans le ciel, quoiqu'il fut très-ferain, & très-net, qu'elle ne dût se coucher qu'à plus d'une heure de là, & que le crepuscule ne fut point encore assés fort pour l'effacer, puisqu'il laissoit voir des Etoiles, même du côté de l'Orient.

A Arles, la Lune parut toûjours d'un rouge obscur & brun, après l'immersion totale, & au contraire, d'un rouge fort clair à Avignon & si clair qu'on l'eût crûë transparente, & éclairée du Soleil par derriere. A Marseille, la Lune fut rougeâtre dans sa partie qui étoit au Nord-ouest, & fort obscure dans la partie opposée. Elle disparut aussi vers les 7 heures, le ciel étant fort net.

Une autre Eclipse de Lune du 17 Juin 1704 au soir, dont on n'auroit pû voir à Paris que la fin, qui n'y fut pas vûë à cause des nuages, fut observée de quelques autres endroits, dont on eut des relations, & fut rémarquable principalement par une très-forte penombre qui parut à Montpellier à M[rs] Bon, de Plantade, & de Clapiers.

On peut reduire à quelques causes generales les differents degrés d'ombre & de penombre, & les differentes couleurs qui paroissent dans les Eclipses de Lune. Il faut se souvenir d'abord de ce que c'est que la penombre expliquée dans l'Hist. de 1702*. Elle n'a été alors considerée que comme formée par le globe seul de la Terre, & l'on a fait voir que la Lune pouvoit ne tomber que dans cette penombre, qui est un espace privé seulement des rayons d'une partie du Soleil, & non pas dans l'ombre qui est un espace où il n'entre absolument aucuns rayons. Par la formation de la penombre, il est visible qu'elle doit avoir differens degrés de clarté ou d'obscurité, selon qu'elle s'éloigne ou s'approche davantage de l'ombre. Mais si outre le globe de la terre, on considere aussi l'Atmosphere dont il est environné, il est certain qu'il s'y doit rompre des rayons, qui en vertu de cette refraction se rapprochant de la perpendicu-

* p. 73. & 74.

laire, & se rabatant par consequent vers l'axe de l'ombre de la terre, pourront aller se mêler dans la penombre, & la rendre plus claire qu'elle n'etoit naturellement, & peut-être iront-ils jusque dans l'ombre, qui en deviendra necessairement moins obscure. Cela dépend de la grandeur de la refraction, c'est à-dire de la densité de la matiere qui l'aura causée. Cette matiere peut varier dans l'Atmosphere, & par consequent l'ombre & la penombre prises à la même distance du globe de la terre pourront en differens temps, & peut-être pendant la durée d'une même Eclipse, avoir differens degrés de clarté ou d'obscurité.

Mrs les Astronomes de Montpellier ont eu sur cela, à l'occasion de cette forte penombre de l'Eclipse du 17 Juin, une pensée assés nouvelle, & qui merite d'être suivie. Il ont cherché quelles étoient les parties de la surface de la terre comprises pendant cette Eclipse, tant dans l'Hemisphere éclairé, que dans l'Hemisphere obscur, car si l'on peut juger que l'air de l'Hemisphere éclairé soit plus épais que celui de l'Hemisphere obscur, les rayons qui passeront par refraction de l'Hemiphere éclairé dans l'obscur, souffriront une moindre refraction, & étant moins rabatus vers l'axe de l'ombre de la terre, ne tomberont point dans le penombre, & au contraire. Ces Astronomes ont trouvé que la mer du Sud qui est très-vaste, étoit dans l'Hemisphere éclairé, & tout le grand Continent de l'Europe, de l'Asie, & de l'Afrique dans l'Hemisphere obscur, de sorte que les rayons rompus qui passoient de dessus la mer du Sud, & d'un air chargé de vapeurs, dans un air plus leger & sur des terres, ne doivent souffrir qu'une foible refraction, & c'est ce qui rendit si obscure la penombre de cette Eclipse. Pour pousser cette recherche à sa derniere précision, il faut voir de plus quelle est la partie de la terre qui couvre de son ombre la partie Eclipsée de la Lune, & comparer cet endroit de la terre à ceux d'où il y peut venir des rayons rompus, ou plûtôt, les differentes den-

sités d'air. Si l'on peut s'assûrer qu'il y ait dans ces densités quelque chose d'égale & d'uniforme, & que l'air d'une grande mer soit toûjours plus épais que celui d'un Continent, ce qui paroît assés vraisemblable, on pourra faire par avance quelques conjectures sur le plus ou le moins d'obscurité de la penombre ou de l'ombre des Eclipses de Lune, & joindre ces prédictions phisiques à celles qui sont purement astronomiques. Ce seroit un nouveau degré de connoissance qu'on auroit acquis, quoique l'on n'eût guere dû l'esperer.

Quand la Lune vûë en même temps de differens endroits paroît avoir differens degrés d'obscurité, ou même differentes couleurs, ainsi qu'il est arrivé dans l'Eclipse du 23 Decembre 1703. observée à Arles & à Avignon, cela ne se peut plus rapporter qu'aux differentes vapeurs particuliers de chaque lieu, & à leur differente quantité. Ce sont des especes de verres inégalement épais & diversement teints, au travers desquels le même objet est vû. Quoique le ciel paroisse fort net, ces vapeurs ne laissent par d'y être répanduës. Dans l'Eclipse du 23 Decembre, une foible penombre devoit couvrir la Lune, l'air devoit être à Arles fort chargé de ces vapeurs invisibles, & au contraire fort pur à Avignon.

On ne peut guere attribuer qu'à ces mêmes vapeurs, que la Lune Eclipsée disparoisse dans le ciel, sans qu'il y ait d'ailleurs nul accident nouveau. Je suppose que la Lune a pris dans son Eclipse une certaine couleur peu differente de celle du ciel tel qu'il est alors, c'est-à-dire du fond sur lequel on la voit. Si les vapeurs interposées deviennent telles qu'elles rendent la couleur de la Lune entierement semblable à celle du fond, la Planete doit disparoître à nos yeux, & il est clair selon cette idée que ce phenomene surprenant ne doit être possible que dans les Eclipses, parce qu'en tout temps la couleur de la Lune est trop differente de celle du fond qui la porte.

Nous ne contons dans tout ceci que sur l'Atmosphere de la Terre, & sur les vapeurs qui y sont inégalement

répanduës. Il est vrai que la Lune ne paroît pas avoir d'Atmosphere grossiere & sensible, mais peut-être a-t-elle des vapeurs déliées, qui étant invisibles pendant qu'elle est lumineuse, contribuent à lui donner une couleur & une teinture, pendant qu'elle est dans l'obscurité. Quoi qu'il en soit, on peut croire que les Philosophes après avoir découvert, presque contre toute apparence de succés, tout ce qu'il y a de geometrique dans les Eclipses, viendront aussi à découvrir les causes des accidens phisiques qui s'y mêlent, mais ce qui est phisique doit naturellement se manifester le dernier, parce qu'il est plus compliqué, & plus variable.

SUR LE MOUVEMENT D'UN ASTRE EN ASCENSION DROITE COMPARE' A SON MOUVEMENT EN LONGITUDE.

V. les M. p. 134.

QUand un Astre parti du premier degré d'Aries est arrivé au premier degré du Cancer, il a fait par son mouvement en ascension droite le quart de l'Equateur, & par son mouvement en longitude le quart de l'Ecliptique, & la distance où il se trouve de l'intersection, ou, si l'on veut, de l'origine de ces deux grands Cercles est également de 90 degrés par rapport à l'un & à l'autre. Mais de ce que le quart de l'Ecliptique répond précisément au quart de l'Equateur, il ne s'ensuit pas que chaque autre partie égale de l'Ecliptique réponde à une partie égale de l'Equateur, & chaque degré de l'un à chaque degré de l'autre; l'obliquité de l'Ecliptique par rapport à l'Equateur ne le permet pas, & l'Astre qui arrivé au premier degré de Cancer a parcouru deux parties égales sur l'un & l'autre cercle, y avoit pendant tout son cours précedent, ou plûtôt pendant chaque instant de ce cours parcouru des parties inégales. Ayant fait un degré par rapport à l'Equateur, il avoit

fait plus d'un degré sur l'Ecliptique, ou réciproquement. Mais puisque par un cours qui étant comparé à l'un & à l'autre cercle est inégal, il a fait à la fin sur l'un & sur l'autre un espace égale, il faut absolument qu'un degré de l'Ecliptiqne ait été tantôt plus grand, tantôt plus petit qu'un degré de l'Equateur, & comme il est constant que cette variation à été continuë & reglée, un degré de l'Ecliptique n'a pû, après avoir été plus grand qu'un degré de l'Equatenr, devenir plus petit, sans passer par lui être égal. M. Parent appelle mouvement *mediocre* d'un Astre celui qu'il a lorsque ces deux differens degrés sont égaux, & il cherche à quel point de l'Ecliptique entre le premier degré d'Aries, & le premier degré de Cancer, doit être ce mouvement mediocre.

Pour rapporter les degrés de l'Ecliptique à ceux de l'Equateur il faut concevoir l'Equateur divisé de degré en degré par des Meridiens, qui coupent ensuite l'Ecliptique. Par là, chaque partie égale de l'Equateur a une partie de l'Ecliptique qui lui répond comprise entre les mêmes Meridiens, mais ces parties de l'Ecliptique sont toûjours inégales, parce que l'espace qui est entre deux Meridiens diminuant & se serrant toûjours à mesure qu'ils approchent du Pole où ils doivent concourir, la portion de l'Ecliptique qu'ils comprennent est d'autant plus petite qu'elle est plus éloignée de l'Equateur. Ainsi les deux Meridiens qui comprennent le premier degré de l'Equàteur comprennent plus d'un dégré de l'Ecliptique, ensuite une moindre portion de l'Ecliptique, mais toûjours plus grande qu'un degré de l'Equateur, jusqu'à ce qu'elle lui soit égale, après quoi elle est toûjours plus petite que ce degré, & enfin la plus petite qu'elle puisse être lorsqu'elle répond au 9e degré de l'Equateur.

Il faut donc considerer le point du mouvement mediocre comme partageant en deux le quart de l'Ecliptique. Du côté d'Aries sont les parties de l'Ecliptique plus grandes chacune qu'un degré de l'Equateur, du

côté de Cancer celles qui sont plus petites. Le point du mouvement mediocre sera au 45e degré de l'Ecliptique, si les 45 degrés de l'Ecliptique qui sont vers Aries pris ensemble, l'emportent autant en grandeur sur 45 degrés de l'Equateur, que les 45 degrés vers Cancer leur cedent, mais si cela n'est pas ainsi, ce point s'approchera d'Aries, en cas que pour faire la compensation il faille un plus grand nombre de parties vers Cancer, où, ce qui revient au même, si les parties de l'Ecliptique vers Aries l'emportent plus en grandeur sur les degrés de l'Equateur, que des parties prises à même distance de Cancer ne leur cedent, & si l'on suppose le contraire, le point du mediocre mouvement s'éloignera d'Aries. Or moins l'Ecliptique sera supposée oblique, moins ses parties vers Aries l'emporteront sur les degrés de l'Equateur, & moins les parties vers Cancer leur cederont, & au contraire ; de sorte qu'il est visible que c'est l'obliquité de l'Ecliptique qui doit seule regler la position ou la place du point du mediocre mouvement dans le quart de l'Ecliptique.

M. Parent trouve par une équation algebrique que ces trois grandeurs sont continuëment proportionnelles, le Rayon de la Sphere, la Tangente de l'arc qui est la distance de Cancer au point du mouvement mediocre, & le Sinus du complément de l'obliquité de l'Ecliptique. De là il suit évidemment que moins l'Ecliptique est oblique, plus le point du mouvement mediocre est éloigné de Cancer, ou proche d'Aries.

Mais l'obliquité de l'Ecliptique étant réellement constante, & déterminée de 23° 29′, on trouve aussi-tôt par la Formule de M. Parent que le point du mouvement mediocre est au 46° 14′ de l'Ecliptique, au lieu qu'il est placé dans plusieurs Tables astronomiques vers les 44 ou 45°. Cela vient de ce que les Tables ne l'ont pas déterminé par une Formule algebrique, comme a fait M. Parent, mais par des calculs où il entre un peu de tâtonnement, & qui assés souvent ne sont que des approximations

mations Les Formules d'Algebre, quand on les peut employer, frapent droit au but.

SUR LES PLANETES EN GENERAL, ET SUR SATURNE EN PARTICULIER.

ON ne sçauroit mieux ni relever la gloire de l'Astronomie, ni excuser ce qui lui reste d'imperfection, qu'en montrant, comme a fait M. Maraldi, toutes les difficultés qu'elle a euës à combatre, & qu'elle a presque entierement surmontées. V. les M. p. 306.

Toutes les Planetes *principales*, car il ne s'agit point ici de celles qui ne sont que des Lunes ou des Satellites, tournent autour du Soleil, quelle que soit la ligne qu'elles décrivent autour de cet Astre, & leur mouvement s'y rapporte uniquement. Il faudroit donc pour observer & pour calculer le cours des Planetes le plus commodément & le plus avantageusement qu'il fut possible, qu'il y eut des Astronomes placés dans le Soleil. Supposons qu'il y en ait effectivement.

Ils s'appercevroient d'abord que nulle Planete ne seroit dans tout son cours également éloignée du Soleil, & qu'il n'y en auroit aucune qui n'eût son *Aphelie* & son *Perihelie*, c'est-à-dire deux points diametralement opposés, dont l'un marqueroit le plus grand éloignement, l'autre le moindre, & entre lesquels seroient de part & d'autre ceux des *moyennes distances*.

Quand le mouvement des Planetes seroit égal & uniforme en lui-même, il paroîtroit inégal, parce que leur distance à l'égard du Soleil seroit toûjours inégale d'un moment à l'autre. On les verroit aller plus lentement vers leur Aphelie, & plus vîte vers le Perihelie. Or on

ne ſçauroit calculer le mouvement des Planetes qu'en le ſuppoſant toûjours égal, & par conſequent *moyen* entre la plus grande vîteſſe & la plus grande lenteur, ſauf à reduire enſuite ce mouvement moyen & faux, au *vrai* & *apparent* par des Tables qui marquent combien à chaque point de l'Orbe de la Planete, il faut ajoûter à ſon mouvement moyen ou en retrancher. C'eſt ce qu'on appelle *Equation additive* & *ſouſtractive*. Il eſt clair que la conſtruction de ces Tables dépend d'une détermination préciſe de l'Aphelie & du Perihelie. Mais ce ne ſont pas deux points viſibles dans le cours d'une Planete, & on ne les peut avoir que par une aſſés longue ſuite d'obſervations comparées les unes aux autres. Si par l'erreur des obſervations ou par celle des comparaiſons que l'on en fait, on ſe trompe d'un degré, par exemple, ſur la poſition de l'Aphelie, il y aura un degré dans l'Orbe de la Planete, où la Table donnera le moyen mouvement plus grand que le vrai, quoiqu'il ſoit réellement plus petit, & un autre degré où le contraire arrivera, & ſur tous les autres degrés ou points de l'Orbe ſans exception, l'équation ſera plus grande ou plus petite qu'elle n'eût été, ſi l'Aphelie & le Perihelie euſſent été bien poſés.

Leur poſition ne détermine que les degrés de l'Orbe où l'équation doit être additive ou ſouſtractive, & plus ou moins additive ou ſouſtractive, en un mot, la diſtribution de l'équation dans l'Orbe, mais la grandeur totale de cette équation dépend de la grandeur de *l'excentricité* de l'Orbe au Soleil conſideré comme centre. Cette excentricité n'eſt point un objet viſible, non plus que l'Aphelie & le Perihelie, il la faut conclure avec peine d'un grand nombre d'obſervations, & pour peu qu'on ſe trompe ſur ſa grandeur, toute l'équation ſera neceſſairement fauſſe en toutes ſes parties. De plus pour la diſtribuer dans l'Orbe, il faut ſçavoir quelle eſt la Courbe de l'Excentrique, car une Ellipſe, par exemple, ſe partagera en parties égales autrement qu'un Cercle, &

une certaine Ellipse autrement qu'une autre ; or pour déterminer la Courbe d'une Orbe par les observations seules, il en faudroit un nombre presque infini, & l'on ne peut guere se passer de faire une hipothese qui concilie le plus grand nombre d'observations qu'il sera possible, mais qui sera toûjours incertaine en elle-même.

Les Planetes se meuvent toutes dans des plans differens, quoiqu'à la verité peu inclinés les uns aux autres, mais d'autant plus difficiles à distinguer. Les Astronomes placés dans le Soleil seroient obligez à en choisir arbitrairement quelqu'un par rapport auquel ils mesureroient l'inclinaison des autres, je suppose qu'ils choisissent le plan qui passe par le centre du Soleil & de la Terre, & que nous appellons le plan de l'Ecliptique. Une Planete, par exemple, Jupiter ne pourroit être parfaitement en conjonction ou en opposition avec la Terre à moins que d'être dans le même plan, c'est-à-dire, puisque les plans de l'Orbe de Jupiter & de celui de la Terre sont differents, mais inclinés, à moins que d'être dans l'un des deux points ou *Nœuds* diametralement opposés, qui font l'intersection des Orbes de Jupiter & de la Terre. Plus l'angle que feroit l'Orbe de Jupiter avec celui de la Terre, ou avec le plan de l'Ecliptique seroit grand, plus Jupiter hors de ses nœuds seroit éloigné d'être en conjonction ou en opposition parfaite ou centrale avec la Terre. On voit donc que le calcul des conjonctions & des oppositions des Planetes demanderoit la connoissance précise des inclinaisons de leurs Orbes au plan de l'Ecliptique, & de la position de leurs nœuds, mais cette recherche n'est pas facile. Un nœud ne se voit point ; il faut faire plusieurs observations de la Planete aux environs du nœud, avant qu'elle y passe, & après qu'elle y a passé, & par ses differentes distances de l'Ecliptique de côté & d'autre, juger à quel point sa distance a été nulle, ce qui est la même chose que déterminer son nœud. Mais parce que les Orbes sont peu inclinés, une Planete s'approche ou s'éloigne beaucoup

de ſon nœud, ou s'avance beaucoup en *longitude* ſans s'approcher ou s'éloigner beaucoup du plan de l'Ecliptique, ou ſans diminuer ou augmenter beaucoup ſa *latitude*, & par conſequent ſon mouvement par rapport au plan de l'Ecliptique, ou en latitude étant inſenſible dans une aſſés grande étenduë, la poſition du nœud eſt incertaine & douteuſe dans une étenduë égale.

Il y a encore plus. Ni l'Aphelie & le Perihelie, ni les Nœuds ne ſont des points fixes dans les Orbes des Planetes, ils changent continuellement, mais avec une lenteur qui rend leur variation beaucoup plus difficile à déterminer.

Toutes ces difficultés étant applanies, autant qu'il eſt poſſible à l'Art, quand on veut faire des Tables aſtronomiques pour une Planete, & donner les principes de calcul ou *Elements* qui doivent ſervir à trouver à l'avenir ſon vrai lieu dans le Ciel pour tel moment qu'on voudra, il faut lui fixer une *Epoque*, c'eſt-à-dire un moment pour lequel ce vrai lieu ſoit bien connu, & d'où l'on contera tout le reſte. Si cette Epoque eſt fauſſe, tout s'en reſſent, & toutes les difficultes que nous avons rapportées concourent à en rendre la determination fort ſenſible, & peu ſûre.

Juſqu'ici nous avons ſuppoſé des Aſtronomes placés dans le Soleil, au centre de tous les mouvements; mais que ſera-ce quand ils ſeront placés ſur la Terre, qui voit comme inégal & irregulier tout ce qui auroit été vû égal & regulier de dedans le Soleil, & qui par ſa ſituation ajoûte à tout ce qui ſeroit inégal & irregulier en ſoi-même une fauſſe inégalité & une fauſſe irregularité fort difficile à démêler d'avec la vraie?

En fait de Planetes, ce qui ſe rapporte au Soleil, & n'eſt pas vû de dedans le Soleil, ne peut être que faux, & demande à être rectifié. Le veritable angle d'inclinaiſon des Orbes des Planetes ſur le plan de l'Ecliptique, eſt celui qui ſeroit vû du Soleil, & non cet angle plus ou moins grand qui eſt vû de la Terre. La poſition des

nœuds d'une Planete dans le Zodiaque n'eſt point celle qui eſt vûë de la Terre, à moins que la ligne tirée du centre du Soleil par laquelle ils ſont déterminés ne paſſe auſſi par le centre de la Terre, ce qui eſt une rencontre fort rare. Enfin de la Terre au Soleil il y a toûjours une *parallaxe* ou difference optique, dont il faut tenir conte dans les déterminations tirées de nos obſervations. C'eſt un travail dont nôtre ſituation nous impoſe le neceſſité, & qui rend tous les calculs aſtronomiques plus compliqués & par conſequent plus ſujets à erreur.

La grandeur de cette parallaxe dépend de la diſtance de la Terre, & de celle de la Planete du Soleil, ou, ce qui revient au même, du rapport de ces deux diſtances. Il eſt évident que ſi la diſtance de la Terre au Soleil par rapport à celle de la Planete obſervée au Soleil étoit aſſes petite pour ne devoir pas être contée, ou du moins pour pouvoir être negligée ſans une erreur ſenſible, la parallaxe ceſſeroit, & par conſequent elle eſt d'autant plus grande que la diſtance de la Terre au Soleil eſt plus grande par rapport à celle de la Planete au Soleil. Mais les meſures de ces ſortes de diſtances, qui paroiſſent au commun des hommes des entrepriſes impraticables, ſont du moins très-penibles pour les plus habiles Aſtronomes, & ne peuvent être d'une grande ſûreté.

Les Orbes des Planetes ne ſe rapportent qu'au Soleil, on ne peut pas dire proprement qu'ils ſoient excentriques à la Terre, à laquelle ils ne ſe rapportent point. Les uns envelopent l'Orbe de la Terre, les autres en ſont envelopés, & par cette diſpoſition les Planetes étant dans leur plus grande proximité de la Terre, ou dans leur *Perigée* en ſont très-proches par rapport à la grande diſtance où elles en ſont dans leur *Apogée*. Mais & cet Apogée & ce Perigée ne ſont que des rencontres, pour ainſi dire, fortuites, qui naiſſent de la combinaiſon du mouvement des Planetes & de celui de la Terre ou du Soleil, il n'y a que l'Aphelie & le Perihelie qui

soient des points déterminés par eux-mêmes, le Perigée d'une Planete peut arriver dans son Aphelie, & son Apogée dans le Perihelie; & comme ce sont l'Aphelie & le Perihelie seuls qui ont un mouvement par lequel se regle la distribution de l'excentricité ou de l'équation dans l'Orbe; il faut les démêler d'avec l'Apogée & le Perigée, ce qui est d'autant plus mal-aisé que les uns nous sont visibles, & les autres invisibles. De même, l'excentricité des Planetes au Soleil est celle dont nous avons besoin, mais nous ne les voyons pas, & il faut la conclure avec beaucoup de peine de leurs inégales distances à la Terre. On appellé *premiere inégalité* des Planetes celle qui vient de leur excentricité au Soleil, & qui est réellement dans leur cours par rapport à cet Astre, & *seconde inégalité* celle qui vient de ce qu'elles sont vûës de la Terre, & non du Soleil.

A rassembler toutes les déterminations que nous avons rapportées, necessaires au calcul des Planetes, le nombre en est si grand, & souvent elles sont si delicates & si subtiles, ou demandent des observations faites en des circonstances si rares, que M. Maraldi ne croit pas que les observations seules puissent aisément suffire, & que l'on ne soit pas reduit à emprunter le secours de quelques hipotheses, c'est-à-dire, à supposer pour Orbe d'une Planete quelque ligne Courbe, dont la nature particuliere donnera la mesure de ses differens arcs, quand on en aura quelques-uns par observation. Quoiqu'il en soit, les difficultés de l'Astronomie sont assés bien prouvées, ne fût-ce que par la difference qui se trouve assés souvent entre le Ciel & les Tables des plus grands Astronomes.

M. Maraldi en donne pour exemple les Tables de Kepler sur Saturne. Des observations de cette Planete faites à l'Observatoire depuis plus de 33 ou 34 ans, ont fait voir que Saturne étoit moins avancé dans le Zodiaque tantôt de 20 à 21 Minutes, tantôt de 10 à 12, que ne le donnoient les Tables de Kepler, fondées sur les

observations de Tycho Brahé. Cette difference d'un tiers ou d'une sixiéme partie de degré n'auroit pas été contée autrefois, & paroît maintenant fort considerable. M. Maraldi s'est donné beaucoup de peine pour en découvrir la source. Kepler pouvoit s'être mépris ou dans l'Epoque d'où il avoit commencé ses Tables de Saturne, ou dans la plus grande équation qu'il lui avoit donnée. Si l'erreur étoit dans l'Epoque, Saturne avoit donc été d'abord posé par Kepler plus avancé dans le Zodiaque d'une certaine quantité qu'il ne l'étoit réellement, & cette quantité devoit être toûjours la même, or par les observations elle varioit. Si l'erreur étoit dans la plus grande Equation, on devoit trop ajoûter au mouvement moyen de Saturne dans une moitié de son Orbe & par consequent le trouver trop avancé, mais aussi dans l'autre moitié de l'Orbe on devoit ôter trop, & le trouver trop peû avancé, or il l'étoit toûjours trop, mais inégalement. De là M. Maraldi tira cette consequence assés subtile que l'erreur appartenoit & à l'Epoque puisque Saturne étoit toûjours trop avancé selon Kepler, & à la plus grande Equation, puisqu'il l'étoit inégalement. Il corrigea l'une & l'autre selon qu'il étoit necessaire pour les concilier avec les observations.

Il se pouvoit aussi que Kepler se fût trompé dans le mouvement moyen en le faisant trop grand, mais après beaucoup de raisonnements & de calculs, on trouva que l'erreur, du moins pour la plus grande partie, devoit venir de l'Equation & de l'Epoque.

M. Maraldi a examiné de la même maniere l'Aphelie, les Nœuds, & la plus grande Latitude de Saturne ou l'inclinaison de son Orbe, déterminés par Kepler, il les a corrigés lorsqu'il a été necessaire pour accorder un grand nombre d'observations, & il faut dire à la gloire des Tables de M Boüillaud sur Saturne, que souvent ces corrections se sont trouvées conformes à ces Tables.

On pourra juger par le travail de M. Maraldi sur

Saturne ce que coûte la détermination des mouvemens d'une Planete, quel amas d'observations anciennes & modernes il faut avoit devant soi, avec quel art il faut les comparer, combien de differentes methodes il faut avoir en main, & combien de reflexions, quelquefois fort fines, & fort délicates, sont necessaires pour se conduire dans un pareil labirinthe.

SUR LE CALENDRIER.

V. les M. p. 146.

LA revolution apparente du Soleil autour de la terre a été divisée arbitrairement en 24 parties qui sont les Heures, premier fondement de toute la mesure du temps. L'usage civil ne connoît que les Heures, ou plûtôt des multiples d'Heures, comme des Jours, des Années, mais ni le mouvement annuel du Soleil, ni celui des autres corps celestes, ne peuvent être mesurés exactement & sans reste par des Heures ni par leurs multiples; celui du Soleil, par exemple, est de 365 jours, 5 Heures, 49′ à peu près, celui de la Lune est de 26 jours, 12 Heures, 44′, & de là vient que pour absorber ces fractions dans des nombres entiers, & même dans des nombres qui n'expriment que des jours ou des années, il faut imaginer des Cycles qui embrassant plusieurs revolutions d'un même Astre le remettent après un certain nombre d'années aux mêmes points du Ciel d'où il étoit parti d'abord, ou, ce qui est la même chose, aux mêmes temps du Calendrier établie pour l'usage civil.

Tel a été le fameux Cycle de 19 années, inventé autrefois pour remettre les Nouvelles Lunes aux mêmes jours, de sorte que le cours de la Lune comparé à celui du Soleil se doit toûjous retrouver le même dans chaque periode de 19 années. Mais ce Cycle qui remet les Nouvelles Lunes aux mêmes jours ne les remet pas

aux

aux mêmes heures, il s'en faut à peu près une heure & demie, les heures s'accumulent, & deviennent des jours, & enfin en 625 ans les nouvelles Lunes arrivent deux jours entiers plûtôt qu'elles ne devroient arriver par le Cycle.

Cette difference entre le Ciel & le Cycle de 19 ans a été inconnuë à l'antiquité, & l'erreur qu'elle avoit produite dans le Calendrier depuis le quatriéme Siecle de l'Eglise, qui fut celui du Concile de Nicée, jusqu'au seiziéme, fut une des causes de la Reforme du Calendrier par le Pape Gregoire XIII, ainsi qu'on l'a vû dans l'Hist. de 1701.* * p. 107. & suiv.

Ceux qui travaillerent à cette Reforme sous les ordres du Pape, découvrirent l'équation de 2 jours, necessaire au bout de 625 ans, pour remettre le Cycle de 19 ans parfaitement d'accord avec le Ciel. Cette équation est heureuse en ce qu'elle est de 2 jours entiers sans aucune fraction ni d'heures, ni de minutes, car s'il y en avoit eu quelqu'une, il auroit fallu une autre équation plus grande que celle de 2 jours pour un nombre d'années beaucoup plus grand que 625, & d'autant plus grand que la fraction eût été plus petite, ce qui auroit été incommode, & peut-être même la fraction eût été telle, qu'il eût été impossible d'en composer des jours qui n'eussent eu encore quelque fraction. Cette équation de 2 jours précis pour 625 ans, partagée proportionnellement à une periode de 125 ans est de 9 heures 36′ precises, & partagée de même à une periode de 25 ans, elle est d'1 heure 55′ 12″ sans tierces; or on sçait de quelle commodité il est dans le calcul & dans la pratique d'avoir peu de fractions.

Il y a plus; cette équation si heureuse & si facile est en même temps très-juste, & M. Cassini prouve qu'elle donne les mouvements ou les lieux de la Lune avec la même exactitude que les meilleures Tables. A peine eût-on osé esperer qu'un Cycle, destiné seulement pour l'usage Civil ou Ecclesiastique, & auquel on ne demande

pas une rigoureuse précision, pût en avoir autant que les Tables Astronomiques, qui sont faites pour suivre pas à pas les mouvemens celestes, & pour n'en laisser rien échaper.

M. Cassini fait voir en comparant ensemble les Tables les plus celebres que nous ayons pour la Lune, que l'équation Gregorienne tient le milieu entre elles, & que par consequent elle n'a pas seulement toute la perfection qu'on peut desirer par rapport à l'usage Ecclesiastique, mais encore, que dans l'usage Astronomique, si exact & si scrupuleux, elle peut & doit être preferée aux Tables même, puisqu'elles ne sont pas plus justes, & demandent des calculs beaucoup plus longs & plus penibles. C'est là certainement ce qu'on peut jamais dire de plus glorieux pour les Auteurs du Calendier Gregorien, du moins quant à cette partie.

V. les M. p. 9, 10, 12, 40, 44, 131, 132.
NOus renvoyons entierement aux Memoires, selon le plan que nous nous sommes fait, differentes Observations de Taches dans le Soleil faites par les Astronomes de l'Academie, ou des comparaisons de leurs Observations avec celles de leurs Correspondans.

V. les M. p. 198, 233, 246, 247.
Des Observations de Venus, & de Jupiter cachés par la Lune.

V. les M. p. 352. & 356.
Et les Observations de l'Eclipse de Lune du 10 Decembre.

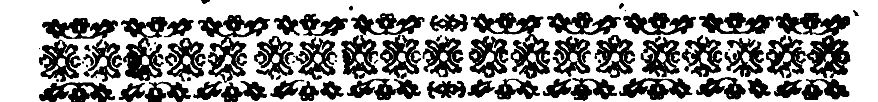
MOnsieur Clapier Professeur de Mathematique à Montpellier, Correspondant de M. Cassini, lui a envoyé une Table qu'il a calculée des Declinaisons du Soleil, pour tous les Degrés & Minutes de l'Ecliptique, en supposant que sa plus grande declinaison soit de 23° 29'.

Le même M. Clapier a envoyé à M. Cassini, & par lui à l'Academie une Table qu'il a calculée, fort utile pour faciliter la description des Cadrans Verticaux Declinants à la hauteur du Pole de Paris. Il ne suppose dans cette Table que la declinaison du plan vers l'Orient ou vers l'Occident connuë, & ensuite vis-à-vis de chaque degré de Declinaison, il met en differentes colonnes l'angle de la Meridienne avec la Soustilaire, l'angle de l'Axe avec la Soustilaire, les angles des lignes Horaires avec la Meridienne au centre du Cadran, calculés de demi-heure en demi-heure; c'est-à-dire que par cette Table tous les Cadrans de cette espece se trouvent tout faits.

M. Cassini a rendu conte à la Compagnie d'un Livre fait au sujet du Calendrier par M. Bianchini, dont nous avons déja parlé dans l'Hist. de 1701*. Cet habile Homme y est d'accord avec M. Cassini sur les vûës qu'il avoit proposées à la Congregation, & sur les conclusions qu'il tiroit. Du reste, M. Bianchini fait paroître dans cet Ouvrage une grande connoissance de l'Astronomie. V. les M. p. 142. * p. 107.

Les RR. PP. Jesuites de Lyon s'étant fait chés eux un Observatoire bien entendu, & fourni de tous les Instruments necessaires, ils ont communiqué leurs principales Observations à M. Cassini, qui en a tiré tout le fruit qui s'en pouvoit tirer en les comparant aux siennes.

De même M. Cassini le fils a comparé ses Observations à celles que le P. Fueillée, Minime, & bon Astronome, a faites en Amerique. V. les M. p. 338.

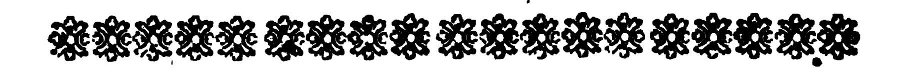


HYDROGRAPHIE.

V. les M. p. 200.

MOnsieur de Lagni a repliqué à la Réponse que M. Chazelles lui avoit faite sur les Cartes Reduites, & dont il a été parlé dans l'Hist. de 1702*. Mais comme cette Replique ne demande aucun éclaircissement, nous n'en dirons rien ici.

* pag. 86. & suiv.



DIOPTRIQUE.

DES FOYERS EN GENERAL.

V. les M. p. 24.

IL seroit inutile de repeter ici ce que nous avons dit dans l'Hist. de 1703*, sur les Foyers ou sur les Caustiques. Ces idées supposées, il s'agit maintenant de déterminer sur l'axe d'un Verre de figure quelconque quel est le point où cet axe touche la Caustique par refraction, ou, ce qui revient au même, quel est au-delà du Verre le point où les rayons d'un point lumineux qui ont passé au travers du Verre, & qui en se rompant ont pris de nouvelles directions, se réünissent en plus grande quantité que par tout ailleurs.

* p. 69. & suiv.

On ne peut imaginer que quatre choses qui entrent dans la Refraction, & dans toutes les modifications differentes qu'elle peut recevoir, 1°. La difference de densité des deux Milieux par où passent les rayons, par

exemple, celle de l'air & du Verre. 2°. La figure du second Milieu qui rompt les rayons, par exemple, la courbure du Verre. 3°. La direction qu'avoient entre eux les rayons partis d'un seul point, lorsqu'ils ont rencontré le second Milieu, c'est-à-dire leur divergence, leur parallelisme, ou leur convergence. 4°. L'angle sous lequel chacun d'eux rencontre la surface du second Milieu.

A l'égard du premier point, on a reconnu que la difference densité des Milieux donne au Sinus de l'angle d'incidence d'un rayon, & au Sinus de son angle rompu une certaine portion qui est toûjours la même dans les mêmes Milieux pour tous les differens angles d'incidence possibles, ce qui renferme, ou rend inutile la consideration du 4ᵉ point que nous venons de poser. Tout le monde sçait que de l'air au verre le rapport des Sinus, ou de la rarefaction est de 3 à 2.

La figure de la surface du second Milieu a une grande part à la refraction, car il est visible que l'angle d'incidence, qui par le rapport constant des Sinus donne l'angle rompu, dépend de la maniere dont la surface du second Milieu se presente au rayon qui la doit penetrer. Si cette surface est plane, & si tous les rayons ont entre eux la même direction, c'est-à-dire, s'ils sont paralleles, comme ils ont tous le même angle d'incidence, ils ont tous aussi le même angle rompu, & sont tous paralleles après la refraction ainsi qu'ils l'étoient auparavant. Mais si la surface est courbe, les rayons incidents, quoique paralleles entre eux, tombent tous sous des angles differents, & par consequent après la refraction ne sont plus paralleles, mais divergens, ou convergens. Plus une surface est courbe, plus elle fait un effet contraire à celui de la surface plane, & par consequent, puisque la surface plane renvoye paralleles les rayons qu'elle a reçûs paralleles, une surface courbe renvoye d'autant plus divergens ou convergens les rayons qu'elle a reçûs paralleles, qu'elle est plus courbe. Il faut donc pour connoître le degré de la divergence ou de la con-

vergence des rayons qui ont été rompus par une surface courbe, connoître le degré de sa courbure ; or pour avoir cette connoissance en general il faut aller à la Theorie des Dévelopées, & voici pourquoi. Nous allons supposer dans cette explication ce qui a été dit des Développées dans l'Hist. de 1701.*

* p. 81.

Un petit cercle est plus courbe qu'un grand, & plus courbe en même raison que son rayon est plus petit. Chaque portion infiniment petite d'une Courbe formée par le dévelopement d'une autre, étant considerée comme un arc de cercle infiniment petit décrit sur le rayon de la Développée tel qu'il est en cet instant, il s'ensuit que cette portion de Courbe est d'autant plus ou moins courbe que le rayon de la Dévelopée correspondant est plus court ou plus long, & par consequent le rayon de la Dévelopée d'une Courbe détermine par la variation où il est toûjours, hormis dans un cas, celle de la courbure de la Courbe dans toutes ses portions, ou dans tous ses arcs infiniment petits. Si le rayon de la Dévelopée ne change point, ce qui n'arrive que dans le Cercle, la courbure est uniforme, & toûjours la même. Si ce rayon est infini, la courbure devient la moindre qu'il soit possible, c'est-à-dire, une ligne droite, s'il est nul ou Zero, la courbure devient infiniment grande, c'est-à-dire, plus grande que celle d'aucun Cercle fini, quelque petit qu'il soit.

Il arrive dans une infinité de Courbes, par exemple, dans les Sections Coniques, que quand on cherche quel est le rayon de la Dévelopée à leur sommet, on la trouve d'une certaine longueur déterminée, c'est-à-dire, qu'entre le sommet de ces Courbes & celui de leurs Dévelopées, il y a une distance de cette même longueur. Ce n'est pas qu'on ne puisse toûjours déveloper la Dévelopée en commençant à son sommet, auquel cas il n'y a nulle distance entre ce sommet, & celui de la Courbe qui naît du dévelopement, & le rayon de la Dévelopée étant nul, on voit naître une Courbe dont la

courbure à son sommet est infiniment grande. Mais la courbure d'une Section Conique à son sommet n'étant pas infiniment grande, si l'on veut que la même Développée produise une Section Conique, il faut necessairement que le rayon de la Développée au sommet de cette Section ait une certaine longueur, telle qu'elle doit être pour la courbure déterminée du sommet, autrement la même Développée produiroit une autre Courbe qu'une Section Conique. De là vient qu'en dévelopant une Courbe déterminée, si on en veut faire naître une certaine autre Courbe déterminée, il faut souvent concevoir qu'à l'origine du dévelopement la Ligne qui envelope excede d'une certaine longueur la Courbe envelopée.

La courbure n'entre pas seulement dans les refractions par le degré dont elle est, mais encore par la maniere dont elle est tournée à l'égard des rayons incidents, c'est-à-dire, qu'elle fait differens effets selon qu'elle est concave ou convexe de leur côté. Si une courbure convexe rend convergens des rayons paralleles, la même courbure concave les rend divergens. La convexité ou la concavité se déterminent encore par les rayons de la Dévelopée, car ils sont toûjours du côté de la concavité, puisque ce sont toûjours des rayons d'arcs de cercle ; & par consequent si l'on a supposé une Courbe convexe du côté de l'objet lumineux, les rayons de sa Dévélopée seront de l'autre côté de cette Courbe, & si dans cette supposition on a affecté ces rayons du signe *plus*, ou, ce qui est la même chose ; si on les à rendus positifs, on n'a, selon l'usage établi en Geometrie, qu'à les affecter du signe *moins*, ou qu'à les rendre negatifs, pour faire que la même Courbe soit concave du côté de l'objet lumineux. Si l'on veut que la Courbe devienne une ligne droite, il n'y a qu'à rendre les rayons de la Dévelopée infinis, car alors ils deviennent rayons d'un cercle infini, dont la circonference

infiniment peu Courbe, ne peut être qu'une ligne droite.

Il reste le 3[e] point qui entre dans la refraction, c'est-à-dire, le parallelisme, la divergence, ou la convergence que les rayons d'un même point ont entre eux, lorsqu'ils tombent sur la surface qui les rompt. Naturellement tous les rayons d'un même point sont divergens, & ils le sont d'autant plus que le point lumineux est plus proche. Par consequent leur divergence décroît d'autant plus, & approche d'autant plus du parallelisme que le point lumineux est plus éloigné, & il doit l'être infiniment afin que les rayons soient paralleles, ou du moins il doit être à une si grande distance que l'angle aigu des rayons puisse sans une erreur sensible être conté pour rien. Jamais des rayons d'un même point ne peuvent tomber convergens sur une surface que par accident, c'est-à-dire, à moins qu'ils n'ayent été déja rompus par une autre surface, qui ait changé leur divergence naturelle en convergence.

Les rayons directs, qui tombent donc toûjours divergens sur une surface du côté qu'elle regarde le point lumineux, auroient été convergens par rapport à ce même côté de la surface, si le point lumineux avoit passé de l'autre côté. Par consequent si lorsque les rayons tombent divergens la distance du point lumineux à la surface est une grandeur positive, on n'aura qu'à la rendre negative pour faire que les rayons tombent convergens sur ce même côté de la surface; & pour les rendre paralleles il n'y a qu'à rendre infinie cette même distance du point lumineux. J'ai supposé ici que l'on sçût qu'en Geometrie les grandeurs positives & les negatives sont toûjours contrairement posées par rapport à quelque terme commun d'où l'on commence à les considerer, ou à les conter.

La Formule que M. de l'Hôpital a donnée dans son Analyse des Infiniment petits pour trouver le point ou un rayon rompu sur un point quelconque de telle Cour-

be

be qu'on voudra, touche la Caustique par refraction, ne devoit donc comprendre, & elle ne comprend en effet que le rapport constant des deux Sinus, ou de la refraction, le rayon de la Dévelopée, ou quelques grandeurs qui en dépendent, & la distance du point lumineux, les trois seuls principes qui entrent dans toutes les refractions, & les modifient differemment par leurs combinaisons differentes. Mais M. de l'Hôpital n'a consideré que la premiere surface qui rompt les rayons; or dans la pratique un Verre ou une Lentille qu'on employe à cet usage a necessairement deux surfaces, & la seconde augmente, ou affoiblit, ou détruit, ou change la modification que les rayons ont reçûë de la premiere, car alors ils passent du Verre dans l'air, second passage d'un Milieu dans un Milieu different. C'est là ce que M. Guisnée a entrepris de rechercher d'un maniere infiniment generale, & par consequent, car cette consequence est presque absolument necessaire, il employe la Methode des Infiniment petits.

Il suppose une Lentille convexe des deux côtés, formée de deux surfaces courbes quelconques, tellement posées que l'axe de la Lentille soit aussi leur axe commun. Le point lumineux est sur l'axe à une distance finie quelconque, & par consequent ses rayons tombent divergens sur la Lentille. M. Guisnée a par la Formule de M. de l'Hôpital le point de l'axe où la premiere surface fait concourir deux rayons rompus infiniment proches, ensuite il cherche dans quel autre point de l'axe la seconde surface les fait concourir; il appelle Foyer de la Lentille ce nouveau point, & sa distance à la seconde surface est une grandeur qui lui vient dans une Formule generale, où il n'entre que des rayons des Dévelopées des deux surfaces, les deux autres grandeurs qui sont aussi les principes de toutes les refractions, & de plus, l'épaisseur de la Lentille, 4[e] grandeur qui ne pouvoit avoir lieu dans la recherche de M. de l'Hôpital. Supposé que la seconde surface rapproche le Foyer cau-

ſé par la premiere, il eſt viſible que plus la Lentille eſt épaiſſe, plus les rayons rompus infiniment proches conſervent long-temps le peu de convergence ou de diſpoſition à s'unir, que leur avoit donnée la premiere ſurface, & par conſequent la ſeconde agiſſant plus tard ſur eux rapproche d'autant moins le Foyer ſur l'axe. Au contraire ſi l'épaiſſeur de la Lentille eſt ſi petite, qu'elle puiſſe n'être contée pour rien, la ſeconde ſurface ne laiſſe les rayons qu'un ſeul inſtant avec le peu de convergence qu'ils avoient reçûë, & leur donne auſſi-tôt une convergence plus forte, & par conſequent fait avancer le Foyer ſur l'axe, autant qu'il eſt poſſible. De là vient que M. Guiſnée propoſe une double Formule, l'une où l'épaiſſeur de la Lentille eſt contée, l'autre où elle ne l'eſt pas. Dans la pratique ordinaire, elle ne merite pas de l'être.

Il eſt très-facile de juger par ce qui a été dit, que quoique les Formules de M. Guiſnée ne ſoient que pour le cas où les rayons divergens tombent ſur une Lentille convexe des deux côtés, elles ne laiſſent pas de s'étendre à tous les autres où les rayons ſont paralleles, ou même convergens, & où la Lentille eſt ou concave ou même plane ſoit d'un côté ſoit de tous les deux, & où elle n'eſt convexe que d'un côté, & concave ou plane de l'autre. Un leger changement de *plus* en *moins*, appliqué aux grandeurs qui doivent le porter, ou la ſuppoſition d'une grandeur infinie, donne tous ces differens cas, & toutes les combinaiſons qui en peuvent reſulter. Nous pouvons ici en ébaucher une idée ſans aucun calcul algebrique.

Une ſurface courbe a d'autant plus de *force* pour changer la direction des rayons qu'elle eſt plus courbe, & comme la Lentille a deux ſurfaces, il faut ſçavoir, 1°. Si elles conſpirent toutes deux au même effet, c'eſt-à-dire, à rendre les rayons paralleles, divergens, ou convergens, ou ſi l'une détruit en tout ou en partie l'effet de l'autre. 2°. Quelle eſt la force de chacune. D'ailleurs

il est d'autant plus difficile à une surface de donner une certaine direction aux rayons, qu'elle les a reçûs sous une direction plus opposée. Ainsi une surface convexe, qui naturellement rend les rayons convergens, les rend d'autant moins convergens, ou, ce qui revient au même, les réünit d'autant plus loin, qu'elle les a reçûs plus divergens, ou d'un point lumineux plus proche, & même elle peut les avoir reçûs si divergens, & avoir si peu de force par rapport à cette grande divergence, qu'elle ne fera que les rendre moins divergens. En ce cas-là les rayons ne se réüniront donc jamais, au contraire ils s'écarteront toûjours; mais comme ils sont devenus moins divergens qu'ils n'étoient en partant du point lumineux, ils ont pris la même direction que s'ils étoient partis d'un point lumineux plus éloigné de la surface convexe. Ce nouveau point auquel ils se rapportent comme s'ils en étoient venus, n'est point un Foyer *réel* pareil à celui où des rayons se réüniroient après avoir été rompus, mais c'est une autre espece de Foyer que quelques-uns appellent *virtuel*. Si l'on a établi dans le calcul algebrique que le Foyer réel soit positif, le virtuel sera negatif, parce qu'ils sont toûjours posés l'un d'un côté de la surface qui frait la refraction, l'autre de l'autre.

Si dans la supposition que nous venons de faire, tout le reste demeurant le même, la surface convexe avoit eú un peu plus de force jusqu'à un certain point, elle auroit absolument ôté aux rayons leur divergence, & l'auroit changée en parallelisme. Ce seroit la même chose, si la surface demeurant la même, le point lumineux s'éloignoit jusqu'à un certain point, car une moindre divergence des rayons se seroit changée en parallelisme. En ce cas les rayons devenus paralleles peuvent être censés se réünir à une distance infinie, c'est-à-dire, que le Foyer réel est infiniment éloigné, ou, si l'on veut, ce même Foyer infiniment éloigné est virtuel, puisque les rayons devenus paralleles ont la même direction que

s'ils étoient partis d'un point lumineux infiniment éloigné. Cette confusion du Foyer réel & du virtuel en ce cas, s'accorde avec le calcul algebrique qui donne l'Infini pour un terme commun du positif & du negatif.

Il est aisé de joindre à ces considerations celle d'une seconde surface qui fortifiera, ou diminuëra ou détruira l'effet de la premiere. Il peut donc arriver que les rayons en sortant de la Lentille reprennent ou la même espece de direction ou précisément la même direction qu'ils avoit perduë en y entrant.

Une Lentille étant convexe des deux côtés, sa premiere surface peut être si forte, ou la divergence des rayons si petite, & en même temps l'épaisseur de la Lentille si grande, que le Foyer de la premiere surface se fera dans cette épaisseur, après quoi les rayons partant de ce Foyer tomberont necessairement divergens sur la seconde surface, & fort divergens à cause de la proximité du Foyer ou point lumineux, & cette seconde surface pourra bien n'avoir la force que de diminuer cette grande divergence, de sorte qu'une Lentille convexe des deux côtés qui naturellement rend convergens & réünit dans un Foyer réel les rayons qu'elle a reçûs divergens les rendra tels qu'elle les aura reçû, ce qui auroit pû passer pour une espece de paradoxe. Il est clair que dans la supposition presente, l'épaisseur de la Lentille peut être diminuée de façon que le Foyer de la premiere surface tombera sur la seconde, auquel cas la distance de ce Foyer à la seconde surface est nulle, ce qui joint aux cas où cette distance est positive, ou negative, ou infinie, la represente de toutes les manieres dont elle peut être conçûë.

Mais il faut avoüer que tous les cas où l'épaisseur de la Lentille est considerée ne sont que pour la curiosité, & pour l'honneur de l'universalité de la Formule. Cette epaisseur étant supprimée, ou plûtôt negligée dans le calcul, il ne reste point d'autres cas où la distance du Foyer soit nulle, que ceux où le rayon de la Déve-

lopée de l'une & de l'autre surface, ou de toutes les deux, est nul. En effet quand le rayon de la Dévelopée de la premiere surface est nul, sa courbure, & par consequent sa force est aussi grande qu'il soit possible, & elle rompt un rayon infiniment proche de l'axe, de maniere qu'elle le fait dans le même instant concourir avec celui qui est dans l'axe; d'où il suit necessairement que la réünion de ces rayons ne se fait point au-delà de la Lentille. Il en va de même, si c'est le rayon de la Dévelopée de la seconde surface qui soit nul.

Mais il faut convenir encore que ces cas-là ne sont point pour la pratique. On n'employe que des Lentilles dont les deux surfaces sont spheriques, ou tout au plus l'une des deux plane; or dans un cercle le rayon de la Dévelopée est toûjours le rayon même du cercle, & si l'on veut que le cercle devienne une ligne droite, il faut concevoir son rayon infini, & comme d'ailleurs l'épaisseur de la Lentille n'est contée pour rien, on ne trouve jamais dans la pratique que la distance du Foyer à la seconde surface soit nulle.

Les rayons des Dévelopées étant donc changés dans la Formule de M. Guisnée en rayons de cercles tels qu'on voudra, on a une Formule particuliere qui n'est que pour les Verres spheriques, & qui cependant donne encore beaucoup plus de combinaisons que l'usage n'en demande, mais il est bon d'avoir devant soi une plus grande étenduë de Theorie qu'il n'est necessaire, & on voit avec plaisir que l'on n'a qu'à retrancher, & à se reduire.

Tout dépendra maintenant de la distance du point lumineux, & de la courbure spherique des deux surfaces. Si le Verre est convexe des deux côtés & que les rayons tombent divergens, plus le point lumineux est éloigné, plus le Foyer sera proche, à cause du peu de divergence des rayons, & du peu de difficulté de les réünir; plus les demi-diametres des surfaces seront grands, plus le Foyer sera éloigné à cause de la foiblesse des sur-

faces ; ainsi la grandeur de la distance du point lumineux & la grandeur des demi-diametres des surfaces sont deux especes de Forces opposées qui font des effets contraires, & il faut pour conspirer au même effet une grande distance du point lumineux & des petits demi-diametres des surfaces, ou au contraire. L'effet d'un Verre convexe est d'autant plus grand que le Foyer est plus proche, si le Foyer est infiniment éloigné, cet effet est moindre, & moindre encore si le Foyer n'est que virtuel.

On trouve par la Formule que quand les deux Forces opposées sont en telle proportion que deux fois le produit des deux demi-diametres l'un par l'autre, est égal au produit des deux demi-diametres par la distance du point lumineux, la distance du Foyer est infinie ; que quand la distance du point lumineux est plus grande, celle du Foyer est moindre, & finie ; & que quand la distance du point lumineux est moindre, celle du Foyer est plus qu'infinie, c'est-à-dire, negative, ou, ce qui est la même chose, que le Foyer n'est que virtuel. Le Verre demeurant le même, on voit son effet qui diminuë toûjours selon que le point lumineux est plus proche.

Si le point lumineux est placé à une distance du Verre égale à l'un des deux demi-diametres, tout dépendra de leur rapport de grandeur, qui fait la force des surfaces. Lorsque les deux demi-diametres sont égaux, la distance du Foyer est infinie, si celui qui est égal à la distance du point lumineux est plus grand que l'autre, la distance du Foyer est finie & l'effet du Verre plus grand, parce que le point lumineux est plus éloigné. Si c'est le contraire, la distance du Foyer est plus qu'infinie.

Quand on fait des Verres pour les grandes Lunettes, les rayons venus d'un point du Soleil sont censés venir d'un point infiniment éloigné. Cette distance étant donc supposée infinie, & le Verre convexe des deux côtés, c'est la courbure des deux surfaces qui fait tout, le Foyer

ne peut plus être que réel, il ne sçauroit être infini, & il est d'autant plus éloigné que les deux demi-diametres sont plus grands. S'ils sont égaux, le Foyer est à la distance d'un demi diametre, & quand on dit dans l'usage commun qu'un verre convexe a tant de pieds de Foyer, ce nombre de pieds est aussi la longueur du demi-diametre des deux spheres dont il a été formé, quand elles sont égales.

Si l'on veut que les rayons tombent convergens sur le verre convexe, on voit que le Foyer ne peut être que réel & fini, ce qui est clair de soi-même.

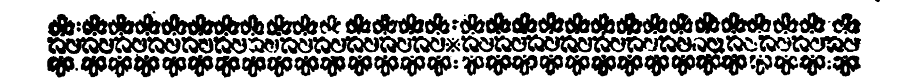
Si l'on prend au lieu d'un verre convexe un verre concave des deux côtés, on voit que le Foyer ne peut être que virtuel, tant que les rayons tombent divergens ou paralleles, mais que s'ils tombent convergens, il peut être réel ou virtuel ou infini, ce qu'on a déja vû en general.

On sçait en Dioptrique que le point lumineux & le Foyer sont deux points reciproques, c'est-à-dire que le Foyer que donne un certain verre aux rayons d'un point lumineux étant connu, si l'on mettoit le point lumineux à la place du Foyer, il auroit son nouveau Foyer au même point où étoit sa premiere position, & que par consequent les rayons repasseroient par le même chemin. Cette réciprocation suit de la Formule de M. Guisnée aussi évidemment que tout le reste.

On en tire encore sans aucune peine le nouveau Foyer qui resulteroit d'une seconde Lentille placée sur le même axe que la premiere, ainsi qu'il se pratique dans les Lunetes. Car quel sera l'effet de cette seconde Lentille? Elle recevra les rayons tels que la premiere les lui envoyera, convergens, par exemple, & le degré de leur convergence sera plus ou moins grand selon que le Foyer de la premiere Lentille en sera plus ou moins proche. La seconde sera donc dans le même cas que si elle recevoit des rayons convergens d'un point lumineux placé où est le Foyer de la premiere Lentille. Or on a vû

que ce cas est un de ceux qui sont compris dans la supposition d'une seule Lentille, & par consequent le Foyer de la seconde Lentille, tel que le donnera la Formule generale, sera celui que produiront les deux Lentilles ensemble. Il est visible qu'un plus grand nombre de Lentilles ne seroit pas plus embarrassant.

Toutes les Propositions que cette Theorie embrasse ont leurs *inverses*, qui ne doivent pas non plus être difficiles à trouver. Au lieu que l'on a toûjours cherché les Foyers, tous les principes qui entrent dans la refraction étant connus, on pourroit supposer les Foyers connus, avec tous les principes de la refraction, hormis un seul que l'on chercheroit, & il est clair qu'on le découvriroit très-aisément. Enfin il ne paroît pas que sur toute cette matiere des Foyers on puisse rien desirer que la Theorie de M. Guisnée ne donne dans l'instant.



ACOUSTIQUE.

MOnsieur Carré a lû dans quelques Assemblées la Theorie generale du Son qui doit preceder sa Description des Instrumens de Musique, & qui avoit été annoncée dans l'Hist. de 1702*. Il y a prouvé que le Son n'est pas immediatement produit par les vibrations totales & sensibles du Corps Sonore, par exemple, d'une Corde à boyau, mais par les Tremblemens insensibles des petites parties, toûjours aidés, & quelquefois causés par les vibrations totales. Mais comme ces Tremblemens sont en même raison pour le nombre & pour la frequence que les vibrations totales, on peut toûjours prendre ces vibrations pour la mesure de tous les Accords. Ensuite M. Carré est entré dans un ample détail de

* p. 137.

de tous les Accords de Musique soit consonans soit dissonans, & comme des rapports de nombres, qui font la nature & l'essence de tous les Accords, ne fourniroient pas toûjours des raisons assés plausibles de leur agrément ou de leur desagrément, il a été obligé de mêler souvent la Metaphisique à la Mathematique, & de remonter jusqu'aux principes que nous avions établis dans l'Hist. de 1701*. Le Traité des Accords a conduit M. Carré à un Traité du Monochorde, dont les differentes divisions donnent tous les Accords possibles, & là, il a décrit un nouveau Monochorde de son invention. La Theorie de la Musique est aussi sublime, que la Pratique en est délicieuse, & l'une est aussi charmante pour l'Esprit que l'autre l'est pour les Sens & pour l'imagination.

* pag. 123. & suiv.

MECHANIQUE.

SUR LE CENTRE D'OSCILLATION.

UN des plus grands caracteres de la Verité, c'est d'être feconde. La Theorie generale du centre d'Oscillation, trouvée par M. Bernoulli de Basle, & rapportée dans l'Hist. de 1703*, a produit comme par surcroît, la decision de deux autres questions importantes en cette matiere.

V. les M. pag. 136.
* pag. 114.

I. M. Huguens qui a aussi donné une Formule pour le centre d'Oscillation, n'avoit pû y parvenir qu'en supposant que si plusieurs poids attachés comme l'on voudra à un Pendule, se détachoient & se separoient les uns des autres au moment que le Pendule cesseroit de

descendre, chacun d'eux en vertu de la vîtesse acquise pendant sa chûte remonteroit à telle hauteur que leur centre de gravité commun se trouveroit remonté à la même hauteur d'où il étoit descendu. Pour se faire plus aisément une image, il faut concevoir deux poids dont chacun est attaché à l'extremité d'une ligne qui traverse la verge, l'un d'un côté, l'autre de l'autre, ces lignes étant inégalement distantes du point de suspension, & même inégales entre elles. Lorsque la verge est devenuë par sa chûte une ligne verticale, on suppose qu'elle s'arrête là; les deux poids ont acquis chacun differentes vîtesses, & si avec ces vîtesses acquises on les rapporte à la verge, ils y auront un centre de gravité commun, tel que ces poids multipliés chacun par sa distance de ce centre, & par sa vîtesse feroient de part & d'autre des produits égaux. On peut concevoir que ce même centre étoit aussi sur la verge, avant qu'elle commençât à tomber & lorsqu'elle étoit horisontale. Si l'on suppose donc maintenant que la verge étant devenuë verticale, les poids s'en détachent, se separent l'un de l'autre, & remontent perpendiculairement chacun avec sa vîtesse acquise, & par consequent à la hauteur que prescrira cette vîtesse, si de plus la verge que l'on peut supposer qui étoit devenuë d'horisontale verticale remonte aussi, & redevient horisontale, M. Huguens a pretendu, mais sans le prouver, que les differentes hauteurs ausquelles remontoient les deux poids détachés étoient telles que leur centre de gravité commun se retrouvoit encore sur la verge redevenuë horisontale, ainsi qu'il y étoit d'abord, & par consequent qu'il étoit remonté aussi haut qu'il étoit descendu. On entend assés que si le centre de gravité se retrouve encore sur la verge, cela veut dire que les differentes vîtesses des deux poids rapportées à cette verge, & multipliées ainsi qu'il le faut pour les centres de gravité, feroient des produits égaux, qu'elles ne feroient pas étant rapportées à toute autre ligne tirée du point de suspension.

Cette supposition de M. Huguens fut attaquée par un habile Geometre, qui en contesta la verité. D'autres en la jugeant vraie, la trouverent trop bardie pour être reçûë dans une Science qui démontre tout. Enfin la disposition la plus generale fut d'en desirer & d'en attendre la preuve, & jusque-là de demeurer en suspens.

M. Bernoulli justifie presentement M. Huguens, & démontre en rigueur geometrique ce que l'autre n'avoit conjecturé que par genie, & par un certain goût de verité. Il est incontestable que le Pendule simple, ou, ce qui est la même chose, la verge délivrée des poids qui y étoient attachés, à l'exception de celui qu'elle porte à son extremité, remontera à la même hauteur d'où elle étoit descenduë, & redeviendra horisontale, si elle l'étoit d'abord. Par là M. Bernoulli trouve la hauteur à laquelle remonteront les poids détachés, car cette hauteur pour chacun de ces poids, est à celle du pendule simple comme les quarrés des vîtesses, ou des distances de chaque poids au point de suspension. La hauteur de chacun des poids détachés étant trouvée, elle le met à une certaine distance de la verge redevenuë horisontale, M. Bernoulli prend cette distance pour la vîtesse que ce poids a par rapport à la verge, & détermine l'expression algebrique de ces nouvelles vîtesses, differentes pour chacun des deux poids. Le Pendule simple entre dans cette expression, mais marqué par une seule lettre, & si à cette lettre on substiuë la valeur generale que M. Bernoulli a trouvée du Pendule simple, on voit aussi-tôt que les deux vîtesses des poids détachés multipliées par ces poids donnent des produits égaux, & comme ces vîtesses n'ont été prises que par rapport à la verge redevenuë horisontale, sur laquelle étoit d'abord le centre de gravité de ces poids, il s'ensuit que ce centre y est encore, puisque ce n'est que l'égalité de ces produits qui le détermine. M. Huguens pour démontrer sa Formule d'Oscillation avoit eu besoin de supposer que le centre de gravité des poids détaché remontoit à la même hau-

teur d'où il étoit descendu lorsqu'ils étoient liés ensemble, & M. Bernoulli prouve par sa Formule du centre d'Oscillation toute differente de l'autre, que cette supposition de M. Huguens étoit vraie.

II. On avoit encore sur cette même matiere une très-forte conjecture que l'on n'avoit pû pousser jusqu'à la démonstration. Je suppose ici que l'on sçache ce que c'est que les Centres de percussion, si amplement expliqués dans l'Hist. de 1702*. Quand par la Formule generale de M. Huguens, ou par tel autre qu'on pût avoir, on avoit trouvé le centre d'oscillation de quelque figure particuliere, & qu'ensuite on venoit à chercher le centre de percussion de cette même Figure, on les trouvoit toûjours au même point. Il y avoit donc une grande apparence que ces deux centres étoient le même, & en toute autre Science que la Geometrie on n'en auroit pas douté, mais il manquoit pour une entiere certitude d'avoir une Formule generale du centre de percussion qui fût la même que celle du centre d'oscillation. Ce scrupule geometrique si délicat est levé par M. Bernoulli, & il fait voir qu'en cherchant le centre de percussion qui est le point autour duquel les produits des poids par leurs distances à ce point, & par leurs vîtesses, sont égaux, on arrive à la même Formule que celle de son centre d'oscillation. Ce qui rend visible cette conformité, ou plûtôt cette *identité* auparavant cachée, c'est qu'il a reduit les centres d'oscillation aux principes du levier, ausquels on ne sçavoit rapporter que les centres de percussion. Ainsi deux Formules qui ne devoient être que la même, tirées de differens principes, ne se ressembloient point, & quoique dans l'application on leur trouvât toûjours les mêmes effets, on ne les a pû reconnoître sûrement pour la même, jusqu'à ce que M. Bernoulli ait eu l'art de les faire naître de la même source, & de les montrer sous la même Forme. Si l'on veut se rappeller ici ce qui a été dit sur les Centres d'oscillation de M. Bernoulli dans l'Hist. de 1703, on verra que toutes les

* pag. 108 & suiv.

considerations qui y entrent ne sont que celles qui doivent entrer dans les centres de percussion, & ce sera-là une espece de démonstration metaphisique aussi évidente que les geometriqnes.

SUR LA FIGURE DE L'EXTRADOS D'UNE VOUTE CIRCULAIRE, DONT TOUS LES VOUSSOIRS SONT EN EQUILIBRE ENTRE EUX

UNe Voute ou un Arc demi-circulaire étant posé sur ses deux *piédroits*, & toutes les pierres ou *Voussoirs* qui composent cet Arc étant taillés & posés entre eux de maniere que leurs *joints* prolongés se rencontrent tous au centre de l'Arc, il est évident que tous les Voussoirs ont une figure de Coin, plus large par haut que par bas, en vertu de laquelle ils s'appuyent & se soutiennent les uns les autres, & resistent reciproquement à l'effort de leur pesanteur qui les porteroit à tomber. Le Voussoir du milieu de l'Arc, qui est perpendiculaire à l'horison, & qu'on appelle *Clef de voute* est soutenu de part & d'autre par les deux Voussoirs voisins, précisément comme par deux plans inclinés, & par consequent l'effort qu'il fait pour tomber n'est pas égal à sa pesanteur, mais en est une certaine partie d'autant plus grande que les plans inclinés qui le soutiennent sont moins inclinés, de sorte que s'ils étoient infiniment peu inclinés, c'est-à-dire, perpendiculaires à l'horison aussi-bien que la Clef de voute, elle tendroit à tomber par toute sa pesanteur, ne seroit plus du tout soutenuë, & tomberoit effectivement, si le ciment, que l'on ne considere pas ici, ne l'en empêchoit. Le second Voussoir qui est à droit ou à gauche de la Clef de voute est soutenu par un troisiéme Voussoir, qui en vertu de la figure

de la voute est necessairement plus incliné à l'égard du second, que le second ne l'est à l'egard du premier, & par conséquent le second Voussoir dans l'effort qu'il fait pour tomber exerce une moindre partie de sa pesanteur que le premier. Par la même raison, tous les Voussoirs à conter depuis la Clef de voute, vont toûjours en exerçant une moindre partie de leur pesanteur totale, & enfin le dernier qui est posé sur une surface horisontale du piédroit, n'exerce aucune partie de sa pesanteur, ou, ce qui est la même chose, ne fait nul effort pour tomber, puisqu'il est entierement soutenu par le piédroit.

Si l'on veut que tous les Voussoirs fassent un effort égal pour tomber, ou soient en équilibre, il est visible que chacun depuis la Clef de voute jusqu'au piédroit exerçant toûjours une moindre partie de sa pesanteur totale, le premier, par exemple, n'en exerçant que la moitié le second un tiers, le troisiéme un quart &c, il n'y a pas d'autre moyen d'égaler ces differentes parties, qu'en augmentant à proportion les touts dont elles sont parties, c'est à-dire qu'il faut que le second Voussoir soit plus pesant que le premier, le troisiéme plus que le second, & ainsi de suite jusqu'au dernier, qui doit être infiniment pesant, parce qu'il ne fait nul effort pour tomber, & qu'une partie nulle de sa pesanteur ne peut être égale aux efforts finis des autres Voussoirs, à moins que cette pesanteur ne soit infiniment grande. Pour prendre cette même idée d'une maniere plus sensible, & moins metaphisique, il n'y a qu'à faire reflexion que tous les Voussoirs, hormis le dernier, ne pourroient laisser tomber un autre Voussoir quelconque sans s'élever, qu'ils resistent à cette élevation jusqu'à un certain point déterminé par la grandeur de leur poids, & par la partie qu'ils en exercent, qu'il n'y a que le dernier Voussoir qui puisse en laisser tomber un autre, sans s'élever en aucune sorte, & seulement en glissant horisontalement, que les poids, tant qu'ils sont finis, n'apportent aucune resistance au mouvement horisontal, & qu'ils

ne commencent à y en apporter une finie que quand on les conçoit infinis.

M. de la Hire, dans son *Traité de Mechanique* imprimé en 1695, a démontré quelle étoit la proposition selon laquelle il falloit augmenter la pesanteur des Voussoirs d'un Arc demi-circulaire, afin qu'ils fussent tous en équilibre, ce qui est la disposition la plus sûre que l'on puisse donner à une Voute, pour la rendre durable. Jusque-là les Architectes n'avoient eu aucune regle précise, & ne s'étoient conduits qu'en tâtonnant. Si l'on conte les degrés d'un quart de cercle depuis le milieu de la Clef de voute, jusqu'à un piédroit, l'extremité de chaque voussoir appartiendra à un arc d'autant plus grand, qu'elle sera plus éloignée de la Clef, & il faut par la regle de M. de la Hire augmenter la pesanteur d'un voussoir par dessus celle de la Clef, autant que la tangente de l'arc de ce voussoir l'emporte sur la tangente de l'arc de la moitié de la Clef. La tangente du dernier voussoir devient necessairement infinie, & par consequent aussi sa pesanteur ; mais comme l'infini ne se trouve pas dans la pratique, cela se reduit à charger autant qu'il est possible les derniers voussoirs, afin qu'ils resistent à l'effort que fait la voute pour les écarter, qui est ce qu'on apelle la *poussée*.

M. Parent a cherché quelle seroit la courbure exterieure ou l'*Extrados* d'une voute dont l'*Intrados* seroit circulaire, & tous les voussoirs en équilibre par leur pesanteur, selon la regle de M. de la Hire, car il est clair que tous ces voussoirs inégaux dans une certaine proportion feroient en dehors une certaine courbure reguliere. Il ne l'a trouvée que par points, mais d'une maniere fort simple, de sorte que par sa methode on pourroit assés facilement construire une voute, dont on seroit sûr que tous les voussoirs seroient en équilibre.

Un fruit considerable de la recherche de M. Parent, c'est qu'il a découvert en même temps la mesure de la poussée de la voute, ou quel rapport a cette poussée au

poids de la voute entiere. On ſçavoit ſeulement que cet effort étoit très-grand, & on y oppoſoit de groſſes maſſes de pierres, ou *culées*, plûtôt trop fortes, que trop foibles, mais on ne ſçavoit point préciſément où il s'en falloit tenir. On pourra le ſçavoir preſentement, les Arts ſe ſentent toûjours du progrès de la Geometrie.

SUR LES FROTEMENTS.

V. les M. p. 173. 206.

JUſqu'ici la Theorie de la Mechanique n'avoit point conſideré les Frotements, faute d'en connoître préciſément la valeur. On calculoit l'avantage qu'une Force mouvante pouvoit tirer d'une Machine, ou par ſa diſtance à l'égard du point fixe, ou par la direction ſelon laquelle elle agiſſoit, on ſuppoſoit toûjours dans ces démonſtrations que les corps dont les ſurfaces devoient ſe mouvoir les unes ſur les autres étoient parfaitement polis, & l'on s'attendoit bien que dans la pratique leurs Frotements feroient perdre aux Forces mouvantes une partie de leur avantage, mais il n'y avoit que cette pratique même qui pût découvrir où devoit aller le déchet, & l'on riſquoit en quelque ſorte une Machine dont une bonne partie étoit inconnuë.

M. Amontons ayant le premier trouvé par experience la valeur preciſe des Frotements * que M. Parent trouva enſuite par raiſonnement & par Geometrie *, le même M. Parent donne ici la maniere de faire entrer cette nouvelle conſideration dans toute la Theorie de la Mechanique, de ſorte qu'on n'aura plus beſoin d'attendre l'execution pour ſçavoir au juſte l'effet d'une Machine.

* V. l'Hiſt. de 1699, p. 104 & ſuiv.
* V. l'Hiſt. de 1700, p. 145 & ſuiv.

Si l'on ne conſidere pas les Frotements, un corps peſant poſé ſur le plan incliné ne peut s'y ſoûtenir, & il faut neceſſairement ou qu'il gliſſe, ou qu'il roule & gliſſe en

en même temps. Il glissera simplement, si la ligne de direction par laquelle il tend au centre de la terre, tombe sur sa base, parce qu'alors son centre de gravité peut descendre par rapport à l'horison, mais non pas par rapport au plan incliné; il glissera & roulera si sa ligne de direction ne tombe pas sur sa base, parce qu'alors son centre de gravité peut descendre & par rapport à l'horison, & par rapport au plan incliné.

Mais si l'on tient conte des Frotements, ce même corps pesant peut se soûtenir sur un plan incliné dont la surface rude & inégale l'accrochera en quelque maniere. Il est visible que ce corps ne se soûtiendra pas ainsi sur tous les plans inclinés possibles, & qu'il y en aura qui seront trop peu inclinés pour cet effet, ou, ce qui est la même chose, trop élevés. M. Parent cherche quelle est l'inclinaison necessaire, au-dessus de laquelle un certain corps déterminé ne se puisse plus soûtenir par l'adherence que cause le Frotement.

Il suppose que le Frotement n'est point proportionné aux surfaces, mais seulement à la pression, dont il est le tiers. Il tire la ligne de direction par laquelle le corps tend au centre de la terre, & cette ligne perpendiculaire à un plan horisontal est necessairement oblique au plan incliné. L'action de la pesanteur du corps sur ce plan lui est donc oblique, & par consequent, selon la Theorie des Mouvements composés, elle peut être considerée comme resultant de deux autres actions dont l'une soit perpendiculaire à ce même plan, & l'autre parallele. La perpendiculaire est la pression du corps sur le plan en vertu de sa pesanteur, la parallele est la direction selon laquelle il tend à tomber, & par consequent elle represente une Force qui tireroit le corps en embas & tendroit à surmonter le Frotement. Or cette Force doit être égale au tiers de la pression. Donc si ces deux lignes dans lesquelles on resout, & on décompose, pour ainsi dire, la direction oblique du corps pesant, sont telles que la parallele soit le tiers de la per-

pendiculaire, elles ont precisément le rapport qui est necessaire afin que le Frotement du corps puisse être surmonté, ou, ce qui est la même chose, afin qu'il puisse tomber. Or le rapport de ces deux lignes entre elles est toûjours different selon l'obliquité differente de la direction du corps, & cette obliquité est differente selon l'inclinaison du plan, donc afin que le corps puisse tomber & qu'il ne puisse tomber sur tout autre plan moins élevé, il faut que l'inclinaison du plan soit telle que ces deux lignes qui composent la direction du corps ayent entre elles ce rapport précis.

Maintenant si une Force mouvante tiroit non parallelement à ce plan pour faire monter ce corps, il est clair qu'il faudroit qu'elle surmontât non seulement le Frotement causé par la pression du corps sur le plan, mais celui qu'elle y cause elle-même en pressant par la traction, supposé qu'elle applique encore le corps sur le plan, ce qui arrive dans toutes les tractions non paralleles au plan, & qui en sont plus proches qu'une parallele. On sçait déja quelle est la quantité du Frotement causé par la pesanteur du corps sur le plan incliné, il reste à sçavoir quel est le Frotement causé par la traction de la Force mouvante, & on le découvrira par la même voie. Cette traction étant oblique au plan par la supposition, il la faut décomposer & diviser en deux dont l'une soit perpendiculaire & l'autre parallele, la premiere est la quantité dont la Force mouvante applique & presse le corps contre le plan en le tirant. On calcule par la Mechanique ordinaire de quelle quantité doit être la Force selon la direction par laquelle elle agit, selon la grandeur du poids, & l'inclinaison du plan, mais ce n'est pas assés, il la faut augmenter encore à proportion des deux pressions qu'elle a à vaincre, c'est-à-dire l'augmenter du tiers de ces pressions prises ensemble.

M. Parent en détermine la valeur par Geometrie & par Algebre, & la joignant avec ce que donne la Mecha-

nique ordinaire, il compose une Formule generale qui exprime la Force accompagnée de toutes les circonstances, ou revêtuë de toutes les modifications qu'on peut considerer dans le cas proposé, & dont les differentes combinaisons peuvent le faire varier à l'infini. Si l'on fait évanoüir de la Formule generale les Frotements, on retrouve toutes les conclusions de la Mechanique ordinaire.

Cette Theorie generale étant établie pour le Plan incliné, M. Parent passe sans peine, ou au Coin qui en est une espece, ou à la Poulie, deux Machines où il entre beaucoup de Frotement. Les mêmes principes regnent par tout, & le secret consiste toûjours à trouver les pressions soit du poids, soit de la Force par la décomposition de leurs directions. Des cas plus compliqués ne sont que plus longs à resoudre, & non pas plus difficiles. Il paroît par les découvertes les plus generales & les plus fécondes où l'on soit arrivé jusqu'à present dans la Mechanique, qu'elle n'est que la Science des Mouvements composés.

SUR UN NIVEAU

D'UNE NOUVELLE CONSTRUCTION.

TOute la Science du Nivellement n'a pour objet que de déterminer deux ou plusieurs points également éloignés du centre de la Terre. V. les M. p. 251.

La Terre étant spherique, du moins sensiblement, tous les points qui sont *de niveau* ou également éloignés de son centre, sont des points de sa circonference, ou d'un cercle concentrique, & par consequent deux points d'une Tangente à la circonference de la Terre, pris du même côté du point d'attouchement, ne sçauroient être de niveau dans la rigueur Mathematique.

Mais comme la Terre eſt fort grande, & que dans une certaine étenduë ſa courbure ne differe nullement d'une ligne droite, on peut prendre ſans aucune erreur pour points de niveau ceux qui ſont dans cette étenduë. Ainſi les Anciens qui ne nivelloient à la fois qu'une diſtance de 20 pieds, n'étoient point à cet égard en danger de ſe tromper, quoiqu'ils en priſſent les deux extremités en ligne droite.

Si on nivelloit des diſtances beaucoup plus grandes, les deux extremités priſes en ligne droite ne pourroient plus appartenir à la circonference de la terre, mais à une Tangente de cette circonference, de ſorte que l'extremité où ſe feroit l'operation étant le point d'attouchement de cette tangente & de la circonference, l'autre extremité ſeroit auſſi celle d'une Secante tirée du centre de la terre, & le point qu'elle détermineroit ſeroit élevé au-deſſus de la circonference, & par conſequent au-deſſus du *vrai* niveau, de toute la quantité dont cette Secante ſurpaſſeroit le demi-diametre de la terre. Cette extremité d'une Secante eſt dite être dans le Niveau *apparent*, parce que c'eſt celui que la vûë donne, & il eſt bien aiſé de le reduire au vrai, puiſqu'on ſçait par la Trigonometrie de combien chaque Secante ſurpaſſe le Rayon; & que l'on a découvert par la Meſure de la Terre que l'Academie a faite quelle eſt la valeur préciſe de ſon Rayon.

Faute d'avoir cette valeur du Rayon de la Terre, les Anciens n'euſſent pû faire la reduction du niveau apparent au vrai, ou s'ils l'euſſent entrepriſe ils ſeroient tombés dans de grandes erreurs. Auſſi ne nivelloient-ils que des diſtances de 20 pieds où cette reduction n'étoit aucunement neceſſaire. On trouve par les Tables qui en ont été faites qu'à une diſtance de 50 toiſes le niveau apparent n'eſt élevé au deſſus du vrai que de $\frac{1}{7}$ de ligne, & par conſequent les Anciens avoient ſur ce point beaucoup plus de ſûreté qu'il ne leur en falloit.

La meſure de la Terre ayant été trouvée, la commo-

dité de reduire le niveau apparent au vrai, invita les Geometres de l'Academie à niveller d'un seul *coup* de grands distances, comme de 1000 toises. L'avantage de ces grands coups de niveau, est que l'on fait ici, par exemple, en une seule operation, ce que les Anciens ne faisoient qu'en trois cens, & outre le temps que l'on gagne, il est visible que trois cens operations sont naturellement sujettes à un nombre d'erreurs incomparablement plus grand qu'une seule. C'étoit aussi par cette raison que les Anciens qui regloient sur leurs nivellemens les grandes conduites d'eaux qu'ils faisoient, prenoient toûjours plus de pente qu'il n'étoit necessaire, ainsi qu'il a été dit dans l'Hist. de 1699*. Ils se défioient avec justice du succès de tant d'operations. Il paroît qu'ils mettoient à ces sortes d'Ouvrages beaucoup de travail & peu d'art, & nous, nous voulons presentement que l'art nous épargne le travail. * pag. 113

Pour niveller tout d'un coup de grandes distances, il faut avoir des Instruments qui donnent bien sûrement une ligne horisontale, puisque c'est celle dont l'extremité sera le niveau apparent, mais ce n'est pas une mediocre difficulté que de la déterminer dans la pratique.

Premierement il faut être bien sûr que cette ligne soit une ligne, c'est-à-dire conduite d'un seule point à un autre point, car autrement on prendroit à une grande distance pour le même point plusieurs points differents d'un même plan vertical, & assés éloignés l'un de l'autre, & il s'agit d'une grande précision dans la pratique du nivellement. Autrefois on se contentoit de deux Pinnules percées chacune d'un trou le plus petit qu'il étoit possible, & l'on supposoit que l'objet vû par ces deux trous n'etoit qu'un point, mais il s'en falloit beaucoup que ce n'en fût un, quelque petits que fussent les trous, & il s'en falloit d'autant plus que l'objet étoit plus éloigné. D'ailleurs pour peu que l'œil changeât de place & eût de mouvement dans le temps de l'observation, c'étoit un autre point que l'on voyoit. Pour re-

medier à ces inconvenient, l'on a imaginé dans l'Academie, il y a déja du temps, d'employer au lieu de Pinnules une Lunette avec un fil de Ver à soye très-delié posé au foyer du verre objectif, ou plûtôt avec deux fils qui se croisent. Leur intersection arrête tous les rayons partis d'un seul point de l'objet que l'on suppose éloigné, puisqu'elle se fait à l'endroit où ils se réünissent tous, & comme on voit les deux fils sur la peinture de l'objet qui se fait au Foyer, on est sûr que l'endroit où on les voit se couper n'est qu'un point de l'objet, ou du moins une partie aussi petite que l'épaisseur des fils. L'œil a beau changer de place, ce sont toûjours les rayons du même point qui sont arrêtés par l'intersection des fils, & l'on *pointe* toûjours au même point. Cet ingenieux expedient a été mis en pratique avec beaucoup de succés, depuis qu'il a été trouvé, mais M. de la Hire a jugé à propos d'y faire encore une reforme qui perfectionne*, & il substituë aux filets de Ver à soye des traits aussi déliés, & plus inalterables, tracés sur une petite glace.

* V. l'Hist. de 1701. p. 91.

En second lieu, il faut que la ligne du niveau apparent soit parfaitement horisontale. D'abord on songe naturellement aux surfaces des liqueurs qui se mettent toûjours de niveau. Aussi le Niveau des Anciens n'étoit qu'une piece de bois, longue de 20 pieds, égale à toute la distance qu'ils nivelloient d'un seul coup, & au milieu de laquelle étoit un petit tuyau plein d'eau. Il ne leur devoit pas être fort difficile de conduire un rayon visuel à une si petite distance le long de cette surface d'eau, mais pour de plus grandes distances, M. de la Hire a imaginé de mettre au-dessus de l'eau une Lunette avec ses fils au Foyer, dans une position exactement parallele à la surface de l'eau. Ce parallelisme fait la plus grande difficulté de l'execution. C'est là le même niveau dont il a été parlé dans l'Hist. de 1699.* à l'occasion de ce que M. Couplet y avoit ajoûté pour le rendre plus commode.

* p. 112 & 113.

Une ligne sera horisontale, pourvû qu'elle soit perpendiculaire à une ligne verticale, ainsi il suffira encore pour fonder la construction d'un Niveau de déterminer une ligne qui soit bien certainement verticale. C'est ce qu'on a fait par le moyen des poids suspendus. Leur point de suspension ou d'appui est certainement dans la même ligne verticale que leur centre de gravité, & pourvû que le fil qui les tient suspendus soit très-delié, il est lui-même cette ligne. Reste à poser une Lunete dont l'axe lui soit bien perpendiculaire, car dans tous les Niveaux modernes on se sert toûjours d'une Lunette, à cause de l'avantage qu'elle donne de ne pointer qu'à un seul point de l'objet, & de plus, parce qu'elle est aussi propre aux vûës les plus courtes qu'aux autres. On peut faire aussi que la Lunette elle-même tienne lieu de poids, & qu'étant suspenduë horisontalement elle donne pour ligne verticale celle qui joint son point de suspension & son centre de gravité. C'est sur ces suspensions que sont fondés les Niveaux de Mrs Huguens & Roëmer. Mais M. de la Hire les croit sujettes dans la pratique à plusieurs inconveniens expliqués dans son Memoire.

Il a voulu trouver un Niveau qui n'y fût point exposé. C'est une Lunette, non pas suspenduë par un point plus élevé que son centre de gravité, mais appuyée sur un point qui soit plus bas, & par consequent toûjours prête à tomber de côté ou d'autre à moins que d'être en équilibre. L'état de son équilibre détermine la ligne verticale, & ensuite l'horisontale qui la coupe à angles droits. Le détail de la construction est reservé au Memoire de l'Auteur. M. de la Hire assûre qu'il s'en est servi à niveller d'un seul coup 2000 toises de distance sans erreur sensible.

Il ne sera peut-être pas inutile d'avertir ici que les hauteurs apparentes des objets, même de ceux qui sont peu éloignés de la surface de la Terre, sont alterées par les refractions, & d'autant plus alterées que ces objets

sont ou plus élevés par rapport à l'Observateur, où à une plus grande distance. D'ailleurs la grandeur de ces refractions dépend aussi & de l'heure du jour, & de la constitution de l'air, sans aucune proportion qui soit encore bien connuë. On sçait en general qu'il peut y avoir de l'erreur sur les hauteurs apparentes, & en quelques occasions particulieres on sçait à peu près où elle peut aller. Les plus grands coups de Niveau sont à cet égard les plus dangereux, mais c'est un inconvenient commun à tous les Niveaux modernes, & qui étant presque suffisamment connu, n'a pas empêché que l'on n'ait fait de très-grands nivellemens avec une justesse étonnante. Les Anciens qui ne connoissoient point les refractions se seroient souvent fort écartés du but, s'ils eussent fait de grands nivellemens d'un seul coup, leur peu d'art en cette matiere étoit précisément le remede dont ils avoient besoin.

SUR LES VITESSES DES CORPS

MUS SUIVANT DES COURBES.

V. les M. p. 286.

IL ne suffit pas de découvrir une Verité, il faut encore sçavoir ce qui la produit, & d'où elle vient; car si on se trompe sur cette espece de cause, on peut croire qu'elle a lieu lorsqu'elle n'en a point, ou au contraire, & l'on donne à la Verité que l'on a découverte plus ou moins d'étenduë qu'elle n'en doit avoir. Ceci ne s'entend que des matieres delicates, & l'on peut assûrer que quand il en est question, une demonstration geometrique est capable de jetter dans l'erreur par les applications qu'on en fera, à moins qu'elle n'ait remonté jusqu'à la source de la Verité, & ne l'ait exposée dans ses premiers principes.

Galilée ayant trouvé ce beau Systême de la chûte des Corps

Corps pesants, reçû aujourd'hui de tous les Philosophes, par lequel les vîtesses d'un corps qui tombe verticalement sont à chaque moment de sa chute, comme les racines des hauteurs d'où il est tombé à compter depuis le commencement de la chute, trouva ensuite que si un corps tomboit sur un plan incliné, les vîtesses qu'il avoit en differents moments de sa chute seroient encore dans la même proportion, & en effet puisque ce corps tient de sa chute toute sa vîtesse, & qu'il ne tombe qu'autant qu'il y a de hauteur perpendiculaire dans se plan incliné, il paroît necessaire que sa vîtesse se mesure & se regle toûjours par cette hauteur, de même que si la chute etoit verticale. La proposition de Galilée est vraie & incontestable.

Elle le conduisit à croire que si un corps tomboit par deux plans inclinés contigus, & qui fissent un angle entre eux, à peu près comme un bâton brisé, la vîtesse se regleroit encore de la même maniere sur la hauteur verticale des deux plans pris ensemble, car enfin ce n'est encore que selon cette hauteur que se fait la chute, & de là vient toute la vîtesse. Cependant M. Varignon démontra en 1693. que cette proposition de Galilée, admise jusque-là par tous les Geometres, étoit fausse.

Sur ce fondement, il semble que les vîtesses d'un corps qui tombe en suivant la concavité d'une Courbe, d'une Cycloïde par exemple, ne doivent point être comme les racines des hauteurs. Une Courbe n'est que la suite d'une infinité de plans infiniment petits, contigus, & inclinés les uns aux autres, & par consequent la proposition de Galilée ne doit pas non plus être vraie dans ce cas-là. Cependant elle l'est, quoiqu'avec une certaine restriction.

Tout ce mêlange de verité & d'erreurs qui se ressemblent tant, & qu'il est si aisé de prendre les unes pour les autres, montre assés que l'on n'avoit point encore saisi les premiers principes. Quand on y est une fois parvenu, on voit une distance infinie entre la verité & l'er-

reur, & leur fausse ressemblance disparoît absolument.

M. Varignon a entrepris de démêler tout ce qui regarde les vîtesses des corps qui tombent, & de mettre cette matiere dans un jour où elle n'avoit point encore été. Il suppose toûjours selon le Systême de Galilée, que les vîtesses d'un corps qui tombe par une ligne verticale sont dans les differents moments de sa chute comme les racines des hauteurs correspondantes.

Le grand principe que M. Varignon employe, c'est celui des Mouvements composés, sur lequel il a autrefois fondé toute sa Mechanique. Quand un corps est mû en même temps par deux forces, qui ont des directions differentes, quelque angle que ces directions fassent entre elles, il prend une direction *composée* qui est la diagonale du parallelogramme que feroient entre elles les deux directions *simples*, & il décrit cette diagonale dans le même temps qu'il auroit décrit l'un ou l'autre des deux côtés du parallelogramme, de sorte que la vîtesse que lui auroit imprimée l'une ou l'autre des deux Forces est à celle qu'elles lui impriment toutes deux ensemble, comme le côté correspondant du parallelogramme est à la diagonale. Tout est donc connu dès que l'on a le rapport des deux Forces.

Un mouvement perpendiculaire ou parallele à un plan ne peut être conçû comme composé par rapport à ce plan, mais seulement quand il lui est oblique, & alors on le conçoit comme composé de deux autres mouvements l'un perpendiculaire & l'autre parallele, dont les differents rapports, variables à l'infini, déterminent les differentes obliquités dont le mouvement composé est capable.

Un corps qui se meut obliquement à l'horison, ne fût-il poussé que par une seule Force, peut donc être conçû comme poussé par deux, dont l'une auroit eu une direction horisontale, & l'autre une verticale, & sa vîtesse ne seroit ni celle que lui auroit donnée la Force horisontale, ni celle que lui auroit donnée la verticale,

mais celle qui resulteroit des deux, & qui seroit exprimée par la diagonale du parallelogramme qu'elles formeroient. Par consequent, puisque la Force verticale seule, ou, pour parler plus précisément, la pésanteur, auroit imprimé à ce corps une vîtesse, qui auroit été dans tous les moments de la chute comme les racines des hauteurs correspondantes, il faut qu'il ait une autre vîtesse lorsqu'il se meut obliquement.

Si ce corps tombe par sa seule pesanteur le long d'un plan incliné, il tombe encore obliquement à l'horison, & cependant il n'est pas dans le même cas que nous venons d'expliquer, & c'est là une chose qui avoit besoin d'être démêlée par M. Varignon. Ce corps qui tombe sur un plan incliné ne tombe que par l'action de sa pesanteur qui est verticale, & cette action est nécessairement oblique au plan incliné. Elle peut donc être conçûë comme composée de deux autres dont l'une soit perpendiculaire au plan incliné, l'autre parallele. Celle qui seroit perpendiculaire est entierement arrêtée par le plan, & toute la vîtesse que le corps auroit euë selon cette direction est anéantie & perduë. Il ne reste que la Force parallele, qui est effectivement celle dont le corps suit la direction, & dont il conserve toute la vitesse. Or il se trouve que les vîtesses qu'il tire de cette Force parallele & unique dans les differents moments de sa chute, sont dans la même raison que celles qu'il tireroit de la Force verticale seule, ou de la pesanteur agissant librement, & par consequent comme les racines des hauteurs.

Toute la difference des deux cas vient de ce que dans le premier le mouvement du corps est composé par rapport à l'horison, & composé de deux Forces qui toutes deux subsistent, & dans le second cas il est composé par rapport au plan incliné, & composé de deux Forces dont l'une est entierement détruite par l'opposition de ce plan. Dans le premier cas, le corps n'est point soutenu, il l'est dans le second.

Maintenant si un corps tombe le long de deux plans inclinés, contigus, & qui fassent entre eux un angle obtus, & une espece de concavité. M. Varignon a démontré, toûjours par la composition des mouvements, que ce corps à la rencontre du second plan perd quelque chose de sa vîtesse, que par consequent elle n'est pas la même à la fin de sa chute, ou à tel point qu'on voudra de sa chute par le second plan, que s'il n'étoit tombé que par le premier plan prolongé, & que la proportion des racines des hauteurs n'a donc plus de lieu, quoique Galilée l'ait crû. La raison de cette perte de vîtesse est que le mouvement qui étoit parallelle au premier plan devient oblique au second, puisqu'ils font un angle entre eux, ce mouvement oblique au second plan étant conçû comme composé, ce qu'il a de perpendiculaire à ce plan est détruit à sa rencontre & par son opposition, & une partie de la vîtesse perit aussi.

Plus ce que le mouvement oblique & composé a de perpendiculaire au second plan est petit, ou, ce qui est la même chose, moins les deux plans sont éloignés de n'en être qu'un, ou enfin plus leur angle obtus est grand, & l'aigu qui en est le complement, petit, moins le corps perd de sa vîtesse, & au contraire. M. Varignon détermine geometriquement qu'elle est sur toute la hauteur de la chute entiere la portion de vîtesse qui se perd à la rencontre du second plan. Elle est toûjours d'autant plus petite que l'angle aigu complement de l'obtus que font les deux plans est plus petit.

Les plans infiniment petits, contigus, & inclinés les uns aux autres, dont une Courbe est composée, faisant tous entre eux des angles obtus dont le complement est infiniment petit, il s'ensuit que si un corps tombe par sa pesanteur le long de la concavité d'une Courbe, la perte de vîtesse qu'il fait à chaque instant est infiniment petite. Mais une portion finie de Courbe, quelque petite qu'elle soit, étant composée d'une infinité de plans infiniment petits, le corps qui l'a parcouruë dans un temps fini,

quelque petit qu'il soit, a perdu une infinité de parties infiniment petites de sa vîtesse, & une infinité d'infiniment petits sont un infini de l'ordre *superieur*, c'est-à-dire qu'une infinité d'infiniment petits sont une grandeur finie, s'ils sont du premier ordre ou genre, & un infiniment petit du premier, s'ils sont du second, & ainsi de suite à l'infini. Donc si les pertes de vîtesse que fait un corps tombant le long d'une Courbe sont des infiniment petits du premier genre, elles feront une grandeur finie, lorsqu'il aura parcouru quelque portion finie de cette Courbe que ce soit, & par consequent elles devront être contées par rapport à la vîtesse dont il se meut, qui est toûjours finie, & les differentes vîtesses en differents temps de la chute ne seront point comme les racines des hauteurs. Mais si les pertes n'étoient que des infiniment petits du second genre, elle ne feroient toutes ensemble dans un temps fini, qu'un infiniment petit du premier, qui retranché d'une vîtesse finie ne la rendroit pas moindre, & laisseroit subsister la proportion des racines des hauteurs. Or M. Varignon démontre que les pertes de vîtesse sont des infiniment petits du second genre, d'où il suit que les chutes par des Courbes conservent la proportion des racines des hauteurs, quoique celles qui se font par differens plans inclinés contigus ne la conservent pas. Il ne seroit pas possible que sans la Geometrie des infiniment petits on vît aussi clair dans cette matiere, & l'on y peut remarquer combien ces differents ordres d'Infinis que l'on soupçonne d'abord d'être feints à plaisir, sont réels & solides.

Un corps qui tombe par un seul plan incliné, ou par une Courbe est donc dans le même cas à l'égard de la proportion des vîtesses, & comme dans la chute par le plan incliné cette proportion ne suit celle des racines des hauteurs que parce que le corps est soutenu par ce plan, & que tout ce qu'il a de mouvement perpendiculaire à ce plan est arrêté & détruit sans qu'il perde rien

du mouvement parallele, de même il faut dans la chute par la Courbe que le corps ſoit ſoutenu par cette Courbe, & coule en quelque ſorte le long de ſa concavité comme dans une eſpece de canal, qui à chaque point de ſa courbure laiſſe auſſi à ce corps tout ce qu'il a de mouvement parallele à la Tangente de ce point. Ce ſera la même choſe ſi un corps ſuſpendu décrit cette Courbe en vertu de ſa ſuſpenſion, car la ſuſpenſion le ſoutiendra de la même maniere qu'auroit fait la concavité de la Courbe. En un mot, afin que les vîteſſes d'un corps qui tombe par un ſeul plan incliné, ou par une Courbe, ſuivent les racines des hauteurs, il faut que le corps ſoit ſoutenu, qu'il perde tout ſon mouvement perpendiculaire au plan ou à la Courbe, conſerve tout le mouvement parallele, & ne ſe meuve que par ſa ſeule peſanteur.

Mais comme les vîteſſes ne ſuivent point les racines des hauteurs dans la chute d'un corps qui tombe obliquement à l'horiſon, ſans être ſoutenu par un plan, ou, ce qui vient au même, d'un corps pouſſé obliquement à l'horiſon par deux Forces differentes, de même la proportion des vîteſſes ne ſera plus celle des racines des hauteurs dans une chute par une Courbe que feront décrire au corps deux impulſions differentes, mêlées & combinées enſemble ainſi qu'il faudra pour la génération de cette Courbe, mais la vîteſſe ſera à chaque moment celle qui naîtra du concours des deux Forces, & quand même la peſanteur ſeroit l'une des deux, la proportion des racines des hauteurs ſeroit alterée par l'autre, qui ſelon la ſuppoſition agiroit.

Il ne faut donc pas calculer de la même maniere la vîteſſe de tous les corps qui tombent par des Courbes, & l'on doit admettre cette diſtinction nouvelle & ſubtile de M. Varignon entre les corps tombants par des Courbes qui les portent & les ſoutiennent, ou ſuſpendus équivalement, & ceux qui tombent en décrivrant ces Courbes par le mêlange de deux Forces qui les meu-

vent. Faute de cette attention, qu'il étoit facile de ne pas avoir, de grands Geometres auroient pû se méprendre.

Lorsqu'une Courbe est décrite par le mêlange ou le concours de deux Forces connuës, M. Varignon détermine aisément la vîtesse qui en resulte à chaque instant. Toute Courbe étant conçûë comme un Poligone infini, chaque côté infiniment petit est une diagonale; ou, ce qui est la même chose, l'hipotenuse d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés sont la difference de deux Ordonnées infiniment proches, & la portion infiniment petite de l'axe comprise entre ces deux Ordonnées. Un corps à qui deux Forces differentes font décrire une Courbe, ne décrivant à chaque instant qu'une de ces hipotenuses ou diagonales, elles representent la vîtesse composée qu'il a dans cet instant, & les deux autres côtés du triangle representent les vîtesses simples que chaque Force tendoit à lui imprimer separément. On a donc toûjours cette proportion; comme la difference de deux Ordonnées de la Courbe infiniment proches, ou la portion de l'axe comprise entre ces Ordonnées, est à l'hypotenuse ou côté infiniment petit correspondant, ainsi l'une ou l'autre des vîtesses que tendent à imprimer les deux Forces separément, est à la vîtesse composée qui resulte de leur concours.

Il n'y a nulle Courbe possible dont la nature ne soit suffisamment déterminée par le rapport des differences des Ordonnées aux portions de l'axe correspondantes, & l'on peut concevoir l'essence des Courbes en général comme consistant dans ce rapport, variable en une infinité de manieres. Or ce même rapport sera toûjours aussi celui des deux vîtesses simples dont le concours fera décrire une Courbe quelconque à un corps, & par consequent l'essence de toutes les Courbes en général est la même chose que le concours ou la combinaison, variable à l'infini, de toutes les Forces qui prises deux à deux peuvent mouvoir un même corps, & voilà une

Equation très-simple & très-generale de toutes les Courbes & de toutes les vîtesses possibles.

Par le moyen de cette équation, dès que les deux vîtesses simples du corps sont connuës, M. Varignon détermine aussi-tôt la Courbe qui en doit naître. Quelque variées que soient ces vîtesses, pourvû qu'elles suivent quelque progression reglée, ce qui est toûjours absolument necessaire, elles ne font qu'introduire la progression dans les differences, ou dans les portions de l'axe qui leur répondent.

Si l'on veut qu'une des deux vîtesses simples soit uniforme & toûjours égale, par exemple, la vîtesse horisontale d'un boulet de canon, on verra les differences ou les portions de l'axe qui répondront à cette vîtesse, devenir égales, & comme dans le cas du boulet de canon ou de tout autre corps pesant la seconde Force simple dont il sera poussé sera sa pesanteur, qui lui imprimera toûjours une vîtesse variée suivant les racines des hauteurs de la chute, on verra naître de cette combinaison une Parabole que le corps décrira. Dans cette Courbe les portions de l'axe qui sont entre des Ordonnées infiniment proches, étant prises dans la proportion des racines des hauteurs de la chute du corps pesant, les differences des Ordonnées sont toutes égales.

Il est à remarquer que par l'équation generale de M. Varignon la vîtesse uniforme & la vîtesse variée suivant les racines des hauteurs produisent la Parabole, indépendamment de l'angle que font entre elles les deux Forces ou projections qui impriment ces vîtesses, & que par consequent un boulet de canon tiré soit horisontalement, soit obliquement à l'horison décrit toûjours une Parabole, parce que dans ces deux cas la vîtesse qu'il tient de cette projection est toûjours uniforme. D'habiles Geometres ont eu bien de la peine à prouver que les projections obliques formoient des Paraboles aussi-bien que les horisontales, & cela vient tout d'un coup & de soi-même par la methode de M. Varignon.

En

En voici la raison essentielle & methaphisique. La Courbe n'est que le mélange qui resulte de deux Forces qui ont entre elles un certain rapport de grandeur ou de quantité; la Parabole, par exemple, est le mélange qui resulte d'une vîtesse uniforme & d'une vîtesse variée qui suit les racines des hauteurs, & ce mélange est necessairement determiné à être ce qu'il est par le rapport des deux vîtesses simples qui le forment. Si ces vîtesses simples sans changer de nature devenoient ou plus grandes ou plus petites, il est clair que le mélange qui en resulte ne changeroit pas de nature, mais seulement de grandeur. Ainsi qu'un boulet de canon tiré horisontalement soit tiré avec une moindre charge de poudre, & même, si l'on veut, qu'il tombe moins vîte, l'une des deux vîtesses simples ne laissera pas d'être toûjours uniforme, & l'autre variée de la même maniere, & par consequent le boulet décrira toûjours une Parabole, mais une Parabole plus petite. Maintenant que le boulet soit tiré selon une ligne oblique à l'horison, & plus élevée que l'horisontale, cette ligne oblique à l'horison sera composée d'une parallele ou horisontale, & d'une verticale. Entant qu'elle est horisontale, elle imprimera toûjours une vîtesse uniforme, entant qu'elle est verticale & plus élevée qu'une parallele à l'horison, elle agira contre la pesanteur du boulet, & en affoiblira l'action, mais sans en changer la nature, & par consequent il se trouve toûjours un mélange d'une vîtesse uniforme & d'une vîtesse qui suit les racines des hauteurs, ou, ce qui est la même chose, une Parabole, quoique differente. Si la ligne de projection du boulet étoit au-dessous d'une parallele à l'horison, l'action de la pesanteur seroit fortifiée, mais non pas changée. Donc quelque angle que fassent entre elles la ligne de projection du boulet, & l'action verticale de sa pesanteur, ou, ce qui revent au même, les deux Forces simples dont il est poussé, l'espece de la Courbe ne change point, mais seulement sa grandeur. Le même raisonnement se peut ap-

pliquer à toutes les autres Courbes resultantes du mélange de deux Forces, & l'angle ou la position de ces Forces entre elles est indifferente, quant à l'espece de la Courbe.

Un mélange de deux Forces déterminées ne peut donner qu'une certaine Courbe, mais une Courbe étant donnée on peut imaginer une infinité de Forces differentes, prises deux à deux, dont le mélange aura pû la produire. C'est ainsi que dans les Nombres le produit de 2 & de 30, par exemple, ne peut donner que 60, mais 60 peut être formé par la multiplication de plusieurs autres nombres entiers que 2, & 30, & par celle d'une infinité de nombres rompus. Et comme on peut prendre tel nombre qu'on voudra pour l'un des deux dont le produit doit former 60, après quoi le second, soit entier, soit rompu, viendra necessairement, & sera déterminé, de même une Courbe étant donnée on peut supposer telle vîtesse qu'on voudra pour l'une des deux dont le concours l'aura produite, mais ensuite l'autre vîtesse simple sera necessairement déterminée en consequence de la supposition arbitraire. Si l'on veut qu'un boulet de canon tiré horisontalement ou obliquement à l'horison ait décrit une Hiperbole, cette supposition enfermant une vîtesse uniforme, on trouvera quelle aura dû être celle que la pesanteur aura causée, & certainement on ne la trouvera pas dans la proportion des racines des hauteurs. On sçaura donc quelle devra être l'action de la pesanteur pour faire décrire aux corps jettés des Hiperboles, ou en general telles autres Courbes qu'on voudra.

Une Courbe étant donnée, ou, ce qui est la même chose, le rapport des portions de l'axe infiniment petites aux differences correspondantes, on peut sans changer la nature de cette Courbe établir telle progression qu'on voudra soit entre les portions de l'axe comparées seulement entre elles, soit entre les differences prises de la même maniere, mais quand on a une fois reglé

une progreſſion pour les unes ou pour les autres de ces grandeurs, la ſeconde n'eſt plus libre, & elle ſuit neceſſairement du rapport qui doit être entre les unes & les autres comparées enſemble. C'eſt là la raiſon eſſentielle qui fait que l'on peut imaginer une infinité de vîteſſes differentes, priſes deux à deux, également propres à former une certaine Courbe, & que l'une des deux vîteſſes étant determinée arbitrairement, l'autre devient neceſſaire.

Des Geometres fameux avoient déja ſongé à la generation des Courbes par les mouvemens composés, mais ceux qui n'ont pas connu ou admis la Geometrie des Infiniment petits ont dû être aſſés embarraſſés ou du moins fort bornés dans cette recherche. Ce n'eſt qu'en conſiderant les Courbes comme des Poligones infinis que l'on trouve que chaque côté infiniment petit eſt la diagonale que produit un mouvement composé, & cette idée ſi naturelle donne auſſi-tôt le dénouëment de tout.

De plus, il faut ſçavoir qu'il y a deux eſpeces de Courbes, les *Geometriques*, & les *Mechaniques*. Les Courbes geometriques ſont celles dont on peut exprimer & déterminer la nature par le rapport des Ordonnées aux Abſciſſes, qui ſont les unes & les autres des grandeurs finies, les Mechaniques ſont celles dont on ne peut exprimer ainſi la nature, parce que les Ordonnées & les Abſciſſes n'ont point de rapport reglé. Les Sections Coniques ſont geometriques, la Cycloïde, la Spirale, la Logarithmique, &c. ſont mechaniques. Dans la Geometrie des Infiniment petits la nature de toutes les Courbes ſoit geometriques, ſoit mechaniques peut également s'exprimer par le rapport des portions de l'axe infiniment petites aux differences correſpondantes, ou premieres, ou ſecondes ou troiſiémes &c. à l'infini. Toute la difference entre les Courbes geometriques & mechaniques, eſt que les mechaniques ne peuvent s'exprimer que par ce rapport, au lieu que les geometriques peuvent auſſi s'exprimer par le rapport des Ordonnées aux Abſciſſes, c'eſt-

à-dire que les mechaniques conduisent plus necessairement que les autres à la consideration de l'infini. De là il suit & que la Geometrie des Infiniment petits a une égale facilité dans les recherches qu'elle fait sur ces deux especes opposées de Courbes, & que toute autre methode doit en avoir beaucoup moins, sur tout à l'égard des mechaniques. Il est visible que la Theorie de M. Varignon fondée sur les Infiniment petits tant pour les Vîtesses que pour la generation des Courbes s'étend si naturellement tant aux Courbes geometriques qu'aux mechaniques, que l'on ne s'apperçoit pas en la suivant qu'il y ait aucune difference de nature entre ces Courbes. Cependant il y a tout lieu de croire que l'on s'en appercevroit bien par d'autres voies.

SUR LA PLUS GRANDE

PERFECTION POSSIBLE DES MACHINES, DONT UN FLUIDE EST LA FORCE MOUVANTE.

V. les M. p. 323.

JUsqu'ici l'on n'a sçû calculer les Machines, que pour l'état de l'équilibre. Une Machine étant construite ou imaginée, on voit par les bras de levier, par les distances des points fixes aux directions des Forces, en un mot par les chemins que doivent parcourir en même temps le Poids d'un côté, & de l'autre la Puissance, quel doit être le rapport de la Puissance au Poids afin que la Machine soit en équilibre, ou reciproquement par le rapport de la Puissance qu'on doit employer au Poids qu'il faut mouvoir, on trouve quels doivent être pour cet équibre de la Machine les chemins qu'ils parcourront l'un & l'autre, ou plûtôt qu'ils seront disposés à parcourir. Cet état d'équilibre trouvé, il est bien sûr

que la Machine sera mise en mouvement & executera l'effet qu'on lui demande, pour peu que l'on augmente soit la puissance, soit la vîtesse, ou que l'on diminuë le poids ou sa vîtesse. On ne considere point ici les Frotements, & on ne les considerera point dans la suite de ce discours.

Quand pour mettre la Machine en mouvement, on augmente ou l'on diminuë quelqu'une des quantités qui formoient l'équilibre, on ne fait qu'au hasard cette augmentation ou cette diminution, c'est-à-dire qu'on croit que la plus grande sera toûjours la meilleure, & que la Machine en ira d'autant mieux, ce qui est en effet une pensée fort naturelle. Mais plus elle l'est, plus on doit tenir conte à M. Parent d'en avoir reconnu l'erreur, il a découvert ce que personne n'avoit encore soupçonné, que pour mettre les Machines dans la plus grande perfection où elles peuvent être, il falloit, après avoir trouvé leur état d'équilibre, faire une certaine augmentation ou diminution précise soit sur les forces, soit sur les vîtesses, & que toute autre augmentation ou diminution rendroit les machines moins parfaites. Il est aisé de voir que cette nouvelle Theorie est en même temps une Regle par laquelle M. Parent peut déterminer si une Machine quelconque donnée est dans la plus grande perfection où elle puisse être, de combien de degrés elle en est eloignée, & quels changemens il faudroit faire pour l'y amener.

Il ne propose encore sa découverte que sur les Machines dont la Force mouvante est un fluide, telles que sont les Moulins à vent ou les Moulins à eau. Il les suppose construites comme elles le sont, & comme elles doivent l'être, c'est-à-dire, de maniere que le poids qu'il faut mouvoir soit appliqué à certains bras de levier, tandis que la Puissance est appliquée à d'autres, ou plus generalement que le poids ait en vertu de la disposition de la Machine une certaine vîtesse, & la puissance une autre, toûjours plus grande dans la pratique que celle du poids, puisque

ce n'est que par là qu'on peut tirer avantage d'une Machine. Après cela, voici par quelle suite de reflexions & de raisonnemens M. Parent arrive à son bût.

Le plus grand effet que puisse jamais produire un Fluide qui coule avec une certaine vîtesse, c'est d'emporter avec cette même vîtesse entiere un certain poids, qu'on peut concevoir comme posé dans une gondole. M. Parent appelle cet effet *naturel*, parce qu'il n'y entre aucune Machine. Il est visible que c'est le produit de ce poids qui peut être emporté, & de la vîtesse du Fluide, & comme cet effet outre qu'il est naturel, est constant & invariable, on peut le prendre pour une mesure fixe à laquelle on rapportera tous ceux qui se feront par des Machines, & qui varieront avec elles.

Dans toute Machine, dont un Fluide est la Force mouvante, il faut qu'il fasse son effort ou son impression sur quelque surface, telle qu'une aîle de Moulin, ou vanne, ou palette &c. La grandeur de cet effort ou impression dépend de la pesanteur & de la vîtesse du Fluide, & le Fluide étant toûjours supposé le même, de sa vîtesse seule. Si la vîtesse augmente, l'effort ou impression augmente selon les quarrés de la vîtesse, parce que quand un Fluide a 2 fois, 3 fois &c plus de vîtesse, non seulement il frape une surface avec 2 fois, 3 fois plus de force, mais il la frape avec 2 fois, 3 fois plus de parties en même temps, puisqu'elles se meuvent plus vîte, & par consequent l'impression du Fluide croît selon la raison doublée ou selon les quarrés de la vîtesse. Si une surface frapée par un Fluide qui tend à la mouvoir selon son cours, est arrêtée par un poids qui ne soit précisément que tel qu'il faut pour l'arrêter, il est clair que ce poids est égal à l'impression ou effort du Fluide contre la surface; si la vîtesse du Fluide devenoit 2 fois, 3 fois &c plus grande, il faudroit que le poids fût 4 fois, 9 fois plus grand, ou, ce qui est la même chose, l'effort du Fluide seroit 4 fois, 9 fois plus grand. Jusque-là, il n'y a encore nul effet de Machine.

Mais si l'on en faisoit une, quelle qu'elle pût être, où l'effort de Fluide agît par certains bras de levier, & un poids qu'il faudroit vaincre fût appliqué à d'autres bras, il est constant que dans l'état d'équilibre il y auroit égalité entre l'effort du Fluide, ou le poids qui lui est égal, multiplié par les bras de levier où il est appliqué, & le poids à élever multiplié par les siens. Le produit de ce poids à vaincre, & des bras de levier par lesquels il agit, ou, ce qui est la même chose, le produit de ce poids par sa vîtesse est tout l'effet de la Machine, ou, pour parler plus précisément du Fluide agissant par une Machine.

Mais cet effet n'est celui de la Machine que dans l'état d'équilibre, & il deviendra necessairement moindre dès qu'on la voudra mettre en mouvement, parce qu'il faudra pour cela diminuer le poids, ou faire quelque chose d'équivalent. Supposons que l'on s'en tienne à diminuer le poids, & laissons cette diminution indéterminée.

Une autre cause rend encore moindre l'effet de la Machine mise en mouvement. Dans l'état d'équilibre, le Fluide employe toute sa Force contre l'aîle ou vanne qu'il frape, parce qu'elle est alors immobile, mais quand la Machine se meut, cette aîle poussée par le Fluide fuit devant lui, pour ainsi dire, & en reçoit d'autant moins d'impression qu'elle fuit plus vîte, de sorte que si elle avoit pris du Fluide toute la vîtesse qu'il a, c'est-à-dire qu'elle se mût d'une vîtesse égale à la sienne, elle ne recevroit plus de lui aucune impression, & ne seroit frapée avec aucun effort. Mais la vanne ne prend jamais une vîtesse égale à celle du Fluide, parce qu'elle est toûjours retardée & appesantie par le poids qui doit être élevé, & auquel elle donne tout le mouvement qu'il a. Elle est d'autant plus retardée que ce poids est plus grand, & moins diminué par rapport à celui que la Machine eût soutenu dans l'état d'equilibre. Quand la vanne a pris du Fluide la plus grande vîtesse qu'elle puisse prendre, chargée de ce poids comme elle l'est, elle la con-

ſerve toûjours, & par conſequent ſe meut d'une vîteſſe uniforme. L'excès de la vîteſſe du Fluide par-deſſus cette vîteſſe uniforme de la vanne eſt tout l'effort dont il frape, & cet effort qui eſt le principe du mouvement de toute la Machine eſt beaucoup plus foible que celui ſur lequel on contoit dans l'état d'équilibre.

La vîteſſe de la vanne dépend donc & de la vîteſſe du Fluide, & de la grandeur du *poids diminué* par rapport au *poids d'équilibre*, & M. Parent trouve une expreſſion algebrique de cette vîteſſe de la vanne, où il n'entre que ces grandeurs. Il n'y a dans cette expreſſion rien d'inconnu ou d'indéterminé que la grandeur du poids diminué.

Voilà quelle eſt la vîteſſe de la vanne indépendamment de la conſtruction de la Machine & de la diſpoſition de ſes parties, mais comme la vanne eſt en même temps une partie de la Machine, à laquelle eſt appliquée la Force mouvante, ou le Fluide, ſa vîteſſe comparée à celle du poids qui doit être élevé, y a le même rapport qu'ont entre eux les differens bras de levier par leſquels agiſſent la force mouvante & le poids, & ces bras étant ſuppoſés connus par la conſtruction de la Machine, voila encore une expreſſion ſoit de la vîteſſe de la vanne comparée à celle du poids, ſoit de la vîteſſe du poids, dans laquelle tout eſt connu & déterminé, horſmis la grandeur du poids diminué.

Dès que l'on a l'expreſſion de la vîteſſe du poids diminué, il eſt viſible que le produit de ce poids par ſa vîteſſe eſt tout l'effet que la Machine peut produire.

Il n'entre dans l'expreſſion algebrique de cet effet de la Machine, que le poids diminué qu'on a laiſſé indéterminé & inconnu, le poids d'équilibre, la vîteſſe du Fluide, & les bras de levier oppoſés, toutes grandeurs que l'on ſuppoſe déterminées & connuës. Par conſequent l'effet de la Machine variera à l'nfini, & ſera plus grand ou plus petit, ſelon que l'on ſuppoſera le poids diminué plus ou moins grand, tout le reſte demeurant

le

le même. Or quand une grandeur est variable à l'infini, elle peut avoir un certain point d'accroissement qu'elle ne passera point, & après quoi elle ne fera que décroître. Telles sont les Ordonnées d'un Cercle, d'une Ellipse &c. Quand on a l'expression algebrique de la grandeur variable, on reconnoît très-facilement par la Geometrie des Infiniment petits, si elle a *un plus grand*, & en même temps on le trouve & on le détermine. M. Parent employant cette methode a vû que l'effet general & variable d'une Machine mûë par un Fluide étoit capable *d'un plus grand*, & que *ce plus grand* arrivoit lorsque le poids diminué étoit les $\frac{4}{9}$ du poids d'équilibre. Cette grande diminution vient de ce que le Fluide n'a de force pour mouvoir la Machine que l'excès de sa vîtesse sur celle de la vanne.

Lorsqu'un Fluide éleve par le moyen d'une Machine les $\frac{4}{9}$ du poids qu'il eût soutenu dans l'équilibre de la Machine, il fait donc le plus grand effet qu'il puisse jamais faire avec le secours d'une Machine, & cet effet comparé à celui que M. Parent appelle naturel, & qui consiste dans le produit de la vîtesse du Fluide par un poids qui en pourroit être emporté avec toute cette vîtesse, n'en est que les $\frac{4}{27}$.

Cela une fois trouvé, il est très-facile d'en conclure que dans une Machine qui feroit les $\frac{4}{27}$ de l'effet naturel du Fluide, c'est-à-dire dans une Machine parfaite, la vîtesse uniforme de la vanne seroit $\frac{1}{3}$ de celle du Fluide, & comme il y a entre cette vîtesse & celle du poids qui s'eleve un rapport reglé, que nous avons marqué ici, on détermine aussi-tôt quelle est cette vîtesse du poids dans l'état de perfection.

Toutes les consequences de cette nouvelle Theorie de M. Parent se presentent d'elles-mêmes. On sçaura donc presentement que quelque Machine qu'on fasse, qui doive être mûë par un Fluide, on n'en peut esperer un plus grand effet, que les $\frac{4}{27}$ de l'effet naturel du Fluide. On jugera sûrement du degré de perfection de

toute Machine donnée, il ne faudra que comparer son effet aux $\frac{4}{27}$ de l'effet naturel du Fluide, & voir combien il s'en éloigne. Quand on aura à construire une Machine, il la faudra construire de sorte que son effet aille jusqu'à ces $\frac{4}{27}$, ou, ce qui est la même chose, qu'elle éleve un poids qui soit les $\frac{4}{9}$ du poids d'équilibre, ou que la vîtesse de la vanne soit $\frac{1}{3}$ de celle du Fluide, & après cela on sera sûr d'avoir rendu la Machine parfaite, quelle que soit d'ailleurs sa construction, qui peut avec ces conditions varier encore en une infinité de manieres. Si l'on est assujetti à élever un certain poids, il faut construire une Machine de sorte que son poids d'équilibre soit à celui qu'on doit élever comme 9 à 4, & elle sera la plus parfaite qu'il soit possible par rapport à l'élevation du poids donné. Si l'on est assujetti à se servir d'une certaine Machine, il faut lui donner à élever les $\frac{4}{9}$ de son poids d'équilibre, & elle fait le plus grand effet qu'elle puisse faire, elle est même la plus parfaite qu'elle puisse être, si sa construction est telle qu'elle fasse soutenir au Fluide le plus grand poids qu'il puisse soutenir avec une Machine, ou, ce qui revient au même, si les $\frac{4}{9}$ de son poids d'équilibre multipliés par la vîtesse qu'elle leur fait prendre sont les $\frac{4}{27}$ de l'effet naturel du Fluide; si cela n'est pas, on voit de combien la Machine est éloignée de la perfection.

Jusqu'ici, pour ne pas compliquer trop d'idées differentes, nous avons appellé effet naturel du Fluide, le produit de sa vîtesse par un poids qu'il pourroit emporter avec toute cette vîtesse. Ce poids n'est que le Fluide même, qui selon la methode de M. de la Hire expliquée dans l'Hist. de 1702*, est consideré comme un Solide dont la hauteur est déterminée par la vîtesse du Fluide, dont la base est la vanne ou aîle que le Fluide frape, & dont on trouve le poids total par la pesanteur, connuë du Fluide, après qu'on a ainsi trouvé sa grandeur ou ses dimensions. Il est visible que ce Solide formé de cette maniere comprend & le poids & la vîtesse

* pag. 126. & suiv.

du Fluide, & par consequent represente son effet naturel. La grandeur de la vanne y entre necessairement, & si dans l'expression algebrique que M. Parent donne de l'effet general d'une Machine mûë par un Fluide, on y substituë ce Solide à la place de l'effet naturel, la grandeur de la vanne s'y trouve avec toutes les autres grandeurs qui y étoient deja, & cette expression ou équation comprend tout ce qu'il est possible qu'elle comprenne, la vîtesse du Fluide, sa pesanteur, la grandeur du poids que la Machine éleve, la vîtesse qu'il prend, les bras de levier par lesquels agit la Force mouvante, ceux par lesquels agit le poids, & la grandeur de la vanne. Il est necessaire de supposer la vîtesse & la pesanteur du Fluide connuës & déterminées, mais on peut laisser inconnuës & indéterminées les 5 autres grandeurs qui appartiennent à la Machine, ou qui en dependent, & après cela 4 de ces 5 grandeurs étant déterminées telles qu'on voudra, la 5e se détermine necessairement en vertu de l'équation, ce qui donne une extrême facilité pour le calcul de toutes ces Machines.

MOnsieur des Billettes continuant l'Art de l'impression, a fait une description de la Presse, & ensuite de l'mpression particuliere des Livres d'Eglise, Ecriteaux, Sentences &c.

De là il a passe à l'Art de graver en Tailledouce.

M. Jaugeon a commencé la Description des Arts & Métiers qui concernent la Soie.

MACHINES OU INVENTIONS

APPROUVÉES PAR L'ACADEMIE

EN M.DCCIV.

I.

UNe Machine roulante inventée par le Sieur Destau, dont l'axe porte sur chacune de ses 4 faces une rangée de Mousquets qu'un homme seul peut tirer à la fois. Elle peut être utile en quelques occasions. On en avoit déja proposé une semblable à l'Academie.

II.

Un Fusil brisé qui se charge par la culasse, inventé par M. de la Chaumette, executé d'une maniere particuliere, & fort ingenieuse, & qui peut être d'un bon usage entre les mains de personnes fort attentives.

III.

Un Dessein d'une Digue avec ses Portes, & toutes les autres choses necessaires pour rendre la Riviere de la Ruë près de Condat en Auvergne, capable de floter des Mats de Navire, le tout inventé par M. Bourgeois de Lyon. On y a trouvé beaucoup de nouveauté, d'esprit, & de solidité, & l'Academie n'a crû y pouvoir ajoûter que quelque avis, dont il a paru que l'Inventeur vouloit bien profiter.

IV.

Un Niveau de M. Verjus, qui peut servir après avoir été rectifié, mais qui est difficile à rectifier à cause de sa composition.

ELOGE DE M. LE MARQUIS DE L'HOPITAL.

GUillaume-François de l'Hôpital, Chevalier, Marquis de Sainte-Mesme, Comte d'Entremont, Seigneur d'Ouques, la Chaise, le Bréau, & autres Lieux, nâquit en 1661. d'Anne de l'Hôpital Lieutenant General des Armées du Roi, premier Ecuyer de feu S. A. R. Monsieur Gaston Duc d'Orleans, & d'Elisabeth Gobelin fille de Claude Gobelin Intendant des Armées du Roi, & Conseiller d'Etat Ordinaire.

La Maison de l'Hôpital a eu deux Branches, l'aînée dont étoit M. le Marquis de l'Hôpital a joint au nom de l'Hôpital celui de Sainte-Mesme, & la cadette qui est presentement éteinte a produit deux Maréchaux de France, & les Ducs de Vitri. Toutes deux avoient pour tige commune Adrien de l'Hôpital, Chambellan du Roi Charles VIII, Capitaine de Cent hommes d'armes, & Lieutenant General en Bretagne, qui commanda l'avant-garde de l'Armée Royale à la Bataille de S. Aubin en 1488.

M. le Marquis de l'Hôpital, que l'Academie des Sciences a perdu, étant encore enfant, eut un Précepteur, qui voulut apprendre les Mathematiques dans les heures de loisir que son emploi lui laissoit. Le jeune Ecolier qui avoit peu de goût, & même, à ce qu'il paroissoit, peu de disposition pour le Latin, eut à peine apperçû dans des Elemens de Geometrie des Cercles & des Triangles, que l'inclination naturelle, qui annonce presque toûjours les grands talents, se déclara ; il se mit à étudier avec passion ce qui auroit épouvanté tout autre que lui à la premiere vûë. Il eut ensuite un autre Précepteur, qui fut obligé par son exemple à se mettre dans la Geometrie, mais quoi qu'il fût homme d'esprit & appli-

qué, ſon Eleve le laiſſoit toûjours bien loin derriere lui. Ce que l'on n'obtient que par le travail n'égale point les faveurs gratuites de la nature.

Un jour M. le Marquis de l'Hôpital n'ayant encore que 15 ans, ſe trouva chés M. le Duc de Roannés, où d'habiles Geometres, & entre autres M. Arnaud, parlerent d'un Problême de M. Paſchal ſur la Roulette, qui paroiſſoit fort difficile. Le jeune Mathematicien dît qu'il ne deſeſperoit pas de le pouvoir reſoudre. A peine trouva-t-on que cette préſomption & cette témerité puſſent être pardonnées à ſon âge. Cependant peu de jours après il leur envoya le Problême reſolu.

Il entra dans le ſervice, mais ſans renoncer à ſa plus chere paſſion. Il étudioit la Geometrie juſque dans ſa Tente, & ce n'étoit pas ſeulement pour étudier qu'il s'y retiroit, c'étoit auſſi pour cacher ſon application à l'étude. Car il faut avoüer que la Nation Françoiſe auſſi polie qu'aucune autre Nation, eſt encore dans cette eſpece de barbarie, qu'elle doute ſi les Sciences pouſſées à une certaine perfection ne dérogent point, & s'il n'eſt point plus noble de ne rien ſçavoir. Il eut ſi bien l'art de renfermer ſes talents, & d'être ignorant par bienſéance, que tant qu'il fut dans le metier de la guerre, les gens les plus pénétrants ſur les defauts d'autrui ne le ſoupçonnerent jamais d'être un grand Geometre, & j'ai vû moi-même quelques-uns de ceux qui avoient ſervi en même temps, fort étonés de ce qu'un homme qui avoit vêcu comme eux & avec eux, ſe trouvoit être un des premiers Mathematiciens de l'Europe.

Il fut Capitaine de Cavalerie dans le Regiment Colonel General, mais la foibleſſe de ſa vûë qui étoit ſi courte qu'il ne voyoit pas à dix pas, lui cauſant dans le ſervice des inconveniens perpetuels, qu'il avoit longtemps, & inutilement tâché de ſurmonter, il fut enfin obligé de ſe rendre, & de quitter un métier où il pouvoit eſperer d'égaler ſes Ancêtres.

Dès que la guerre ne le partagea plus, les Mathe-

matiques en profiterent. Il jugea par le Livre de la Recherche de la Verité que son Auteur devoit être un excellent Guide dans les Sciences, il prit ses conseils, s'en servit utilement, & il se lia avec lui d'une amitié qui a duré jusqu'à la mort. Bien-tôt son sçavoir vint au point de ne pouvoir plus être caché; il n'avoit que 32 ans, lorsque des Problêmes, tirés de la plus sublime Geometrie, choisis avec grand soin pour leur difficulté, & proposés à tous les Geometres dans les Actes de Leipsic, lui arracherent sont secret, & le forcerent d'avoüer au Public qu'il étoit capable de les resoudre.

Le premier fut celui-ci proposé en 1673 par M. Bernoulli Professeur en Mathematique à Groningue. *Trouver une Courbe telle que toutes ses Tangentes terminées à l'Axe, soient toûjours en raison donnée avec les parties de l'Axe interceptées entre la Courbe & ces Tangentes.* Il ne fut resolu que par M. Leibnits en Allemagne, par M. Bernoulli en Suisse, frere de celui qui l'avoit proposé, par M. Huguens en Hollande, & par M. de l'Hôpital en France.

M. Huguens avouë dans les Actes de Leipsic que la difficulté du Problême l'avoit fait d'abord resoudre à n'y point penser, mais qu'une Question si nouvelle avoit troublé son repos malgré lui, l'avoit persecuté sans relâche, & qu'enfin il n'avoit pû y resister. On jugera aisément de quel genre pouvoit être en matiere de Geometrie, ce qui paroissoit si difficile M. Huguens.

Tous ceux qui sçavent au moins les Nouvelles des Sciences, ont entendu parler du celebre Problême de *la plus vite Descente*. M. Bernoulli de Groningue avoit demandé dans les Actes de Leipsic, *supposé qu'un corps pesant tombât obliquement à l'Horison, quelle étoit la ligne Courbe qu'il devoit décrire pour tomber le plus vite qu'il fût possible?* Car, comme il a été dit dans l'Histoire de l'Academie des Sciences de 1699*, ce Paradoxe assés étonnant étoit démontré, Que la ligne droite quoique la plus courte de toutes les lignes qui pouvoient être tirées entre les deux points donnés, n'étoit point le chemin * pag. 67.

que le Corps devoit tenir pour tomber en moins de temps. Il étoit certain d'ailleurs que la Courbe en question n'étoit point un Cercle, comme Galilée l'avoit crû, & la meprise d'un si grand homme peut servir à faire sentir la difficulté du problême. M. Bernoulli proposa cette Enigme au mois de Juin 1696, & donna à tous les Mathematiciens de l'Europe le reste de l'année pour y penser. Il vit que ces six mois n'étoient pas suffisans, il accorda encore les quatres premiers de 1697, & dans ces dix mois, il ne parut que quatre Solutions. Elles étoient de M. Neuton, de M. Leibnits, de M. Bernoulli de Basse, & de M. le M. de l'Hôpital. L'Angleterre, l'Allemagne, la Suisse, & la France fournirent chacune un Geometre pour ce Problême.

On retrouve ces mêmes noms à la tête de quelques Solutions semblables dans les Actes de Leipsic, & ils y semblent être en possession des connoissances les plus rares, & les plus élevées.

* pag. 78. On a même rapporté dans l'Hist. de 1700.* un Problême proposé, comme presque tous les autres, par M. Bernoulli de Groningue, & qui n'a été resolu que par M. de l'Hôpital. Il s'agissoit de *Trouver dans un plan vertical une Courbe telle qu'un Corps qui la décriroit, descendant librement, & par son propre poids, la presât toûjours dans chacun de ses points avec une force égale à sa pesanteur absoluë.* On a tâché de faire sentir alors les differens embarras de ce Problême, c'est-à-dire sa beauté. Les Geometres d'aujourd'hui ne sont pas aisés à contenter sur les difficultés, & ce qui a fait sortir Archimede du Bain pour crier par les ruës de Siracuse, *Je l'ai trouvé*, ne seroit pas pour eux une découverte bien glorieuse.

* pag. 95. L'Hist. de l'Academie de 1699* a parlé encore d'une Solution de M. le Marquis de l'Hôpital, où peu d'autres auroient pû atteindre : M. Neuton dans son excellent Livre des *Principes Mathematiques de la Philosophie naturelle* a donné la *figure du Solide qui fendoit l'eau, ou tout autre liquide avec le moins de difficulté qu'il fût possible.*

Mais

Mais il n'a point laissé voir par quel art ni par quelle route il est arrivé à déterminer cette figure. Son secret lui a paru digne d'être caché au Public. M. Fatio, Geometre fameux, se piqua de le découvrir, & il en envoya à M. de l'Hôpital une Analise imprimée. Elle contenoit 5 grandes pages in 4° presque toutes de calcul. M. de l'Hôpital effrayé de la longueur & paresseux d'une maniere nouvelle, crut qu'il auroit plûtôt fait de chercher lui-même cette solution. Il l'eut effectivement trouvée au bout de deux jours, & elle étoit simple & naturelle. C'étoit là un de ses grands talens. Il n'alloit pas seulement à la Verité, quelque cachée quelle fût, il y alloit par le chemin le plus court. Une espece de fatalité veut qu'en tout genre les methodes ou les idées les plus naturelles, ne soient pas celles qui se presentent le plus naturellement. On se met presque toûjours en trop grands frais pour les recherches qu'on a entreprises, & il y a peu de genies, heureusement avares, qui n'y fassent que la dépense absolument necessaire. Ce n'est pas qu'il ne faille de la richesse & de l'abondance pour fournir aux dépenses inutiles, mais il y a plus d'art à les éviter, & même plus de veritable richesse.

Il seroit trop long de rapporter ici tous les Chef-d'œuvres de Geometrie dont M. de l'Hôpital, & le petit nombre de ses pareils ont embelli les Journaux ou d'Allemagne, ou de France. On soupçonnera sans doute que pour entrer dans ces Questions qui leur étoient reservées, ils devoient avoir, outre leur genie naturel, quelque Clé particuliere, qui ne fût qu'entre leurs mains. Ils en avoient une en effet, & c'étoit la Geometrie des Infiniment petits, ou du Calcul Differentiel, inventée par M. Leibnits, & en même temps aussi par M. Neuton, & toûjours ensuite perfectionnée & par eux, & par Mrs Bernoulli, & par M. de l'Hôpital.

L'illustre M. Huguens qui n'étoit point l'Inventeur du Calcul differentiel, comme M. Leibnits, qui ne l'avoit point employé dans toutes ses études geometriques,

comme M. de l'Hôpital, & M[rs] Bernoulli, qui étoit parvenu ſans ce ſecours à des Theories très-élevées, & s'étoit fait une reputation des plus brillantes, qui pouvoit, à la maniere des autres hommes, & peut-être plus legitimement, mépriſer ce qu'il ne connoiſſoit point, & traiter d'inutile ce qui ne lui avoit pas été neceſſaire pour ſes grands Ouvrages, avoit jugé cependant & par le merite de ceux qui employoient cette Methode, & par les miracles qu'il en voyoit ſortir, qu'elle étoit digne qu'il l'étudiât; il avoit été aſſés grand homme pour avoüer qu'il pouvoit encore apprendre quelque choſe en Geometrie, il s'étoit adreſſé à M. de l'Hôpital qui avoit preſque la moitié moins d'âge que lui, pour s'inſtruire du Calcul differentiel, & ſans doute ce trait de la Vie de M. de l'Hôpital eſt encore plus glorieux à M. Huguens qu'à lui.

Ce n'eſt pas que M. Huguens ne connût déja par lui-même le Pays de l'Infini, où l'on eſt conduit à chaque moment par le Calcul differentiel, il avoit été obligé de penetrer juſque-là dans quelques-unes de ſes plus ſubtiles recherches, ſur tout dans celles qu'il avoit faites pour l'invention immortelle de la Pendule; car la fine Geometrie ne peut aller loin ſans percer dans l'Infini. Mais il y a bien de la difference entre ſçavoir en general la Carte d'un Pays, ou en connoître en particulier toutes les routes, & juſqu'à ces petits ſentiers, qui épargnent tant de peine aux Voyageurs.

M. Huguens étoit alors en Hollande, où il s'étoit retiré après avoir quitté Paris, & l'Academie des Sciences, dont il étoit un des principaux ornemens. Il paroît par beaucoup de Lettres de lui qu'on a trouvées dans les papiers de M. de l'Hôpital, & ſur tout par celles qui ſont des années 1692 & 1693, qu'il conſultoit à M. de l'Hôpital ſes difficultés ſur le Calcul differentiel; que quand quelque choſe l'arrêtoit, il ne s'en prenoit pas à la Methode, mais à ce qu'il ne la poſſedoit pas aſſés; *qu'il voyoit avec ſurpriſe & avec admiration l'étenduë & la fecondité de*

cet Art; que de quelque côté qu'il tournât sa vûë, il en découvroit de nouveaux usages; qu'enfin, ce sont ses termes, *il y concevoit un progrès & une speculation infinie.* Il a même déclaré publiquement dans les Actes de Leipsic, que sans une *Equation differentielle* il ne seroit pas venu à bout de trouver la Courbe dont les Tangentes, & les parties de l'Axe sont toûjours en raison donnée. *Et même*, ajoûte-t-il dans les mêmes Actes, *s'il faut remarquer dans ce Problême une Analise nouvelle & singuliere qui ouvre le chemin à quantité de choses sur la Theorie des Tangentes, comme l'a très-bien observé l'illustre inventeur d'un Calcul, sans lequel nous aurions bien de la peine à être admis dans une si profonde Geometrie.* Il écrivit en même temps à M. de l'Hôpital qu'il devoit à ses *enseignemens* cette Equation differentielle qui lui avoit donné le dénouëment du Problême.

Jusque-là, la Geometrie des Infiniment petits n'étoit encore qu'une espece de Mistere, &, pour ainsi dire, une Science Cabalistique renfermée entre cinq, ou six personnes. Souvent on donnoit dans les Journaux les Solutions sans laisser paroître la Methode qui les avoit produites, & lors même qu'on la découvroit, ce n'étoient que quelques foibles rayons de cette Science qui s'échapoient, & les nuages se refermoient aussi-tôt. Le Public, ou pour mieux dire, le petit nombre de ceux qui aspiroient à la haute Geometrie, étoient frapés d'une admiration inutile qui ne les éclairoit point, & l'on trouvoit moyen de s'attirer leurs applaudissemens, en retenant l'instruction dont on auroit dû les payer.

M. de l'Hôpital resolut de communiquer sans reserve les tresors cachés de la nouvelle Geometrie, & il le fit dans le fameux Livre de l'*Analise des Infiniment petits*, qu'il publia en 1696. Là furent dévoilés tous les secrets de l'Infini Geometrique, & d'Infini de l'Infini, en un mot, de tous ces differens ordres d'Infinis, qui s'élevent les uns au dessus des autres, & forment l'Edifice le plus étonnant & le plus hardi que l'Esprit humain ait jamais osé imaginer.

Comme il y a des rapports determinés entre les grandeurs finies, qui ſont l'unique objet des recherches Mathematiques, & les grandeurs de ces differens ordres d'Infinis, on parvient par la voie de l'infini à des connoiſſances ſur le fini, où ne pourroit jamais atteindre toute autre Methode, qui n'auroit pas l'audace, & en même temps l'adreſſe de manier l'infini. Le Livre des Infiniment petits fut donc tout brillant de verités inconnuës à la Geometrie ancienne, & non ſeulement inconnuës, mais ſouvent inacceſſibles à cette Geometrie. Les anciennes verités s'y trouvoient comme perduës dans la foule des nouvelles, & la facilité avec laquelle on les voyoit naître faiſoit regreter les efforts, qu'elles avoient autrefois coûtés à leurs inventeurs. Des Démonſtations qui par d'autres Methodes auroient demandé un circuit immenſe, en cas qu'elles euſſent été poſſibles, ou qui même entre les mains d'un autre Geometre inſtruit de la même Methode, auroient encore été longues & embarraſſées, étoient d'une ſimplicité & d'une brieveté, qui les rendoient preſque ſuſpectes.

Tel eſt l'effet des Methodes generales, quand on a une fois ſçû les découvrir. On eſt à la ſource, & on n'a plus qu'à ſe laiſſer aller au cours paiſible des conſequences. Une ſeule Regle du Livre de M. de l'Hôpital donne les Tangentes de toutes les Courbes imaginables; une autre, toutes les plus grandes, ou plus petites Appliquées, en tous les points d'Inflexion, & de Rebrouſſement, ou toutes les Dévelopées, ou toute la Catoptrique à la fois, ou toute la Dioptrique : des Traités entiers faits par de grands Auteurs ſe reduiſent quelquefois à quelques Corollaires, que l'on rencontre en chemin, & qu'on diſtingue à peine dans la multitude; tout ſe rapporte à des eſpeces de Siſtêmes que M. de l'Hôpital a commencé à mettre dans la Geometrie, & qui vont y répandre un nouveau jour.

Il y a, ſur tout en Mathematique, plus de bons Livres qu'il n'y en a de bien faits, c'eſt-à-dire qu'on en voit aſſés

qui peuvent instruire, & peu qui instruisent avec une certaine Methode, &, pour ainsi dire, avec un certain agrément. C'est bien assés d'avoir une bonne matiere entre les mains, on se neglige sur la forme. M. de l'Hôpital a donné un Livre aussi bien fait que bon, il a eu l'art de ne faire d'une infinité de choses qu'un assés petit Volume, il y a mis cette brieveté & cette netteté si délicieuses pour l'esprit, l'ordre & la précision des idées l'ont presque dispensé d'employer des paroles, il n'a voulu que faire penser, plus soigneux d'exciter les découvertes d'autrui, que jaloux détaler les siennes.

Aussi cet Ouvrage a-t-il été reçû avec un applaudissement universel, car l'applaudissement est universel, quand on peut très-facilement conter dans toute l'Europe les suffrages qui manquent, & il doit toûjours en manquer quelques-uns aux choses nouvelles, & originales, sur tout quand elles demandent à être bien entenduës. Ceux qui remarquent les évenemens de l'Histoire des Sciences, sçavent avec quelle avidité l'Analise des Infinimens petits a été saisie par tous les Geometres naissans, à qui l'ancienne & la nouvelle Methode sont indifferentes, & qui n'ont d'autre interest que celui d'être instruits. Comme le dessein de l'Auteur avoit été principalement de faire des Mathematiciens, & de jetter dans les esprits les semences de la haute Geometrie, il a eu le plaisir de voir qu'elles y fructifioient tous les jours, & que des Problêmes réservés autrefois à ceux qui avoient vieilli dans les épines des Mathematiques, devenoient des coups d'essai de jeunes gens. Apparemment la revolution deviendra encore plus grande, & il se seroit trouvé avec le temps autant de Disciples qu'il y eût eu de Mathematiciens.

Après avoir veu l'utilité dont étoit son Livre des Infiniment petits, il s'étoit engagé dans un autre travail aussi propre à faire des Geometres. Il embrassoit dans ce dessein les Sections Coniques, les Lieux geometriques, la Construction des Equations, & une Theorie

des Courbes Mechaniques. C'étoit proprement le plan de la Geometrie de M. Descartes, mais plus étendu, & plus complet. Il ne prétendoit pas que cet ouvrage fût aussi original, ni aussi sublime que le premier; il auroit pû tourner ses recherches du côté du Calcul Integral, qui suit & qui suppose le Differentiel, qui a de plus grandes difficultés, & jusqu'à present insurmontables, & qui par là occupe aujourd'hui les plus grands Geometres, & est devenu l'objet de leur ambition; mais il avoit préferé une entreprise dont le Public devoit tirer une instruction plus generale & plus necessaire, & le Zele de la Geometrie l'avoit emporté sur l'interest de sa gloire. Cependant je suis témoin qu'il ne pouvoit s'empêcher de regretter le Calcul Integral.

Cet ouvrage étoit presque fini, lors qu'au commencement de 1704 il fut attaqué d'une Fiévre qui ne paroissoit d'abord aucunement dangereuse, mais comme on vit qu'elle resistoit à tous le differens remédes qu'on employoit, on commença à craindre, & le Malade n'attendit pas un plus grand peril pour songer à la mort. Il s'y disposa d'une maniere très-édifiante, & enfin il tomba dans une Apoplexie dont il mourut le lendemain 2 Février, âgé 43 ans.

Quelques-uns ont attribué sa mort aux excès qu'il avoit faits dans les Mathematiques, &, ce qui pourroit le confirmer, j'ai sçû de lui-même que souvent des matinées qu'il avoit destinées à cette étude etoient devenuës des journées entieres sans qu'il s'en apperçût. Il avoit voulu y renoncer par le soin de sa santé, mais il n'avoit jamais pû soutenir cette privation plus de 4 jours. De plus, il sera assés naturel de croire qu'il avoit dû faire de grands efforts d'esprit, quand on songera à quel point il étoit parvenu à l'âge de 43 ans, & combien de temps dans une vie si courte avoit été perdu pour les Mathematiques. Il avoit servi, il étoit d'une naissance qui l'engageoit à un grand nombre de devoirs, il avoit une Famille, des soins domestiques, un bien très-considera-

ble à conduire, & par consequent beaucoup d'affaires, il étoit dans le commerce du monde, & il y vivoit à peu près comme ceux dont cette occupation oisive est la seule occupation, il n'étoit pas même ennemi des plaisirs ; voilà bien des distractions, & quelque rare talent qu'on lui suppose pour les Mathematiques, il est impossible qu'une prodigieuse application n'ait suppleé au peu de temps. Cependant il n'a jamais paru que l'étude ait alteré sa santé, il avoit l'air de la meilleure & de la plus ferme constitution qu'on puisse desirer. Il n'étoit nullement sombre, ni rêveur, au contraire, assés porté à la joie, & il sembloit n'avoir payé par rien ce grand genie Mathematique.

On sentoit dans ses discours les plus ordinaires la justesse, la solidité, en un mot, la Geometrie de son esprit; il étoit d'un commerce facile, & d'une probité parfaite, ouvert & sincere, convenant de ce qu'il étoit parce qu'il l'étoit, & n'en tirant nul avantage, veritable modestie dun grand homme, prompt à déclarer qu'il ignoroit, & à recevoir des instructions, même en matiere de Geometrie, s'il lui étoit possible d'en recevoir, nullement jaloux, non par la connoissance de sa superiorité, mais par équité naturelle, car sans cette équité, ceux qui se croyent & qui sont même les plus superieurs aux autres, sont encore jaloux.

Il avoit épousé Marie Charlotte de Romilley de la Chesnelaye, Demoiselle d'une ancienne noblesse de Bretagne, & dont il a eu de grands biens. Leur union a été jusqu'au point qu'il lui a fait part de son genie pour les Mathematiques. Il en a laissé un fils, & trois filles.

Sa place d'Academicien Honoraire a été remplie par M. le Marquis de Dangeau, Gouverneur de Touraine, Conseiller d'Etat ordinaire, & Grand Maître des Ordres Royaux & Militaires de Nôtre-Dame du Mont Carmel, & de S. Lazare de Jerusalem, Chevalier des Ordres du

Roi, Chevalier d'Honneur de Madame la Duchesse de Bourgogne, l'un des Quarante de l'Academie Françoise.

FIN.

MEMOIRES,



MEMOIRES DE MATHEMATIQUE ET DE PHYSIQUE,

TIREZ DES REGISTRES de l'Academie Royale des Sciences.

De l'Année M. DCCIV.

OBSERVATION

De la quantité d'eau de pluïe qui est tombée à l'Observatoire, avec les hauteurs du Thermometre & du Barometre pendant l'année 1703.

PAR M. DE LA HIRE.

LORSQUE j'entrepris de faire des observations exactes sur la quantité d'eau de pluïe qui tomboit à l'Observatoire pendant le cours d'une année, je n'avois point d'autre vûë que d'en tirer quelques connoissances pour l'origine des Fontaines, surquoy j'ay fait plusieurs remarques; 1704. 9. Janver.

& dont j'ay tiré une utilité très-considerable pour la construction des Citernes, comme je l'ay rapporte dans le Memoire que j'ay lû à l'Assemblée publique de l'Academie le 18 Avril 1703. Mais comme on est persuadé par la plus grande partie des observations qu'il ne pleut ordinairement que lorsque l'air devient plus leger, ce qu'on connoît par la descente du mercure dans le tuyau du Barometre, j'ay crû que je devois joindre aux observations de la pluïe, celles du Barometre, & rapporter en même tems les hauteurs du Thermometre, pour connoître quel a été le degré de chaleur ou de froid lorsque la pluïe à été plus ou moins abondante. J'ay comparé ces hauteurs differentes du Thermometre, à celles où il demeure toûjours dans le fond des Carrieres de l'Observatoire, laquelle je considere comme la chaleur moyenne & l'état moyen du Thermometre rempli d'esprit de vin dont je me sers, & cette hauteur est de 48 degrés.

Voici la quantité d'eau de pluïe qui est tombée à l'Observatoire pendant chaque mois de l'année 1703, laquelle est mesurée par la hauteur qu'elle auroit, si rien ne s'étoit dissipé ou évaporé. J'ay déja rapporté dans d'autres Memoires semblables à celuy-ci, la maniere dont je fais ces observations; c'est pourquoy je ne le repeteray pas ici. Et quoyque ces observations ayent été faites jour par jour, j'ay crû qu'il suffiroit d'en donner le résultat de chaque mois, avec quelques remarques à ce sujet, & principalement des vents qui ont regné.

En Janvier la hauteur de l'eau de pluïe a été de 9 lignes $\frac{1}{2}$, qui est presque toute tombée vers le commencement du mois, avec un vent du côté de l'Oüest, tirant tantôt au Sud & tantôt au Nord. Dans la fin du mois le vent a presque toûjours été du côté du Nord & sans pluïe.

En Fevrier il y a eu 14 lignes & $\frac{2}{3}$ d'eau. Le vent a été assez inconstant, mais la plus grande partie du mois il a été vers le Sud.

En Mars il n'a plû que 4 lignes, quoyque le vent ait

presque toûjours été vers l'Oüest entre le Nord & le Sud.

En Avril il est tombé 16 lignes & $\frac{1}{2}$ d'eau distribuée assez également dans tout le mois, le vent étant presque toûjours au Sud en tirant vers l'Oüest, & rarement vers le Nord.

En May j'ay trouvé 34 lignes $\frac{1}{4}$ d'eau. Le vent dominant a été l'Oüest, qui s'est tourné quelquefois au Sud, mais le plus souvent au Nord.

En Juin il n'est tombé que 23 lignes d'eau, le vent étant presque toûjours à l'Oüest.

En Juillet il a plu 28 lignes $\frac{1}{4}$, qui sont tombées au commencement, au milieu & à la fin du mois. Dans le tems de pluïe le vent étoit presque toûjours à l'Oüest tirant au Sud & au Nord, & dans les intervalles il a été assez souvent au Nord & un peu à l'Est.

En Aoust la pluïe a fourni 23 lignes $\frac{1}{2}$, dont il en est tombé 13 lignes $\frac{1}{2}$ le 12 du mois, avec un peu d'orage au commencement, le vent étant Est Sud-Est. Le vent a presque toûjours été au Nord, & tirant quelquefois à l'Est & à l'Oüest.

En Septembre toute la hauteur de l'eau de la pluïe est montée à 20 lignes $\frac{1}{4}$, qui a été distribuée dans tout le mois. Le vent dominant a été le Sud-Oüest.

En Octobre j'ay recüeilli 17 lignes d'eau, qui est tombée en petite quantité à chaque fois pendant le cours du mois. Le vent a presque toûjours été à l'Oüest tirant au Sud, & rarement au Nord & à l'Est.

En Novembre je n'ay ramassé que 13 lignes d'eau, qui est tombée au commencement & vers la fin du mois avec un vent de Sud. Depuis le 4 du mois jusqu'au 19 il n'a point plu, le vent étant toûjours à l'Est, & quelquefois au Nord.

En Decembre il n'est tombé que 3 lignes & $\frac{1}{4}$ d'eau, mais y a eu beaucoup de broüillards. Dans les deux tiers du mois vers la fin il n'a point plu, quoyque le vent ait été assez souvent vers l'Oüest, hormis dans les derniers jours où il étoit aux environs de l'Est.

La somme de l'eau de la pluïe de toute l'année a été de 208 lignes $\frac{1}{4}$, ou bien 17 pouces 4 lignes $\frac{1}{4}$, ce qui est un peu moins qu'à l'ordinaire qui est de 19 pouces; en sorte que l'on peut dire que cette année est une des plus seches de ces Païs-ci.

Les quatre mois de May, Juin, Juillet & Aoust ont plus donné d'eau que les huit autres ensemble, ce qui arrive ordinairement, quoyqu'il n'ait pas fait d'orages considerables.

Le peu de nége qui est tombée dans le commencement de cette année, ne merite pas qu'on y ait quelque égard. On voit par là que ce n'est pas la grande quantité de nége qui rend la terre plus fertile, comme on le croit communément, puisque cette année a donné beaucoup de grains & de fruits. Il est vray que la nége demeurant longtems sur la surface de la terre, y peut retenir les sels qui s'en élevent continuellement, & qui rentrant dans la terre lorsque la nége se fond, peuvent la rendre plus fertile; mais aussi il peut y avoir des pluïes qui feront le même effet, si elles se trouvent impregnées des mêmes sels.

Le froid n'a pas été considerable dans tout le mois de Janvier & de Fevrier, où il est ordinairement le plus grand, puisque mon Thermometre n'est pas descendu jusqu'à 26 degrés; & j'ay remarqué qu'il ne commence à geler que quand ce Thermometre est à 32 degrés; d'où l'on peut voir aussi qu'il n'y a pas eu de gelée considerable. Dans les derniers mois de cette année le froid n'a pas été si grand qu'au commencement.

Si le froid n'a pas été considerable pendant toute cette année; la chaleur n'a été aussi que mediocre & de peu de durée; & je trouve que les jours les plus chauds ont été le 27 May, les derniers jours de Juillet & les premiers d'Aoust, où le Thermometre étoit vers 60 degrés. Le jour le plus chaud a été le 12 Aoust, où le Thermometre est monté à 64 degrés. Ces observations sont toûjours faites vers le lever du Soleil, qui est le tems où l'air est le plus froid; & entre deux ou trois heures après midi, la

chaleur eſt la plus grande de la journée. Pendant l'Eſté j'ay remarqué qu'entre deux & trois heures après midi, le Thermometre s'éleve de 10 ou 12 degrés plus qu'il n'eſt le matin au lever du Soleil, quoyque ce Thermometre ſoit toûjours à l'ombre.

Le 28 jour d'Avril le Thermometre ayant été le matin à 42 degrés, & le Barometre à 27 pouces 3 lignes $\frac{1}{2}$, il y eut un orage & un tonnerre aſſez fort; & l'on m'a dit que vers Villeneuve S. Georges il étoit tombé ſur la terre une très-grande flamme qui avoit épouvanté ceux qui étoient aux environs, & qui n'avoit fait aucun mal à ceux qui étoient à l'endroit où elle tomba.

Pour le Barometre il a été au plus haut le 10 Decembre au ſoir à 28 pouces 4 lignes & $\frac{1}{6}$ à la hauteur de la grande ſalle de l'Obſervatoire, & dans tout le mois de Decembre le Barometre s'eſt toûjours maintenu très-haut; auſſi il n'a plu que 3 lignes $\frac{1}{5}$, & c'eſt ce qui confirme ce qu'on remarque ordinairement qu'il ne pleut que très-rarement quand le Barometre eſt plus élevé que ſon état moyen. Il eſt auſſi arrivé à peu près la même choſe dans le mois de Mars, où il n'a plu que 4 lignes: mais le Barometre n'a pas été tout-à-fait ſi haut que dans le mois de Decembre.

Le 3 Janvier le Barometre étoit au plus bas de l'année à 26 pouces 6 lignes $\frac{1}{4}$ avec un peu de pluïe, & ſans orage comme il arrive aſſez ſouvent quand il eſt fort bas. Ainſi la difference entre la plus grande & la moindre hauteur du Barometre, a été cette année de 1 pouce 9 lignes $\frac{1}{5}$, qui eſt un peu plus que l'ordinaire qui ne va qu'à 1 pouce 6 lignes.

J'ay obſervé le 18 Decembre la declinaiſon de l'aiguille aimantée de 9° 6′ du Nord vers l'Oüeſt avec une aiguille de 8 pouces de longueur. Cette aiguille eſt très bien faite, & elle eſt renfermée dans une boëte de bois de figure quarrée; & pour faire l'obſervation je place toûjours le côté de cette boëte au même endroit d'un pilier de la terraſſe baſſe de l'Obſervatoire, dont je ſuis aſſuré de ſa

position dans la ligne meridienne, par des observations très exactes du passage du centre du Soleil dans le meridien.

OBSERVATION

De l'Eclipse de Lune du 23 Decembre 1703, à l'Observatoire.

PAR M. DE LA HIRE.

1704. 9. Janvier. LE Ciel a été entierement couvert pendant la durée de cette Eclipse, hormis à $5^h\,3'\,22''$ que la Lune parut assez claire entre des nuages, & j'observay avec le Micrometre que la partie éclairée du diametre de la Lune étoit de $17'\,30''$, & par la grandeur du diametre de la Lune à la hauteur où elle étoit, l'Eclipse auroit dû être alors de 4 doigts 56 minutes : mais à la vûë simple elle ne paroissoit que de 4 doigts. L'ombre de la terre sur le disque de la Lune ne paroissoit pas aussi bien terminée qu'on la voit ordinairement ; c'est pourquoy on ne doit pas trop s'assurer sur cette observation qui n'a été faite que fort à la hâte : car les nuages couvrirent aussi-tôt la Lune qui ne parut plus ensuite.

OBSERVATION

SUR UNE HYDROPISIE DE CERVEAU.

PAR M. DU VERNEY le jeune.

1704. 19. Janvier. AU mois de May de l'année 1701 je fus appellé pour voir une jeune Demoiselle qui n'avoit qu'environ quatre à cinq ans. Elle étoit tombée depuis quelque tems

dans une langueur causée par une fiévre lente qui la minoit peu à peu, & qui ne parut d'abord qu'un rhume.

Le poulx de la malade batoit tantôt vîte, & tantôt lentement : de plus il étoit intermittent ; & enfin il s'y faisoit de tems en tems une espece de suspension : ce qui fit craindre qu'elle n'eût un polipe dans le cœur. Cependant la respiration ne laissoit pas d'être libre, malgré le rhume qui avoit toûjours continué & qui étoit devenu très-grand.

Elle avoit le sommeil assez bon : mais les quinze derniers jours de sa maladie elle tomba dans un très-grand abattement & une grande pesanteur de tête, malgré l'usage des remedes spiritueux & évacuatifs qu'on lui donnoit. Environ huit jours avant son deceds, la bouche lui devint mousseuse, & le poulx toûjours vîte & très-pressé. J'ay observé la même chose en plusieurs personnes attaquées de la même maladie, où l'on croyoit cependant que le cerveau n'étoit nullement interessé.

Les trois derniers jours il survint à la malade une boursouflure qui commença à la jouë droite : elle se répandit ensuite peu à peu tout autour du corps, & descendit jusqu'aux aînes, en sorte que les bras, les jambes & les cuisses n'en étoient point attaquez. On voyoit augmenter cette boursoufleure par ondes ; & dans les endroits où on la pressoit, on sentoit sous les doigts comme de l'air s'échaper & faire une espece de crepitation. Enfin cette jeune Demoiselle mourut le 26 Juin de la même année 1701. Le lendemain j'en fis l'ouverture. Je commençay par le crâne : ce qui ne diminua en rien la boursouflure. Quoyque les vaisseaux de la dure-mere parussent fort remplis, il ne s'y trouva que fort peu de sang. Ayant separé la faux & penetré dans les ventricules, il en sortit environ un grand verre de serosité claire & transparente ; & il y a certainement dequoy s'étonner de ce que le crâne & la dure-mere ayant été levez, & la tête ayant demeuré en cet état & même panchée pendant plus de deux heures, parce qu'on attendoit des parens ; il ne se

fit durant tout ce tems-là aucun épanchement de cette liqueur.

Le lacis choroïde étoit extrêmement lavé & même usé, à peu près comme l'étoit l'épiploon, ainsi qu'on le dira dans la suite.

Je n'eus pas plûtôt appliqué le scapel à la peau du ventre, que toute la boursouflure dont j'ay parlé disparut, exhalant une odeur cadavereuse & insupportable. Je diray ici en passant, au sujet de cette boursouflure, qu'il est assez étonnant que cette rarefaction qui ne gonfle & ne bouffit les animaux qu'après leur mort (ce qui fait que les noyez reviennent sur l'eau) ait ici paru dans le sujet vivant.

L'épiploon étoit fondu tel qu'on le voit ordinairement aux ascitiques : ce qui doit faire juger que ce n'est pas toûjours la presence & l'impression des eaux contenuës dans le bas ventre, qui cause la fonte de graisse de cette partie & l'alteration des autres.

Les intestins se trouverent fort remplis d'air. Le pancreas étoit pareillement fondu; mais de telle maniere qu'il n'en restoit aucun vestige : cependant toutes les glandes du mesentere étoient endurcies, & la plûpart remplies d'une matiere à peu près semblable à du vieux suif. Le foye parut assez beau. La ratte étoit petite & schirreuse. La vesicule du fiel étoit fort remplie d'une liqueur visqueuse, qui avoit teint les parties voisines d'un rouge brun. Les autres parties du bas ventre étoient dans leur disposition naturelle.

Le sternum ayant été levé, les poûmons parurent remplis d'air, grenelez & adherans du côté gauche.

Le pericarde ayant été ouvert, on apperçût une tumeur à la base du cœur du côté gauche sur l'artere du poûmon. Cette tumeur étoit de la grosseur d'une noix, & dure & schirreuse : ses racines, qui étoient grenelées, passoient entre les vaisseaux, & elle venoit s'attacher à l'épine. Il ne se trouva rien de particulier au cœur.

OBSERVATION

D'une Tache qui a paru dans le Soleil au mois de Janvier 1704 à l'Observatoire.

PAR M. DE LA HIRE.

CEtte Tache a paru tout d'un coup sur le disque apparent du Soleil, comme il arrive à toutes les Taches; car le jour précedent à celui où je l'ay découverte il n'y paroissoit rien, quoyqu'elle eût dû être déja assez avancée. Je la vis le 7 de Janvier à midi, qui passa au meridien 7″½ avant le dernier bord du Soleil. Sa hauteur meridienne apparente étoit de 18° 42′ 20″, & celle du bord superieur du Soleil de 19° 0′ 20″. 1704. 19. Janvier.

Le 8 je ne pûs observer que sa hauteur meridienne apparente, qui étoit de 18° 49′ 25″.

Le 10 sa hauteur meridienne apparente étoit de 19° 7′ 0″. Celle du bord superieur du Soleil de 19° 24′ 30″. Elle passa au meridien avant le dernier bord du Soleil 42″½

Le 11 sa hauteur meridienne apparente étoit de 19° 16′ 0″, & celle du bord superieur du Soleil de 19° 33′ 30″. Elle passa au meridien 13″ après le centre du Soleil.

Les jours suivans ayant été toûjours couverts, je n'ay pû observer le Soleil que le 16, où la hauteur meridienne apparente de la Tache étoit de 20° 0′ 5″, & celle du bord superieur du Soleil de 20° 24′ 50″. Elle passa au meridien 15″½ après le premier bord du Soleil.

Le 17 la hauteur meridienne apparente de la Tache étoit de 20° 16′ 25″, & celle du bord superieur du Soleil de 20° 36′ 0″. Elle passa au meridien 7″ après le premier bord du Soleil.

Le 18 à 11^h du matin j'observay encore la Tache proche du bord Occidental du Soleil avec une Lunette de 16 piés : car je ne pouvois pas la distinguer dans la Lu

nette du quart de cercle de 3 piés; & ayant appliqué le Micrometre à cette Lunette de 16 pies, je trouvay qu'elle n'étoit alors éloignée du bord du Soleil que de 6" de degré.

Je ne donne point ici les figures differentes sous lesquelles cette Tache a paru; car elle étoit petite, & elle n'étoit composée que de deux ou trois Taches jointes ensemble, & enveloppees dans un même nuage à l'ordinaire, avec quelques autres petites Taches qui étoient aux environs: car il me semble qu'on ne peut pas tirer d'utilité de ces sortes de figures qui changent continuellement. Je remarqueray seulement, comme j'ay déja fait dans quelques observations semblables, qu'il me paroissoit distinctement un espace plus clair que le reste du Soleil qui environnoit le nuage où les Taches obscures étoient renfermées, ce qui pourroit avoir quelque rapport aux facules qu'on remarque quelquefois dans l'endroit du Soleil où les Taches ont disparu.

OBSERVATION

DE DEUX TACHES DANS LE SOLEIL,

PAR M. MARALDI.

1704. 9. Janvier. ON voit presentement deux amas de Taches dans le Soleil, dont l'un est proche de son bord Oriental, l'autre du bord Occidental prés de disparoître. Il y a long-tems qu'on n'a point vû dans le Soleil en même tems des Taches si éloignées les unes des autres, car pour l'ordinaire on n'en voit qu'à un endroit.

Nous les apperçûmes le 7 de Janvier 1704 le Soleil ayant paru au travers des nuages, & nous déterminâmes le même jour, aussi-bien que le suivant, leur situation par rapport aux cercles de la Sphere. La Tache Occidentale est composée d'un amas de plusieurs petites Taches, qui

Septentrion

Ianv 7. 8.

midy

fig. 1.re

fig. 4.

fig. 5.

toutes ensemble occupent dans le Soleil environ la vingt-cinquiéme partie de son diametre. Deux de ces Taches principales etoient environnées d'une nebulosité comme sont ordinairement les Taches du Soleil, & toute la Tache vûë avec une Lunette de 18 piés parut de la maniere qui est representée dans la Figure I.

Il y a apparence que cette Tache s'est formée dans le disque apparent du Soleil depuis peu de jours; car le 4 de Janvier le Soleil étant clair il ne parut acune Tache, quoyque j'y fisse attention : je n'en apperçûs pas non plus le 5, ayant aussi observé le Soleil. Le 6 le Ciel fut couvert; cependant si elle eût été formée, elle auroit pû être visible dès le 27 Decembre dernier.

La Tache qui est près du bord Oriental du Soleil paroît longue & étroite, & le 8 elle parut un peu plus large que le jour precedent, comme il doit arriver par raison d'Optique. Cette Tache vûë avec une Lunette de 18 piés paroissoit comme dans la II. Figure.

Ces deux Taches sont situées dans la partie australe du Globe du Soleil, comme toutes celles qui ont paru depuis long-tems dans cet astre. L'Occidentale a une latitude australe de 7 degrez, & elle est environ de deux degrez & demi plus Septentrionale que l'Orientale, qui est située à 9^d & demi de latitude australe. Cette latitude est la même que celle de la Tache qui parut au mois de Novembre 1700. Lorsqu'elle sera arrivée au milieu du Soleil, nous les comparerons ensemble pour voir si elle a aussi la même longitude.



SUITE DES OBSERVATIONS DES TACHES.

PAR M. MARALDI.

1704. 19. Janvier. DE deux amas de Taches que nous avons observé dans le Soleil le 7 & le 8 de Janvier, le 10 du même mois, après un jour de tems couvert, on n'en apperçut plus que celui qui étoit dans la partie Orientale : les autres Taches qui étoient dans la partie Occidentale, avec une latitude meridionale de 7 degrés étoient disparuës, ayant passé de l'émisphere apparent du Soleil à l'émisphere superieur occulte. La Tache qui restoit dans le Soleil, de mince & longue qu'elle étoit du commecement, étoit devenuë plus grande & plus ronde, s'étant approchée du milieu de son disque, en sorte que le 11 de ce mois à midi elle n'en étoit éloignée que de 9 degrez de la circonference du Soleil ; d'où nous avons calculé qu'elle a dû être au milieu de cet astre le 12 à 5 heures du matin.

Le 16 de Janvier, après quatre jours de tems couvert, nous déterminâmes la situation de la Tache dans le Soleil comme les jours précedens, & elle s'étoit approchée de son bord Occidental. La figure de la Tache avoit un peu changé ; car de trois Taches dont elle étoit composée auparavant, on n'en voyoit plus que deux dans une situation un peu differente, enfermées dans une nebulosité, comme on voit dans la IV. Figure.

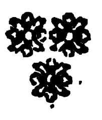
Le 17 elle paroissoit de la même longueur que les jours précedens ; mais elle étoit retrecie comme dans la Figure V.

Le 18 Janvier elle paroissoit fort près du bord du Soleil, & elle s'étoit rétrecie de sorte qu'on ne la pouvoit plus voir qu'avec de grandes Lunettes, avec lesquelles

elle paroissoit comme un trait obscur de la même longueur qu'auparavant; ce qui fait connoître qu'elle n'est diminuée qu'en apparence, comme il doit arriver par raison d'Optique.

Nous avions remarqué dès les premieres observations que cette Tache avoit une latitude meridionale de 9 degrés & demi, ce qui a été confirmé par la suite des observations. Parmi les Taches observées les années précedentes, nous en trouvons plusieurs qui avoient la même latitude meridionale que la derniere de cette année : ce sont celles qui ont paru au mois de Novembre 1700, celle du mois de May 1695, & celle du mois de Juin 1688.

M. Cassini ayant comparé la Tache du mois de May de l'an 1688 avec plusieurs autres qui avoient paru auparavant, trouve entre ces apparitions un nombre de révolutions de 27 jours 12^h 20 minutes, ce qui lui fit conjecturer que c'étoit le même lieu du Soleil dans lequel ces Taches s'étoient formées. Ayant comparé le tems que la Tache de cette année est arrivée au milieu du Soleil avec le tems que la Tache de 1688 y arrive, & supposant la même révolution de 17 jours 12^h 20 minutes, nous trouvons dans ces deux intervalles 194 révolutions du Soleil moins deux jours; en sorte que si la Tache de cette année eût été la même que celle de l'an 1688, elle n'auroit dû passer que deux jours plus tard au milieu du Soleil; ce qui fait connoître que si ces deux lieux ne sont pas les mêmes, ils sont au moins fort proches. Ayant fait la même comparaison de cette Tache avec celle du mois de Novembre de 1700, nous trouvons que celle de l'an 1700 étoit 60 degrés de la circonference du Soleil plus à l'Orient que celle de cette année.



EXTRAIT DES OBSERVATIONS
DE L'ECLIPSE DE LUNE

Du 23 Decembre 1703, faites à Dunkerque par M. Chazelles, à Montpellier par Mrs. de Plantade & Clapier, à Arles par M. Davizard, à Avignon par le R. P. Bonfa, & à Marseille par le R. P. de Laval Professeur d'Hydrographie.

PAR M. CASSINI le fils.

1704. 23 Janvier. A Paris le Ciel fut couvert de nuages pendant le tems de l'Eclipse, & on ne l'apperçut entre les nuages qu'à $5^h 4'$ qu'elle parut éclipsée à la vûë simple d'environ 5 doigts.

La Lune fut couverte à Dunkerque de foibles nuages qui empêcherent de déterminer le commencement de l'Eclipse.

4	47′	30″	A Montpellier commencement de l'Eclipse.
4	55	0	A Arles.
4	53	48	A Avignon commencement de l'Eclipse douteux.
4	54	30	A Marseille.
	7	30	Difference entre Montpellier & Arles.
	6	18	Difference entre Montpellier & Avignon.
	7	0	Difference entre Montpellier & Marseille.
4	50	56	A Montpellier Grimaldi dans l'ombre.
	57	40	A Marseille Grimaldi tout dans l'ombre.
	6	44	Difference entre Montpellier & Marseille.
4	45	20	A Dunkerque Aristarque sur le bord de l'ombre.

55' 10" A Montpellier l'ombre touche Ariſtarque.

9 50 Difference entre Dunkerque & Montpellier.

4 47 20 A Dunkerque Ariſtarque dans l'ombre.
57 21 A Montpellier Ariſtarque eſt tout dans l'ombre.
5 1 0 A Arles Ariſtarque couvert.
5 0 23 A Avignon Ariſtarque.

10 1 Difference entre Dunkerque & Montpellier.
13 40 Entre Dunkerque & Arles.
13 3 Entre Dunkerque & Avignon.

4 58 22 A Montpellier Kepler au bord de l'ombre.
5 1 46 A Marſeille Kepler le bord à l'ombre.

3 24 Difference entre Montpellier & Marſeille.

4 49 30 A Dunkerque Gaſſendi.
4 59 34 A Montpellier Gaſſendi eſt au bord de l'ombre.
5 2 36 A Marſeille Gaſſendi entre dans l'ombre.

10 4 Difference entre Dunkerque & Montpellier.
13 6 Entre Dunkerque & Marſeille.

5 0 23 A Montpellier l'ombre touche la mer des humeurs.
5 5 0 A Arles commencement de la mer des humeurs.
5 5 22 A Marſeille le bord de la mer des humeurs ſur le bord de l'ombre.

4 37 Difference entre Montpellier & Arles.
4 59 Entre Montpellier & Marſeille.

4 56 0 A Dunkerque Heraclides ſur le bord de l'ombre.
5 5 27 A Montpellier Heraclides touche l'ombre.

9' 27" Difference entre Dunkerque & Montpellier.

5 6 37 A Montpellier le bord de Copernic.
5 10 0 A Arles un bord de Copernic.
5 11 35 A Avignon l'ombre rase Copernic.
5 12 14 A Marseille Copernic entre dans l'ombre.

3 23 Difference entre Montpellier & Arles.
4 58 Entre Montpellier & Avignon.
5 37 Entre Montpellier & Marseille.

5 8 21 A Montpellier le milieu de Copernic.
11 30 A Arles le milieu de Copernic.

3 9 Difference entre Montpellier & Arles.

5 10 46 A Montpellier Helicon dans l'ombre.
13 14 A Avignon Helicon.

2 28 Difference entre Montpellier & Avignon.

5 11 56 A Montpellier Eratosthene.
16 15 A Marseille Eratosthene entre dans l'ombre.

4 19 Difference entre Montpellier & Marseille.

5 15 14 A Montpellier l'ombre à Pitatus.
19 56 A Marseille Pitatus sur le bord de l'ombre.

4 42 Difference entre Montpellier & Marseille.

5 16 24 A Montpellier Archimede au bord de l'ombre.
23 0 A Marseille Archimede entre dans l'ombre.

6 36 Difference entre Montpellier & Marseille.

5 16 57 A Montpellier Platon au bord de l'ombre.
20 0 A Arles premier bord de Platon.
20 14 A Avignon l'ombre rase Platon.

3' 3" Difference

3′ 3″ Difference entre Montpellier & Arles.
3 17 Difference entre Montpellier & Avignon.

5 18 9 A Montpellier Platon tout dans l'ombre.
22 0 A Arles Platon tout couvert.

3 51 Difference entre Montpellier & Arles.

5 10 15 A Dunkerque Tycho sur le bord de l'ombre.
5 19 32 A Montpellier l'ombre au bord de Tycho.
5 22 30 A Arles commencement de Tycho.
5 25 40 A Marseille Tycho sur le bord de l'ombre.

9 17 Difference entre Dunkerque & Montpellier.
12 15 Entre Dunkerque & Arles.
15 25 Entre Dunkerque & Marseille.

5 12 15 A Dunkerque le milieu de Tycho.
5 20 5 A Montpellier le milieu de Tycho dans l'ombre.

5 23 20 A Arles le milieu de Tycho.

7 50 Difference entre Dunkerque & Montpellier.
11 5 Difference entre Dunkerque & Arles.

La Lune se couvre ensuite entierement de nuages à Dunkerque.

5 21 0 A Montpellier Tycho dans l'ombre.
25 0 A Arles Tycho dans l'ombre.
27 22 A Marseille Tycho tout dans l'ombre.

4 0 Difference entre Montpellier & Arles.
6 22 Entre Montpellier & Marseille.

5 22 36 A Montpellier le bord de la mer de serenité.
26 30 A Arles un bord de la mer de serenité.

3 54 Difference entre Montpellier & Arles.

5 24′ 1″ A Montpellier Manilius dans l'ombre.
28 30 A Arles Manilius.
26 55 A Avignon Manilius.
29 48 A Marseille Manilius tout dans l'ombre.

4 29 Difference entre Montpellier & Arles.
2 54 Entre Montpellier & Avignon.
5 47 Entre Montpellier & Marseille.

5 27 16 A Montpellier Menelaus au bord de l'ombre.
32 30 A Marseille Menelaus sur le bord de l'ombre.

5 14 Difference entre Montpellier & Marseille.

5 28 40 Menelaus dans l'ombre à Montpellier.
30 11 A Avignon Menelaus.
33 36 A Marseille Menelaus tout dans l'ombre.

1 31 Difference entre Montpellier & Avignon.
4 55 Entre Montpellier & Marseille.

5 31 46 A Montpellier Pline entierement dans l'ombre.
33 56 A Avignon Pline.

2 10 Difference entre Montpellier & Avignon.

5 35 11 A Montpellier sainte Catherine dans l'ombre.
40 14 A Marseille sainte Catherine.

5 3 Difference entre Montpellier & Marseille.

5 35 58 A Montpellier le bord de la mer du Nectar.
32 45 A Arles commencement de la mer du Nectar.

3 47 Difference entre Montpellier & Arles.

5 38 57 A Avignon *Promontorium acutum.*
42 18 A Marseille *Promontorium acutum* entre dans l'ombre.

3 21 Difference entre Avignon & Marseille.

à 5 37′ 7″ A Montpellier l'ombre rase Fracastor.
43 34 A Marseille Fracastor entre dans l'ombre.

6 27 Difference entre Montpellier & Marseille.

à 5 39 24 A Montpellier le Promontoire du songe.
41 49 A Avignon le Promontoire du songe.

2 25 Difference entre Montpellier & Avignon.

à 5 42 42 A Montpellier le bord de Taruntius touche l'ombre.
44 30 A Arles Taruntius.
47 34 A Marseille Taruntius entre dans l'ombre.

1 48 Difference entre Montpellier & Arles.
4 52 Entre Montpellier & Marseille.

à 5 42 45 A Montpellier l'ombre au bord de Proclus.
45 37 A Avignon Proclus.

2 52 Difference entre Montpellier & Avignon.

à 5 43 39 A Montpellier Snellius.
46 45 A Arles Snellius.
51 0 A Marseille Snellius.

3 6 Difference entre Montpellier & Arles.
7 21 Entre Montpellier & Marseille.

à 5 43 48 A Montpellier l'ombre au bord de la mer Caspienne.
47 30 A Arles un bord de la mer Caspienne.
48 21 A Avignon l'ombre rase de la mer Caspienne.
49 8 A Marseille un bord de la mer Caspienne.

3 42 Difference entre Montpellier & Arles.
4 33 Entre Montpellier & Avignon.
5 20 Entre Montpellier & Marseille.

à 5 44′ 48″ A Montpellier Furnerius au bord de l'ombre.
46 45 A Arles Furnerius.
48 46 A Avignon Furnerius.
51 0 A Marſeille Furnerius ſur le bord de l'ombre.

1 57 Difference entre Montpellier & Arles.
3 58 Entre Montpellier & Avignon.
6 12 Entre Montpellier & Marſeille.

à 5 47 8 A Montpellier l'ombre à Petavius.
50 0 A Arles Petavius.

2 52 Difference entre Montpellier & Arles.

à 5 47 40 A Montpellier Langrenus au bord de l'ombre.
50 41 A Avignon Langrenus.
53 0 A Marſeille Langrenus entre dans l'ombre.

3 1 Difference entre Montpellier & Avignon.
6 20 Entre Montpellier & Marſeille.

à 5 49 50 A Montpellier la mer Caſpienne dans l'ombre.
52 0 A Arles fin de la mer Caſpienne.
53 42 A Marſeille fin de la mer Caſpienne.

2 10 Difference entre Montpellier & Arles.
3 52 Difference entre Montpellier & Marſeille.

à 5 53 7 A Montpellier Immerſion totale.
57 0 A Arles.
57 45 A Avignon.
58 15 A Marſeille.

3 53 Difference entre Montpellier & Arles.
4 38 Entre Montpellier & Avignon.
5 8 Entre Montpellier & Marſeille.

Donc 1^h 5′ 37″ Durée totale à Montpellier.
1 2 0 Durée totale à Arles.

1 3 57 Durée totale à Avignon.
1 3 45 Durée totale à Marseille.

& à 5^h 20′ 18″ Milieu de l'Eclipse à Montpellier.
5 26 0 Milieu à Arles.
5 25 46 Milieu à Avignon.
5 26 22 Milieu à Marseille.

Donc 5 42 Difference entre Montpellier & Arles, tirée du milieu de l'Eclipse.
5 28 Difference entre Montpellier & Avignon.
6 4 Entre Montpellier & Marseille.

En prenant un milieu entre les differences qui résultent de l'Immersion des Taches dans l'ombre, l'on trouve la difference des meridiens entre Dunkerque & Montpellier de 9′ 25″, dont Montpellier est plus Oriental que Dunkerque: mais l'on a déterminé par les Eclipses des Satellites de Jupiter la difference entre Paris & Dunkerque de 3 secondes de tems, dont Dunkerque est plus Oriental que Paris. L'on aura donc la difference des meridiens entre Paris & Montpellier de 9′ 28″. Cette difference est beaucoup plus grande que celle que l'on a déterminée par les observations des Satellites de Jupiter de 6′ 10″, & que celle qui résulte des triangles de la meridienne que l'on a trouvé de 6′ 8″; de sorte qu'il est necessaire d'attribuer cette difference au moins en partie à la difficulté que l'on a eu de regler la pendule à Dunkerque, à cause du mauvais tems qu'il y a fait plusieurs jours auparavant. En comparant les observations des Taches qui ont été faites en même tems à Montpellier & à Arles, & prenant un milieu l'on trouve la difference des meridiens entre ces deux Villes de 3′ 20″ de tems, dont Arles est plus Oriental que Montpellier, peu differente de celle qui est marquée dans la Carte que l'on a dressée sur les triangles de la meridienne, où on l'a déterminée de 49′ de degré, ou de 3′ 16″ de tems.

Les observations des Taches qui ont été faites à Montpellier & à Avignon donnent la difference entre ces deux

Villes de 3′ 6″ plus petite que celle qui résulte des triangles de la meridienne, où on l'a déterminé de 3′ 52″.

La difference des meridiens entre Montpellier & Marseille, qui résulte des observations des Taches faites dans ces deux Villes, est de 5′ 24″, qui étant ajoûtées à la difference entre Paris & Montpellier de 6′ 8″, donnent la difference des meridiens entre Paris & Marseille de 11′ 31″.

L'observation de Montpellier a été faite avec une Lunette de 15 pieds. L'on remarqua à 5^h 38′ que l'ombre qui avoit paru mal terminée & ambiguë depuis le commencement de l'Eclipse jusqu'à cette heure, paroissoit alors un peu plus nette & mieux tranchée; ce qui doit rendre les observations suivantes plus exactes que les précedentes. L'Immersion totale se fit entre Langrenus & une Tache obscure à plusieurs rameaux qui est au-dessus de la mer des Crises. Cet endroit du disque est presque diametralement opposé à celui où commença l'Eclipse, d'où l'on conclud que le centre de la Lune passa fort près du centre de l'ombre. Après l'Immersion totale de Lune parut d'abord d'une couleur grise & plombée, & si sombre qu'on avoit bien de la peine à y distinguer les Taches. Quelque tems après elle commença à rougir autour de sa circonference, & vers les 6 heures & un quart on y voïoit un disque entier d'ombre assez bien terminé qui occupoit environ la moitié du diametre de la Lune. On fut fort surpris lorsqu'en retournant à l'observation vers les 6 heures & demi, on ne vit plus la Lune dans le Ciel, qui étoit pourtant très-clair & très-serein : cette nuit ayant été la plus favorable & la plus belle qu'on eût pû souhaiter. Ils remarquerent que quoyque le crepuscule qui étoit déja assez fort parut être une des principales causes d'un Phenomene si extraordinaire, on ne pourroit pourtant la lui attribuer entierement, puisque l'on distinguoit encore plusieurs étoiles vers l'Orient & vers l'Occident.

A Arles le disque de la Lune parut toûjours après sa totale Immersion d'un rouge obscur ou brun; & pendant le passage de l'ombre sur le corps de la Lune, cette om-

bre parut notablement dentelée en plusieurs endroits, comme si c'eût été l'ombre de quelques montagnes de la terre, & particulierement lorsque le disque de la Lune étoit couvert environ la moitié.

A Avignon le peu d'obscurité qu'avoit l'ombre de la terre, n'a point permis de bien distinguer le commencement de l'Eclipse. La Lune parut pendant tout le tems de l'Eclipse extraordinairement éclairée & d'un rouge fort clair, si-bien qu'on auroit jugé qu'elle étoit transparente, que le Soleil étoit derriere son globe, & que ses rayons passoient à travers, de la même maniere qu'ils font à travers certaines pierres qui sont un peu diaphanes. On vit aussi une espece de couronne lumineuse parallele à la circonference de la Lune; mais il fut impossible d'en bien déterminer la grandeur, quoyque le reste du corps de la Lune fut sensiblement plus obscur.

L'observation a été faite à Marseille avec une très-bonne Lunette de 3 pieds, excepté quelques Taches du milieu qui ont été observées avec une bonne Lunette de 13 pieds. A 6^h 15' on voïoit encore les mers qui étoient au Nord-Oüest de la Lune, & qui étoient entrées les dernieres dans l'ombre. La Lune étoit rougeâtre au Nord-Oüest; mais au Sud-Est elle étoit fort obscure. A 6^h 30' la Lune a commencé à disparoître, soit à cause du crepuscule qui commençoit à être assez grand, soit à cause des vapeurs qui étoient voisines de l'horison. A 6^h 50' on vit encore la Lune avec beaucoup de peine; mais elle ne paroissoit pas devoir sortir bien-tôt de l'ombre.

On n'a pû voir depuis ce tems-là le commencement de l'Emersion, ni même la Lune. Cependant le tems étoit fort serein, le Ciel fort net, le vent de Nord ayant fraîchi dès le commencement de l'Eclipse, & augmenté au lever du Soleil. En comparant cette Eclipse avec celle du 29 Juin passé, on voit que la Lune est entrée plus directement & plus profondément dans l'ombre de l'atmosphere de la terre. Car on n'a point vû ce Croissant de la maniere qu'on remarqua dans l'autre Eclipse.

MANIERE GENERALE

De déterminer geometriquement le foyer d'une Lentille, formée par deux Courbes quelconques, de même ou de differente nature, telle que puisse être la raison de la refraction, & de quelque maniere que puissent tomber les rayons de lumiere sur une des faces de cette Lentille; c'est-à-dire, soit qu'ils y tombent divergens, paralleles, ou convergens.

PAR M. GUISNÉE.

PROBLÊME I.

1704. 9. Fevrier. FIGURE I. I. SOit *KBLEK* la section d'une Lentille convexe des deux côtés, formée par deux Courbes *KBL*, *KEL*, dont *BE* perpendiculaire aux deux Courbes, & indéfiniment prolongée de part & d'autre est l'axe commun, & celui de la Lentille.

1. Il est démontré dans la 5me Sect. du Livre des Infiniment Petits, qu'il y a une infinité de Courbes dont l'axe touche la dévelopée à une certaine distance de son sommet. Soit donc *c* le point où l'axe *BE* de la Courbe *KBL* touche la dévelopée de cette Courbe; *C* le point où l'axe *EB* de la Courbe *KEL* touche la dévelopée de cette derniere Courbe, c'est-à-dire que *Bc*, & *EC* soient deux rayons des dévelopées de ces deux Courbes, en sorte que les quatre ponts *c*, *E*, *B*, *C*, soient sur l'axe de la Lentille *BE*. Cela posé,

2. Soit *A* un point lumineux sur l'axe de la Lentille; *AD* un rayon incident infiniment proche de *AB*, & par consequent égal à *AB*; *DF* le rayon rompu de l'incident *AD*; *AR* un autre rayon incident infiniment proche de *AD*; *RF* son rayon rompu.

3. Il

3. Il est clair par ce qui est démontré dans la 7me sect. de l'Analyse des Infiniment petits, que le point *F* où concourent les rayons rompus *DF*, *RF*, est l'endroit où la Caustique par refraction de la Courbe *KBL* touche l'axe *cC* de la Lentille, puisque l'on suppose que le point *D* est infiniment proche de *B* D'où il suit qu'aucun rayon rompu ne coupe cet axe au dessous de *F* par rapport à la Lentille, & que le même point *F* est l'endroit où il se réunit un plus grand nombre de rayons venant du point lumineux *A*, & rompus à la rencontre de la face *KBL* de la Lentille; c'est pourquoy le point *F* est le foyer causé par cette face.

4. Si l'on regarde presentement les deux rayons rompus *DF*, *RF*, des incidens *AD*, *AR*, comme incidens & tombant sur le côté concave de la Courbe *KEL* aux points *H* & *I*; leurs rayons rompus *Hf*, *If*, se rencontreront en un point *f* de l'axe *cC* où la Caustique par refraction de la Courbe *KEL* le touche, puisque le point *H* est infiniment proche de *E*, & le point *f* sera par consequent le foyer de la face *KEL*, ou de la Lentille *KBLEK* qu'il s'agit de determiner. Ce foyer *f* sera positif, lorsqu'il tombera du côté de *F* par rapport à la Lentille, négatif lorsqu'il tombera du côté de *A*, infini lorsque les rayons seront paralleles après avoir traversé la Lentille, & souffert les deux refractions qui se font sur ses deux faces.

5. Il est clair par la 5me sect. de l'Analyse des Infiniment petits, que les perpendiculaires *Dc* & *HC* aux Courbes *KBL* & *KEL*, menées par les points *D* & *H*, toucheront les dévelopées de ces Courbes aux points *c* & *C*, où leurs axes *Bc* & *EC* les touchent, puisque par l'hypothese les points *D* & *H* sont infiniment proches de *B* & de *E*, & partant que $Dc = Bc$ & $HC = EC$.

6. Ayant décrit des centres *A* & *F* les petits arcs *DT*, *DS*, mené du point *c* sur les rayons incidens *AD*, *AR* prolongés, les perpendiculaires *cP*, *cp*, & sur les rayons rompus *DF*, *RF* les perpendiculaires *cQ*, *cq*; *cP* sera le sinus de l'angle d'incidence *cDP*, *rp*, sa difference; *cQ* le sinus de l'angle rompu *cDQ*, & *sq* sa difference.

7. Ayant nommé AD, ou AB, y; cD, ou cB, a; DP, ou Dr, g; DQ, ou Df, h; cP, r; DF, x; QF, ou fF sera $x-h$; AP, ou Ar, $y+g$; & TR, dy.

8. Les triangles rectangles cPD, RTD, étant semblables, puisque leurs angles PDc, TDR sont tous deux le complement de l'angle PDR, l'on aura $cP\ (r).\ PD\ (g) :: RT\ (dy)\ DT = \frac{gdy}{r}$.

9. Les petits secteurs ou triangles semblables ADT, Arp donnent $AD\ (y) : AP$ ou $Ar\ (y+g) :: DT\ \left(\frac{gdy}{r}\right)$. $rp = \frac{gydy + ggdy}{ry}$.

10. En supposant que cP, sinus de l'angle d'incidence cDP, soit à cQ, sinus de l'angle rompu cDQ, comme m à n: Et puisque $cP.\ cQ :: rp.\ fq$, l'on aura $m.\ n :: rp\ \left(\frac{gydy + ggdy}{ry}\right).\ fq = \frac{ngydy + nggdy}{mry}$.

11. Les triangles rectangles cQD, RSD, dont les angles cDQ, RDS sont tous deux le complement de l'angle QDR, sont semblables, comme aussi (*numer.* 8.) les triangles cPD, RTD; c'est-pourquoy l'on aura à cause des hypothenuses communes, $DP\ (g).\ DQ\ (h) :: DT\ \left(\frac{gdy}{r}\right).\ DS = \frac{hdy}{r}$.

12. A cause des triangles ou secteurs semblables FDS, Ffq, l'on a $\frac{hdy}{r}\ (DS).\ \frac{ngydy + nggdy}{mry}\ (fq) :: x\ (DF).\ x-h\ (fF$, ou $QF)$, d'où l'on tire $x = \frac{mhhy}{mhy - ngy - ngg} = DF$.

13. Mais parce que l'on suppose que le rayon incident AD est infiniment proche de AB, il passera aussi bien que son rompu DF infiniment proche du point c; c'est-pourquoy les perpendiculaires cP, cQ pourront être considerées comme nulles, ou $=o$; & alors $DP=g$, & $DQ=h$ deviendront $=Bc=a$, & $DF=x$ sera égale à BF. Mettant donc a en la place de g, & de h dans l'équation précédente, l'on aura $x = \frac{may}{my - ny - na}$ ou $x = \frac{may}{py - na}$ $= BF$, en mettant p pour $m-n$.

14. De même ayant décrit des centres F & f les petits arcs Hi, Ho, tiré du point C, où l'axe de la Courbe EL touche la dévelopée de cette Courbe, sur les prolongemens des rayons FD, FR, les perpendiculaires CM, Cm: Et sur les prolongemens des rayons rompus fH, fI, les perpendiculaires CN, Cn, & mené HC, qui sera le rayon de la dévelopée au point H, puisque H est infiniment proche de E, & par conséquent perpendiculaire à la Courbe EL, & égale à EC; c'est pourquoy CM sera le sinus de l'angle d'incidence CHM; um, sa différence; CN, le sinus de l'angle rompu CHN; & tn, sa différence.

15. Nommant donc CH, ou CE, b; HM, k; HN, ou Ht, l; CM, t; FH, u; fH, z; HD, s; FM, ou Fu sera $u+k$; fN, ou ft, $z+l$; & Ii, du.

16. Les triangles rectangles CMH, IiH, qui sont semblables, puisque leurs angles CHM, IHi sont tous deux le complément de l'angle MHI, donneront CM (t). MH (k) :: Ii (du) $Hi = \frac{kdu}{t}$.

17. A cause des triangles ou secteurs semblables FHi, Fum, l'on a FH (u). FM, ou Fu $(u+k)$ :: Hi $(\frac{kdu}{t})$. $um = \frac{ukdu+kkdu}{tu}$.

18. Puisque (*num.* 10.) la raison de la refraction est comme m à n, & qu'en ce cas le sinus CM de l'angle d'incidence CHM, est au sinus CN de l'angle rompu CHN comme n à m, & qu'outre cela CM. CN :: um. tn, l'on aura n. m :: um $(\frac{ukdu+kkdu}{tu})$. $tn = \frac{mukdu+mkkdu}{ntu}$.

19. Les triangles rectangles CNH, IOH qui sont semblables, puisque leurs angles NHC, OHI sont tous deux le complément de l'angle NHI: comme aussi les triangles rectangles CMH, IiH, donneront à cause des hypothenuses communes, MH (k). NH (l) :: iH $(\frac{kdu}{t})$. $OH = \frac{ldu}{t}$.

20. Enfin à cause des triangles ou secteurs semblables

ftn, fHO, l'on aura $z+l$ (fN, ou ft) z (fH) :: $\frac{mukdu+mkkdu}{ntu}$ (tn). $\frac{ldu}{t}$ (HO), d'où l'on tire $u=\frac{mkkz}{nil+nlz-mkz}$.

21. Mais parce que le rayon incident DF : aussi bien que son rompu Hf sont infiniment proches de l'axe AE, ils passeront infiniment proche du point C ; c'est pourquoy les perpendiculaires CM, CN peuvent etre regardees comme nulles, ou égales à zero ; & alors HM & HN se confondront avec $EC=b$, & $HD=s$, avec EB. Mettant donc b en la place de k & de l dans l'equation precedente, elle deviendra celle-ci : $u=\frac{mbz}{nb+nz-mz}$, ou $u=\frac{mbz}{nb-pz}$, en mettant p pour $m-n$. Or FH, ou $FE=FB-BE=x-s=u$; donc $x-s=\frac{mbz}{nb-pz}$. Mais (*num.* 13.) $x=\frac{may}{py-na}$; donc $\frac{may}{py-na}-s=\frac{mbz}{nb-pz}$, d'où l'on tire,

$$z=\frac{mnaby-npbsy+nnabs}{mpay+mpby-ppsy+npas-mnab}=Ef.$$

22. Si l'on veut negliger l'epaisseur de la Lentille où l'on n'a tres-souvent point d'égard, il n'y a qu'à faire $s=0$, ce qui détruira tous les termes où elle se rencontre, & l'on aura,

$$z=\frac{naby}{pay+pby-nab}=Ef.$$

AUTRE SOLUTION

plus simple que la précédente.

FIG. II. II. Les choses demeurant toûjours dans le même état, excepté que l'on ne suppose ici qu'un seul rayon incident AD, & qu'outre cela l'on mene les petites droites DI & HG perpendiculaires à BE.

Il est clair que les petites droites DI, HG seront aussi perpendiculaires aux rayons AD, DF & Hf à cause du point D infiniment proche de B.

Nommant donc comme auparavant AD, ou AB ou AI, y; Bc, a, EC, b; BE, $ſ$; DF, ou BF, x; HF, ou EF, ou GF, u; Hf, ou Ef, ou Gf, z; cP, r; CM, t; Ac sera $y+a$; FC, $u+b$. Fc, $x-a$, & la raiſon de la refraction $\frac{m}{n}$.

1. Les triangles ſemblables AcP, AID donneront $Ac\,(y+a).\ AI\,(y) :: cP\,(r)\ ID = \frac{ry}{y+a}$.

2. L'on a à cauſe de la refraction $m.n :: cP\,(r).\ cQ = \frac{nr}{m}$.

3. Les triangles ſemblables FID, FcQ, donnent $x\,(FI).\ x-a\,(Fc) :: \frac{ry}{y+a}\,(ID).\ \frac{nr}{m}\,(cQ)$, d'où l'on tire $x = \frac{may}{my-ny-na} = BF$, ou $x = \frac{may}{py-na}$, en mettant p pour $m-n$.

4. Les triangles ſemblables FCM, FGH donnent $FC\,(u+b).\ FG\,(u) :: CM\,(t).\ GH = \frac{tu}{u+b}$.

5. A cauſe de la refraction, l'on a $n.m :: CM\,(t).\ CN = \frac{mt}{n}$.

6. Enfin les triangles ſemblables fCN, fGH donnent $z+b\,(fC).\ z\,(fG) :: \frac{mt}{n}\,(CN).\ \frac{tu}{u+b}\,(GH)$, d'où l'on tire $u = \frac{mby}{nb+nz-mz} = Ef$, ou $u = \frac{mby}{nb-pz}$, en mettant p pour $m-n$, ou $x-ſ = \frac{mby}{nb-pz}$, en mettant pour u ſa valeur $x-ſ$. Si l'on met preſentement dans cette derniere équation en la place de x ſa valeur priſe dans l'équation précédente $x = \frac{may}{py-na}$, l'on aura la ſuivante, où l'on a égard à l'épaiſſeur du verre.

$$z = \frac{mnaby - npbſy + nnabſ}{mpay + mpby - ppſy + npaſ - mnab} = Ef, \text{ ou}$$

$$z = \frac{naby}{pay + pby - nab} = Ef,$$ où l'on neglige l'épaiſſeur du verre. Ces deux équations ſont celles de l'art. 1. num. 21. & 22.

III. Comme l'on n'employe dans les inſtrumens de

Dioptrique que des Lentilles de verre, où la refraction se fait à peu prés dans la raison de 3 à 2; si l'on fait $m = 3$, $n = 2$, p sera $= 1$, & les deux équations précédentes se changeront en les deux qui suivent, qui serviront de regles generales pour les verres convexes des deux côtés, tels qu'on les a supposés en faisant le calcul. Et parce qu'on a supposé le point A peu éloigné du verre, les rayons tomberont divergens sur la face KBL.

Regles pour les verres convexes des deux côtés.

$$1. \quad z = \frac{6aby - 2bfy + 4abf}{3ay + 3by - fy + 2af - 6ab} = Ef.$$

$$2. \quad z = \frac{2aby}{ay + by - 2ba} = Ef.$$

Si les Courbes KBL, KEL sont des cercles, Bc & EC en seront les demi diametres : si les Courbes sont des sections Coniques, Bc & EC seront la moitié de leurs parametres. On déterminera par la 5me section de l'Analyse des Infiniment petits, la grandeur de Bc & de EC dans les autres Courbes. Et l'on prendra pour des lignes droites les Courbes KBL, KEL, lorsque les mêmes rayons Bc, EC seront infinis.

IV. Si dans les deux équations précédentes $a = \infty$, KBL deviendra une ligne droite, & le verre sera par conséquent *plan convexe*, & son côté plat sera tourné vers le point lumineux A. Et ayant effacé tous les termes où a ne se rencontre point, parce qu'alors ils sont nuls par rapport à ceux où a se trouve, l'on aura

Regles pour les verres plans convexes.

$$3. \quad z = \frac{6by + 4bf}{3y + 2f - 6b}.$$

$$4. \quad z = \frac{2by}{y - 2b}.$$

V. Si dans les deux mêmes équations $b = \infty$, KEL deviendra une ligne droite; le verre sera *convexe plan*: son côté convexe sera tourné vers le point lumineux, & l'on aura

Regles pour les verres convexes plans.

$$5. \quad z = \frac{6ay - 2fy + 4af}{3y - 6a}.$$

$$6. \quad z = \frac{2ay}{y - 2a}.$$

VI. Si $a = \infty$, & qu'on change les signes des termes où

b se rencontre, la Courbe KBL deviendra une ligne droite, & KEL tournera sa convexité vers B; c'est-pourquoy le verre sera *plan concave*, dont le côté plat sera tourné vers le point lumineux, & l'on aura

Regles pour les verres plans concaves.

7. $z = \frac{-6by - 4bf}{3y + 2f + 6ab}$.

8. $z = \frac{-2by}{y + 2b}$.

VII. Si $b = \infty$, & qu'on change les signes des termes où a se rencontre, le verre sera *concave plan* : son côté concave sera tourné vers le point lumineux, & l'on aura

Regles pour les verres concaves plans.

9. $z = \frac{-6ay - 2fy - 4af}{3y + 6a}$.

10. $z = \frac{-2ay}{y + 2a}$.

VIII. Si l'on change les signes des termes où b se rencontre, le verre sera *convexo-concave* : le côté convexe regardera le point lumineux, & l'on aura

Regles pour les verres convexo-concaves.

11. $z = \frac{-6aby + 2bfy - 4abf}{3ay - 3by - fy + 2af + 6ab}$.

12. $z = \frac{-2aby}{ay - by + 2ab}$.

IX. Si l'on change les signes des termes où a se rencontre, le verre sera *concavo-convexe*: le côté concave sera tourné vers le point lumineux, & l'on aura

Regles pour les verres concavo-convexes.

13. $z = \frac{-6aby - 2bfy - 4abf}{-3ay + 3by - fy - 2af + 6ab}$.

14. $z = \frac{-aby}{-ay + by + 2ab}$.

X. Si l'on change les signes des termes où a & b ne se rencontrent point ensemble, sans changer ceux des termes où elles ne se trouvent ni l'une ni l'autre, le verre sera concavo-concave, & l'on aura

Regles pour les verres concavo-concaves.

15. $z = \frac{6aby + 2bfy + 4abf}{-3ay - 3by - fy - 2af - 6ab}$.

16. $z = \frac{2aby}{-ay - by - 2ab}$.

XI. Si a & $b = \infty$, le verre sera plat des deux côtés, & l'on aura

Regles pour les verres plans des deux côtés.

17. $z = -y - \frac{2}{3}f$.

18. $z = -y$.

XII. Si $a = o$. Ce qui se rencontre dans plusieurs Courbes, l'on aura

19. $z = \frac{-2bf}{3b-f}$.

20. $z = \frac{o}{by} = o$.

XIII. Si $b =$, l'on aura

21. $z = \frac{o}{3ay - fy + 2af} = o$.

22. $z = \frac{o}{ay} = o$.

XIV. Si a & $b = o$, l'on aura

23. $z = \frac{o}{-fy} = o$.

24. $z = o$.

L'on a supposé en faisant le calcul que le point lumineux A étoit peu éloigné du verre ; c'est pourquoy toutes les Regles précédentes se rapportent au cas où les rayons tombent divergens sur la face KBL qui regarde le point lumineux.

Pour les rayons paralleles.

XV. Si l'on fait y infinie dans toutes les Regles précédentes, en effaçant tous les termes où elle ne se rencontre point, l'on aura autant d'autres Regles qui se rapporteront au cas où les rayons tombent paralleles sur la face KBL, puisque le point A en sera alors infiniment éloigné.

Pour les rayons convergens.

XVI. Si l'on change les signes des termes où y se rencontre dans les Regles précédentes, elles renfermeront le cas où les rayons tombent convergens sur la face KBL, puisque le point lumineux A se trouvera alors du côté de F.

CONCLUSION.

XVII. Il est clair que toutes les quantités renfermées dans toutes les équations précédentes étant données, à la reserve de $z = Ef$; cette quantité z sera aussi determinée. *Ce qui étoit proposé.*

COROLLAIRES.

COROLLAIRES
tirés de la premiere équation.

$$z = \frac{6aby - 2bfy + 4abf}{3ay + 3by - fy + 2af - 6ab}.$$

XVIII. 1. Il eſt clair que le foyer Ef ſera poſitif, lorſque $6aby + 4abf > 2bfy$, & $3ay + 3by + 2af > fy + 6ab$, & au contraire ; negatif, lorſque $6aby + 4abf > 2bfy$, & $3ay + 3by + 2af < fy + 6ab$, & au contraire ; infini, lorſque $3ay + 3by + 2af = fy + 6ab$, & $6aby + 4abf >$ ou $< 2bfy$; $= o$, lorſque $6aby + 4abf = 2bfy$, c'eſt-à-dire qu'en ce cas le point f tombera en E.

Cas des rayons divergens.

2. Si $y = b$, l'on aura $z = \frac{6abb - 2bbf + 4abf}{3bb - bf + 2af - 3ab}$. Et le foyer ſera poſitif, lorſque $6abb + 4abf > 2bbf$, & que $6abb + 4abf > 2bbf$, & $3bb + 2af < bf + 3ab$, & au contraire ; infini, lorſque $3bb + 2af = bf + 3ab$, & $6abb + 4abf >$ ou $< 2bbf$; $= o$, lorſque $6abb + 4abf = 2bbf$.

3. Si $y = a$, l'équation deviendra $z = \frac{6aab + 2abf}{3aa + af - 3ab}$, & le foyer ſera poſitif ſi $3aa + af > 3ab$; negatif, ſi $3aa + af < 3ab$; infini, ſi $3aa + af = 3ab$. Il ne peut en ce cas être $= o$.

4. Si $a = b$, l'on aura $z = \frac{6aay - 2afy + 4aaf}{6aay - fy + 2af - 6aa}$, & le foyer ſera poſitif, lorſque $6aay + 4aaf > 2afy$, & $6ay + 2af > fy + 6aa$, & au contraire ; negatif, lorſque $6aay + 4aaf > 2afy$, & $6ay + 2af < fy + 6aa$, & au contraire ; infini, lorſque $6ay + 2af = fy + 6aa$, & $6aay + 4aaf >$ ou $< 2afy$; $= o$, lorſque $6aay + 4aaf = 2afy$.

5. Si $a = b = y$, l'on aura $z = \frac{6aa + 2af}{f}$, & le foyer ſera toûjours poſitif.

6. Si $a=b$, $f=2a$. & que les Courbes *KBL*, *KEL* soient des cercles ; le verre sera une sphere, & l'on aura $z=\frac{ay+4aa}{2y-a}$, qui montre que le foyer sera positif lorsque $2y>a$; negatif, lorsque $2y<a$; infini, lorsque $y=\frac{1}{2}a$.

Cas des rayons paralleles.

7. Si l'on fait $y=\infty$, l'on aura $z=\frac{6ab-2bf}{3a+3b-f}$, d'où l'on voit que le foyer qui en ce cas est appelle foyer *absolu*, ou foyer *principal*, sera positif, lorsque $6ab>2bf$, & $3a+3b>f$, & au contraire ; negatif, lorsque $6ab>2bf$ & $3a+3b<f$, & au contraire ; infini, lorsque $3a+3b=f$, & $6ab>$ ou $<2bf$; $=0$, lorsque $6ab=2bf$.

8. Si $a=b$, l'on aura $z=\frac{6aa-2af}{6a-f}$; d'où il suit que le foyer sera positif lorsque $6aa>2af$ & $6a>f$, & au contraire ; negatif, lorsque $6aa>2af$ & $6a<f$, & au contraire ; infini, lorsque $6a=f$ & $6aa>$ ou $<2af$; $=0$, lorsque $6aa=2af$.

9. Si $b=a$, $f=2a$, & que les Courbes *KBL*, *KEL* soient des cercles, le verre sera une sphere, & l'on aura $z=\frac{1}{2}a$.

Cas des rayons convergens.

10. En changeant les signes des termes où y se rencontre, l'on aura $z=\frac{-6aby+2bfy+4abf}{-3ay-3by+fy+2af-6ab}$, d'où l'on tirera des Corollaires comme l'on a fait dans les deux cas précédens.

COROLLAIRES
tirés de la seconde équation.

$$z=\frac{2aby}{ay+by-2ab}.$$

Cas des rayons divergens.

XIX. 1. Il est clair que le foyer sera positif, lorsque $ay+by>2ab$; negatif, lorsque $ay+by<2ab$; infini, lorsque $ay+by=2ab$.

2. Si $y=b$, l'on aura $z=\frac{2ab}{b-a}$, qui fait voir que le

foyer sera positif, lorsque $b > a$; negatif, lorsque $b < a$; infini, lorsque $b = a$.

3. Si $y = a$, l'on aura $z = \frac{2ab}{a - b}$, qui montre que le foyer sera positif, lorsque $a > b$; negatif, lorsque $a < b$; infini, lorsque $a = b$.

4. Si $b = a$, l'on aura $z = \frac{ay}{y - a}$, & le foyer sera positif, lorsque $y > a$; negatif, lorsque $y < a$; infini, lorsque $y = a$.

5. Si $y = a = b$, l'on aura $z = \infty$.

6. Si $y = \infty$, l'on aura $z = \frac{2ab}{a + b}$, d'où l'on voit que le foyer sera positif. Cas des rayons paralleles.

7. Si $a = b$, l'on aura $z = a$.

8. Si l'on change les signes des termes où y se trouve, l'on aura $z = \frac{-2aby}{-ay - by - 2ab} = \frac{2aby}{ay + by + 2ab}$, qui montre que le foyer sera toûjours positif, quelque supposition que l'on y fasse. Cas des rayons convergens.

COROLLAIRES tirés de la troisiéme équation.

$$z = \frac{6by + 4bs}{3y + 2s - 6b}.$$

XX. 1. Elle fait voir que le foyer sera positif, lorsque $3y + 2s > 6b$; negatif, lorsque $3y + 2s < 6b$; infini, lorsque $3y + 2s = 6b$. Cas des rayons divergens.

2. Si $y = b$, l'on aura $z = \frac{6bb + 4bs}{2s - 3b}$, d'où l'on voit que le foyer sera positif, lorsque $2s > 3b$; negatif, lorsque $2s < 3b$; infini, lorsque $2s = 3b$.

3. Si $s = b$, & que la Courbe *KEL* soit un cercle, le verre sera une demie sphere, & l'on aura $z = \frac{6by + 4bb}{3y - 4b}$, d'où il suit que le foyer sera positif, lorsque $3y > 4b$; negatif, lorsque $3y < 4b$; infini, lorsque $3y = 4b$.

4. En faisant $y = \infty$, l'on aura $z = 2b$. Cas des rayons paralleles.

On tirera des Corollaires des autres formules comme l'on a fait des précédentes, & les uns & les autres pourront souvent être réduits à des expressions plus simples.

COROLLAIRES GENERAUX.

XXI. Il est clair que des six choses renfermées dans les équations précédentes (qui sont la distance *BA* du verre au point lumineux, celle du foyer *Bf*, les deux rayons *Bc*, *EC*, l'épaisseur du verre *BE*, & la raison de la refraction $\frac{m}{n}$) cinq étant données, la sixiéme le sera aussi.

1. Soit, par exemple, l'équation $z = \frac{naby}{pay + pby - nab}$ qui est celle du premier article *num.* 22. si l'on suppose que tout soit donné excepté la raison de la refraction $\frac{m}{n}$, ayant remis en la place de p sa valeur (*art.* 1. *num.* 13.) $m - n$, l'on tirera de cette équation $\frac{m}{n} = \frac{aby + azy + bzy + abz}{azy + bzy}$ $= y + \frac{aby + abz}{azy + bzy}$. C'est-pourquoy en assignant à n une valeur arbitraire telle que l'on voudra, l'on aura celle de m, & par conséquent le rapport de m à n sera donné.

2. Si dans la même équation tout est connu excepté a, l'on en tirera $a = \frac{pbyz}{nby + nbz - pyz}$.

3. Si tout est connu à la reserve de y, l'on en tirera $y = \frac{nabz}{paz + pbz - nab}$. Où l'on remarquera que si le foyer devenoit le point lumineux, le point lumineux deviendroit le foyer, puisque ces deux équations $z = \frac{naby}{pay + pby - nab}$ & $y = \frac{nabz}{paz + pbz - nab}$ ne different qu'en ce que z est en la place de y, & y en la place de z, ce qui est une des principales proprietés de la refraction; sçavoir, que si un rayon de lumiere, après avoir souffert tant de refractions qu'on voudra, retournoit sur ses pas, il repasseroit par le même chemin.

PROBLÊME II.

XXII. *Un verre quelconque* KL *étant donné, & son foyer* F, *formé par les rayons qui partent d'un point lumineux* A *pris sur l'axe* BE *du verre, étant déterminé par quelqu'une des regles & dans quelqu'une des hypotheses précédentes ; déterminer le nouveau foyer qui résultera de la position d'un autre verre quelconque* MN, *aussi donné, au dessous du premier* KL, *ayant tous deux un même axe* ABD, *quelque distance qu'il y ait entre l'un & l'autre verre.* FIG. III.

1. En supposant, 1°. que le verre MN soit convexe des deux côtés. 2°. Que le foyer du verre KL soit positif en F. 3°. Que le verre MN soit placé entre le verre KL & son foyer F. 4°. Que le foyer du verre MN soit positif en I; l'on prendra le foyer F du verre KL par le point lumineux, & les rayons tomberont par conséquent convergens sur la face MCN du verre MN; & nommant le rayon de la dévelopée de la Courbe MCN au point C, c, celui de la Courbe MDN au point D, d, la distance DI du verre MN à son foyer I, f, l'épaisseur CD, r, la distance CF du verre MN au foyer F du verre KL, x; l'on aura article 16, en ayant égard à l'épaisseur du verre.

1. $$f = \frac{-6cdx + 2drx + 4cdr}{-3cx - 3dx + rx + 2cr - 6cd} = DI, \text{ ou}$$

2. $$f = \frac{-2cdx}{-cx - dx - 2cd} = \frac{2cdx}{cx + dx + 2cd} = DI, \text{ en}$$

negligeant l'épaisseur du verre. Mais par l'hypothese EF est donnée; c'est-pourquoy la distance CE des deux verres étant donnée, $FC = x$ le sera aussi, & par conséquent $DI = f$. *Ce qu'il faloit trouver.*

2. Si le foyer F du verre KL étoit negatif, ou si le verre MN étoit placé au-dessous de F en mn, les rayons partant de F tomberoient divergens sur la face mcn du verre mn, & $FC = x$ deviendroit negative de positive qu'elle étoit; c'est-pourquoy en changeant les signes des termes où x se trouve, l'on auroit

3. $$f = \frac{6cdx - 2drx + 4cdr}{3cx + 3dx - rx + 2cr - 6cd}$$

4. $f = \frac{2cdx}{cx + dx - 2cd}$.

3. Si le foyer F du verre KL étoit infini, $FC = x$ qui ne differe de FE que de la grandeur finie CE, le seroit aussi ; c'est pourquoy les termes où x ne se rencontre point étant nuls ou $= o$ par rapport a ceux où elle se rencontre dans la 3e & 4e équation, l'on auroit

5. $f = \frac{6cd - 2dr}{3c + 3d - r}$.

6. $f = \frac{2cd}{c + d}$.

4. Il est aisé d'appliquer ces équations à telle verre qu'on voudra, comme l'on a fait dans les regles précédentes, & d'en tirer des Corollaires, pourvû qu'on observe que $x = FC$ ne peut point recevoir d'autres variations que celles que le verre KL, qui peut être aussi tel qu'on voudra, lui donne.

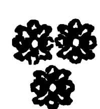
5. On trouvera de même le foyer qui résulte de la position de plusieurs verres placés sur un même axe, en prenant toûjours le foyer du dernier pour le point lumineux.

6. S'il y a un ou plusieurs verres KL, MN placés sur un même axe AF, & dont le foyer soit I, on pourra encore par le moyen des regles précédentes placer un nouveau verre donné PQ sur le même axe AF, ensorte que les rayons venant du point I, soient paralleles après avoir traversé le nouveau verre PQ : car il n'y a pour cela qu'à prendre celle des équations précédentes qui lui convient dans le cas des rayons divergens, & ayant fait z ou $f = \infty$, on en tirera une valeur de y ou de x qui sera la distance cherchée IR. Soit, par exemple, le verre donné PRQ convexe des deux côtés, & dont on ne considere point l'épaisseur. L'équation qui lui convient est la seconde de l'article 4. page 30, qui est $z = \frac{2aby}{ay + by - 2ab}$; & en supposant z infini, l'on aura $ay + by - 2ab = o$, d'où l'on tire $y = \frac{2ab}{a + b}$; ayant donc placé le verre PRQ de

maniere que $IR = \frac{a+b}{2ab}$, les rayons venant du point I seront paralleles après l'avoir traversé.

Soit encore le verre prq concavo concave dont on ne considere point l'épaisseur. L'équation qui lui convient est la 16e $z = \frac{2aby}{-ay-by-2ab}$, où ayant fait $z = \infty$, l'on aura $-ay-by-2ab=o$, d'où l'on tire $y = \frac{-2ab}{a+b}$. Et parce que cette valeur de y est negative, il faudra prendre $Ir = \frac{2ab}{a+b}$ de l'autre côté de I par rapport à R, & placer en r le verre prq, d'où les rayons qui alloient se réunir au point I, après avoir traversé le verre MN, sortiront paralleles.

7. Si au lieu de déterminer la position du verre MN sur l'axe AF, comme l'on a fait *num.* 1. pour avoir celle de son foyer I, l'on déterminoit la position du foyer I pour trouver celle du verre MN; la distance FI qui se trouve entre le foyer F du verre KL, & le foyer I seroit donnée, & $FC = x$, & $ID = f$ seroient inconnuës. Ainsi ayant nommé FI, g, l'on auroit $x = g+f+r$, ou, en negligeant l'épaisseur du verre MN, $x = g+f$, & ayant substitué les valeurs de x dans la premiere & seconde équation, l'on en tireroit des valeurs de $f = ID$, qui détermineroient la position du verre MN. Par exemple, en substituant $g+f$, seconde valeur de x, dans la seconde équation $f = \frac{2cdx}{cx+dx+2cd}$, l'on en tireroit $ff = -gf + \frac{2cdg}{c+d}$, & partant $f = -\frac{1}{2}g \pm \sqrt{\frac{1}{4}gg + \frac{2cdg}{c+d}} = ID$.



RETOUR DES TACHES

Observées dans le Soleil au commencement de Janvier.

PAR M. MARALDI.

1704. 9. Fevrier. NOus attendions le 24 Janvier de cette année 1704 de voir de nouveau la Tache que nous avions observée le 7 & le 8 de Janvier près du bord Occidental du Soleil, après avoir parcouru son hemisphere superieur. Par le calcul que nous fîmes elle devoit avoir disparu au bord Occidental le 10 de Janvier, & après avoir été cachée un peu plus de la moitié de sa révolution qui est de 14 jours, elle devoit retourner au bord Oriental du Soleil le 24 du même mois. Mais ce jour-là & le suivant le Ciel ayant été entierement couvert à Paris, nous ne pûmes l'observer. Elle fut cependant apperçuë à Montpellier par M. de Plantade Conseiller, qui la trouva éloignée d'une minute du bord Oriental du Soleil.

Le 26 Janvier à $8^{h}\frac{1}{2}$ le Soleil ayant paru pendant quelques minutes au travers des nuages, nous apperçûmes avec une Lunette de 3 pieds la Tache assez grande près du bord Oriental; mais nous n'eumes pas le tems de déterminer sa situation, ni de la voir par de grandes Lunettes à cause des nuages.

Le 27 Janvier à $2^{h}\frac{1}{2}$ après midy, le Soleil s'étant un peu découvert, nous déterminâmes la situation par le moyen des fils qui se croisent à angles de 45° au foyer de la Lunette. Elle étoit éloignée environ de 20" de tems en ascension droite du bord Oriental, & d'environ 60 des mêmes parties en declinaison du bord Meridional du Soleil. Avec la Lunette de 17 pieds on voyoit que la Tache étoit composée de deux Taches obscures & longues jointes par une extremité, & enfermées dans une nebulosité assez irreguliere,

Fig 1.re

Fig 2.e

Fig. 3.e

guliere, comme on peut voir dans la premiere Figure.

Le 28 à 10 heures du matin la difference d'ascension droite entre la Tache & le bord Oriental du Soleil étoit de 30 secondes de tems, & la difference de declinaison à l'égard du bord Septentrional du Soleil étoit 60 des mêmes parties.

Le 29 à 8 heures & demie la difference d'ascension droite entre la Tache & le bord Oriental étoit de 40 secondes de tems, & la difference de declinaison entre la Tache & le bord Septentrional du Soleil étoit une minute & 10 secondes de tems.

Le 30 à 9 heures la Tache passoit par un cercle horaire 1 minute & 21 secondes de tems après le bord Occidental du Soleil, & sa difference de declinaison Septentrionale à l'égard de son bord Meridional étoit d'une minute & 6 secondes de tems.

Par cette observation nous avons calculé que la Tache arriva au milieu du Soleil le 31 à une heure du matin. Le 31 les nuages nous ont empêché de déterminer la situation de la Tache, & nous n'eûmes que le tems de faire sa figure.

Le premier de Fevrier à 8 heures & demie la Tache étoit éloignée en ascension droite du bord Occidental du Soleil de 50 secondes, & d'une minute de tems en declinaison à l'égard du bord Meridional.

Le 2 Fevrier à 9 heures la Tache passoit par un cercle horaire 36 secondes après le bord Occidental du Soleil, & sa difference de declinaison à l'égard du bord Meridional étoit de 56 secondes des mêmes parties.

Le même jour on voyoit avec la Lunette de 17 pieds près du bord Oriental du Soleil une grande quantité de facules, qui étoient à l'endroit où devoit être la Tache suivante qui parut le 7 Janvier près du bord Oriental.

On continua de voir ces facules le 3 en plus grande quantité & plus grandes que le jour précedent, mais on n'y voyoit point de Taches.

Le 3 Fevrier à 8 heures & demie la grande Tache qui étoit près du bord Occidental du Soleil étoit éloignée en

ascension droite de 25 secondes de tems, & sa difference de declinaison à l'égard du bord Meridional étoit de 53 des mêmes parties.

Le 4 Fevrier à 9 heures la même Tache passoit par un cercle horaire 15 secondes après le bord Occidental, & elle étoit plus Septentrionale en declinaison que le bord Meridional du Soleil de 30 des mêmes parties.

Le même jour avec la Lunette de 17 pieds on voyoit dans la partie Orientale du Soleil les facules plus avancées vers le milieu de son disque, & entre ces facules on y distinguoit six petites Taches qu'on n'avoit point vû les deux jours précedens. Parmi ces Taches il y en avoit une plus grande que les autres.

Le 5 Fevrier à 8 heures & trois quarts la Tache précedente passoit 10 secondes après le premier bord, & elle étoit plus Septentrionale de 45 secondes de tems du bord Meridional du Soleil. On voyoit aussi proche de cette Tache une grande quantité de facules.

La Tache suivante qui étoit au milieu de plusieurs facules étoit augmentée, en sorte que nous la vîmes distinctement avec des petites Lunettes, pour en déterminer sa situation par le moyen des fils qui se croisent au foyer de la Lunette. Elle passoit par un cercle horaire 22 secondes de tems avant le bord Oriental, & étoit plus Meridonale de 60 de ces parties que le bord Septentrional.

Le 6 Fevrier le Ciel fut couvert. Le 7 Soleil ayant paru à midi, la Tache ne se voyoit plus. La Tache suivante paroissoit encore augmentée. Elle étoit éloignée de 49 secondes de tems du bord Oriental du Soleil, & d'une minute & 6 secondes de tems du bord Septentrional.

On a remarqué tous les jours quelque changement dans la grande Tache. Le 27 Janvier elle étoit composée de deux Taches obscures jointes ensemble par une extremité. Le 28 la Tache étoit separée en deux. Le 29 elle étoit separée en trois parties presqu'égales. Le 31 ces parties s'étoient éloignées considerablement l'une de l'autre; mais elles étoient enfermées dans une même nebulosité.

Le 1 Fevrier ces trois Taches s'étoient encore plus éloignées l'une de l'autre, & avoient chacune à part sa nebulosité. La Tache Occidentale étoit beaucoup plus grande que les autres : elle étoit environnée d'une plus grande nebulosité, & c'est la Tache qui est restée jusqu'à la fin. Les autres deux Taches après avoir diminué, se sont dissipées. Du commencement il y avoit proche de cette Tache quelques facules qui ont été en plus grande quantité vers la fin à mesure que les Taches se dissipoient.

Par l'observation du 4 de Fevrier la Tache precedente fut à pareille distance du bord Occidental du Soleil à minuit entre le 3 & le 4 qu'elle avoit été au 7 de Janvier à midi. Entre le midi du 7 de Janvier & minuit du 3 de Fevrier, il y a 27 jours & demi, qui est la révolution ordinaire des Taches, comme on la trouve par quantité d'autres observations. Cependant ayant posé sa situation dans un cercle qui represente le disque du Soleil, & l'aide de la Theorie de M. Cassini ayant décrit les Poles & l'Equinoxial du globe du Soleil, nous trouvons que cette Tache n'a pas précisément la même situation à l'égard de l'Equinoxial, qu'elle avoit eu le mois passé ; mais qu'elle est plus Meridionale que dans la révolution precedente d'environ deux degrez de la circonference du Soleil. Cela n'empêche pas que nous ne la supposions la même ; car comme nous avons observé que la même Tache se divise en plusieurs parties, dont les unes s'éloignent des autres, on peut supposer aussi que la même Tache se soit éloignée de l'Equinoxial.

Par l'observation du 7 Fevrier la Tache suivante s'est trouvée à minuit au même endroit du Soleil où elle avoit été le 11 de Janvier à 10 heures environ, ce qui donne la révolution de la Tache de 27 jours & 14 heures environ. Ayant aussi comparé la distance qu'elle avoit à l'Equinoxial du Soleil le mois passé avec la distance qu'elle a presentement, elle ne s'est pas trouvée précisément la même : mais dans cette derniere révolution la Tache étoit plus proche de l'Equinoxial qu'elle n'étoit dans la prece-

dente; tout au contraire de ce qui est arrivé dans l'autre Tache, laquelle s'en est éloignée davantage. Ces deux Taches étoient éloignées l'une de l'autre environ 60 degrez de la circonference du Soleil.

OBSERVATIONS

Du retour d'une des Taches qui parut le 7 de Janvier vers le bord Occidental du Soleil.

PAR M. DE LA HIRE.

1704. 19. Fevrier. LA Tache qui avoit paru sur le bord Occidental du Soleil vers le commencement de ce mois, a commencé à reparoître vers la fin de ce même mois, après avoir parcouru l'hemisphere du Soleil qui ne nous est pas visible. Nous ne l'observâmes que le 28, les jours precedens ayant été couverts. Elle passa au Meridien plûtôt que le bord Oriental du Soleil de 30″.

Le 29 elle passa au Meridien 44″ ½ plûtôt que le bord Oriental ou le dernier bord du Soleil. Sa hauteur Meridienne apparente étoit alors de 23° 5′ 20″, & celle du bord superieur du Soleil étoit de 23° 21′ 30″.

Le 2 Fevrier la Tache passa au Meridien 34″ après le premier bord du Soleil, & sa hauteur Meridienne apparente étoit de 24° 8′ 30, & celle du bord superieur du Soleil de 24° 28′ 10″.

Le 3 Fevrier la Tache passa au Meridien 23″ après le premier bord du Soleil. Sa hauteur Meridienne apparente étoit de 24° 25′ 10″; & celle du bord superieur du Soleil de 24° 45′ 30″.

Le 4 Fevrier la Tache passa au Meridien 14″ après le premier bord du Soleil, & sa hauteur Meridienne apparente étoit de 24° 41′ 40″. Mais celle du bord superieur du Soleil étoit de 25° 3′ 10″.

2. fevrier 1704.
à midy.

4. fevrier 1704.
à midy

Le 5e la Tache passa au Meridien 8″ après le premier bord du Soleil, & sa hauteur Meridienne apparente étoit de 24° 59′ 0″. Celle du bord superieur du Soleil 25° 21′ 0″.

J'observay dans ce même tems la distance de la Tache au bord le plus proche du Soleil, & je la trouvay de 51″ avec le Micrometre qui étoit appliqué à une Lunette de 16 piés.

Le 6 le Ciel fut entierement couvert, & le 7 au matin il ne paroissoit plus rien sur la surface du Soleil.

Il est arrivé à cette Tache ce qui arrive à toutes les autres, qui est un changement continuel dans leur figure, comme on le peut voir dans les Figures que j'en donne ici. Je remarqueray seulement que l'espace clair qui environne toutes les Taches, & qui est beaucoup plus clair que le reste de la surface du Soleil, paroît bien plus distinctement avec une Lunette de 5 ou 6 piés qu'avec une plus grande, & encore plus quand le verre n'est pas bien net, ou que le Ciel est un peu couvert.

NOUVELLES REMARQUES SUR LES INSECTES DES ORANGERS.

PAR M. DE LA HIRE.

DAns les Memoires de l'Academie imprimés en 1692, je donnay une description des Insectes qui s'attachent aux Orangers, & que l'on appelle communément *Punaises*, où je remarquay tout ce que j'en avois pû reconnoître jusqu'alors, tant de leur accroissement extraordinaire, étant toûjours attachés au même endroit de la tige de l'arbre ou de la feüille, que de la ponte des œufs. Mais je ne voyois point de quelle maniere ni quand ces Insectes pouvoient s'accoupler pour rendre leurs œufs fé- 1704. 8. Mars.

conds, puiſqu'il étoit très-évident qu'ils ne changeoient point de place dans tout le têms qu'on les voyoit croître. Je conjecturois bien que lorſqu'ils étoient éclos, ils ſe diſperſoient dans tout l'arbre, & même qu'ils ſe communiquoient à d'autres arbres, comme aux Myrtes, Citroniers, &c. Mais je n'avois pû encore les obſerver dans l'état où ils étoient après qu'ils étoient éclos.

J'avois examiné autrefois ce qu'on appelle la graine de Cochenille, & j'en avois donné un Memoire à l'Academie dans lequel je rapportois au long, tout ce que j'en avois pû découvrir par leur figure en les faiſant tremper, & entr'autres choſes j'avois remarqué que c'étoit un petit Inſecte dont il n'y avoit que la partie du ventre couverte d'écailles qui étoit reſtée toute entiere; mais on n'y voyoit rien de la partie du corps qui eſt vers la tête, ni aucunes pattes, que je jugeois avoir été deſſechées & réduites en pouſſiere.

Il me vint alors en penſée ſi les petits Inſectes des Orangers n'étoient point les mêmes que les Cochenilles; car la figure du ventre me paroiſſoit aſſez ſemblable, & ces Inſectes ſe nourriſſant du ſuc des fruits rouges d'Opuntia où l'on recueille la Cochenille, pouvoit leur donner la couleur rouge & la forte teinture dont ils ſont remplis.

J'avois ſouvent obſervé que lorſqu'on écraſe entre les doigts les Inſectes des Orangers, ils demeurent teints d'une couleur rouſſâtre qui tient aſſez fort à la peau, quoyque ces animaux ne ſe nourriſſent que du ſuc de feüilles vertes & des tiges de l'arbre; & c'eſt ce qui me perſuadoit qu'il y avoit de la vrai-ſemblance à ce que je conjecturois, que ſi ces Inſectes ſe nourriſſoient du ſuc des fruits rouges de l'Opuntia, ils pourroient donner une teinture rouge très-forte; ce qui étoit encore confirmé par ce que je ſçavois que ceux qui ont mangé de ces fruits rendent une urine auſſi rouge que du ſang.

Pour venir à bout de mon deſſein, comme j'avois quelques plantes d'Opuntia qui étoient chargées de fruits fort

rouges, je les plaçay au-dessous & fort proche de quelques Orangers où il y avoit beaucoup d'Insectes, qui n'étoient point encore éclos. Je rompis même plusieurs des coques qui renferment les œufs, & j'en répandis une grande quantité sur tout l'Opuntia, esperant qu'il pourroit y avoir quelques-uns de ces animaux qui s'y attacheroient.

J'observois tous les jours avec grand soin tant les feüilles que les fruits de l'Opuntia ; & enfin j'apperçûs un jour une très-grande quantité de petits Insectes blancs qui couroient d'une très-grande vîtesse sur l'Opuntia. Je consideray aussi les Orangers, & j'y en trouvay de même à proportion. Je ne fis alors aucun doute que tous ces petits Insectes ne fussent ceux des œufs qui étoient éclos. Peu de tems après tous ces Insectes s'attacherent sur les Orangers autour des branches & sous les feüilles, & ils abandonnerent l'Opuntia où il n'en resta aucun ni sur ses feüilles ni sur ses fruits.

Ainsi je conclus que ces Insectes des Orangers, quoyqu'assez semblables en apparence aux Cochenilles, n'avoient pas trouvé sur l'Opuntia une nourriture qui leur fût convenable comme sur plusieurs autres plantes, & que ce n'étoit pas les mêmes.

Cependant ma recherche ne me fut pas tout-à-fait inutile ; car je connus alors que les Insectes des Orangers depuis qu'ils sont éclos jusqu'à une certaine grandeur où ils parviennent en peu de tems avant que de s'attacher, peuvent s'accoupler & se trouver en état de pondre des œufs féconds dans un tems fort éloigné de celui de leur accouplement, car il se passe environ 8 mois ; & ce qu'il y a encore de plus extraordinaire, c'est le grand accroissement des ces Insectes depuis qu'ils sont attachés & arrêtés jusqu'au tems de la ponte ; car ils deviennent 20 ou 30 fois plus grands qu'ils n'étoient auparavant, & leur figure exterieure étant changée, il ne paroissent plus que comme une écaille de Tortuë assez longue.

Il seroit à souhaiter qu'on pût transporter quelques semences des Cochenilles dans les parties Meridionales de

l'Europe, comme dans la Sicile & dans l'Espagne où l'Opuntia vient très-facilement; car je ne fais pas de doute que la Cochenille ne pût y être assez bien cultivée pour en connoître parfaitement la nature, sans être obligé de s'en rapporter à des Relations de gens grossiers & d'Esclaves qui ne regardent les productions de la Nature que par le profit qui leur en revient.

EXTRAIT D'UNE LETTRE
DE M. SARRASIN

Medecin du Roy en Canada, touchant l'Anatomie du Castor, lûë à l'Academie par M. PITTON TOURNEFORT.

De Quebec le 15. Octobre 1700.

LEs plus gros Castors ont 3 ou 4 pieds de long sur 12 ou 15 pouces de large au milieu de la poitrine & d'une hanche à l'autre. Ils pesent ordinairement depuis 40 jusqu'à 60 livres. A l'égard de leur vie, on ne croit pas qu'elle soit de plus de 15 ou 20 ans. Ces animaux sont ordinairement fort noirs dans le Nord le plus reculé. On y en trouve aussi de blanc. Ceux de Canada sont la plûpart bruns: mais cette couleur s'éclaircit à mesure que les Païs sont plus temperez; car ils sont fauves, & même ils approchent de la couleur de paille chez les Ilinois & chez les Chaoüanons.

Le Castor dont on donne ici la description, étoit assez noir, quoyque pris sur le bord d'un petit Lac à douze ou quinze lieuës de Quebec. Il ne pesoit que cinquante livres.

Cet animal est par tout revêtu de deux sortes de poil, excepté aux pattes, qui sont couvertes d'un poil très-court. Le poil de la premiere espece est long de 8 ou 10 lignes jusqu'à deux pouces, & diminuë en approchant de la tête

&

& de la queuë. C'est le plus gros, le plus rude, le plus luisant, & il donne la principale couleur au Castor. Si on considere ce poil avec un Microscope, on remarque dans son milieu une ligne beaucoup moins opaque que les côtez, ce qui fait conjecturer qu'il est creux.

L'autre espece de poil est un duvet très-fin & très-serré, long d'environ un pouce, qui garantit le Castor du froid, & qui sert à faire des chapeaux & des étoffes. Les peaux qui ont servi d'habit ou de couverture de lit aux Sauvages sont les plus recherchées, d'autant qu'elles ont perdu leur grand poil, & que le duvet qui reste étant devenu gras par la matiere de la transpiration, est plus propre aux ouvrages & se foule beaucoup mieux. Ce duvet quand l'animal est en vie & qu'il travaille, est conservé & garanti de la bouë par le poil le plus rude & le plus long.

Il est d'abord assez difficile de connoître si le Castor est mâle ou femelle. On ne voit qu'une seule ouverture sous la queuë, & cette ouverture est destinée pour la sortie de leurs differens excremens. Les parties qui distinguent le sexe sont cachées sous les muscles. Pour ne pas s'y tromper, il faut pincer plus que la peau qui est entre l'os pubis & cette ouverture. On y sent la verge qui est dure, grosse & longue comme le doigt.

On trouve sous la peau un lit de graisse épais ordinairement de 8 ou 10 lignes sous le ventre, & qui s'étend depuis les machoires jusqu'à la queuë; mais il diminuë peu à peu en approchant du dos où il n'y en a point du tout. On découvre un second lit de graisse entre les deux muscles obliques du ventre; mais cette graisse n'a que 2 ou 3 lignes d'épais. Les visceres en sont presque dépourvûs. L'épiploon quoyqu'aussi grand que dans les autres animaux ne pese que 3 ou 4 onces.

Tous les muscles du Castor sont extrêmement forts, & semblent plus gros qu'ils ne doivent être par rapport à la grandeur de l'animal. Les fibres du muscle peaucier ont des directions fort differentes. Celles qui couvrent le dos depuis les cuisses jusqu'au col sont droites & si grosses que

ce muſcle a dans cet endroit-là près d'un poûce d'épaiſſeur. Les fibres qui ſont ſituées à côté de celles-ci s'en écartent peu à peu, & font un volume bien plus petit. Elles décrivent preſque des demi-cercles, leſquels deſcendans ſur les muſcles pectoraux, ſur le ſternum & tout le long des muſcles droits, ſe réüniſſent par une aponevroſe de telle ſorte qu'elles envelopent tout l'animal. Une partie de ces fibres vient embraſſer les cuiſſes, après quoy elles ſe croiſent ſur l'os pubis, d'où elles deſcendent & forment un tiſſu en maniere de natte. Ce tiſſu couvre non-ſeulement un paquet de fibres très-conſiderable, mais auſſi le ſphinter de l'anus.

De la ſurface interne de la natte dont on vient de parler, environ 12 ou 15 lignes au-deſſous de l'os pubis, ſortent deux trouſſeaux de fibres charnuës gros comme le doigt, leſquels remontent à l'inſertion des muſcles droits & s'y attachent. De la partie de ce muſcle qui couvre le dos & dont les fibres ſont droites, il ſe forme du côté de la queuë une aponeroſe très-forte qui envelope tout ce qui eſt au-deſſous des cuiſſes. Elle eſt attachée aux apophyſes épineuſes des vertebres qui ſont vers la queuë, & de diſtance en diſtance elle tient aux membranes des muſcles qui la font mouvoir.

Le même plan de fibres étant parvenu aux premieres vertebres du dos, ſe diviſe d'abord en deux parties qui forment pluſieurs têtes, & qui par differens principes s'inſerent en differens endroits. Il y en a une large d'environ 2 poûces qui monte juſqu'à la troiſiéme vertebre du col, & qui eſt attachée ſur le rhomboïde. Une autre s'attache ſur la crête de l'omoplate, une troiſiéme ſur la partie poſterieure & interieure du bras, ſur le coude & ſur la partie poſterieure & ſuperieure de l'avant-bras. Enfin la quatriéme fait un même tendon avec celui du très-large, & de celle-ci il s'en fait une cinquiéme qui s'inſere ſur la partie moyenne & inferieure de l'avant-bras.

Il n'y a rien de particulier dans les muſcles du ventre, ſi ce n'eſt que le petit oblique & le tranſverſal ſont inſeparables.

Le foye du Castor est rouge-brun, divisé en sept lobes qui occupent également les deux hypochondres, en sorte qu'ils couvrent l'estômac de tous les côtez. La vessie du fiel est attachée au plus gros de ces lobes, & se vuide ordinairement dans le duodenum. M. Sarrasin en a trouvé un qui se dégorgeoit dans le jejunum.

La ratte est ronde & n'a guere que 4. lignes de diametre sur environ 3 poûces de long. Elle est plus ferme que celle des autres animaux. Cinq ou six vaisseaux fort courts l'attachent au fond de l'estomac. Elle tient aussi par quelques membranes aux reins, au pancreas & au colon. On s'apperçoit de quelques glandes conglobées, grosses comme des pois, situées vers son extrêmité qui regarde l'estomac, & qui est un peu plus grosse que l'autre.

Les reins ont demi poûce d'épais sur deux poûces de long & sur presque autant de large. Les glandes renales sont longues de 4 ou 5 lignes.

Le pancreas a du moins deux pieds de long. Il forme un angle dont la pointe est attachée au gros lobe du foye par quelques petits filets. Ce pancreas est divisé en deux parties : l'une passe sous l'estomac & vient s'attacher à la ratte & au rein gauche : l'autre descend le long du duodenum & du jejunum, dans lesquels il s'ouvre par plusieurs petits conduits.

L'ésophage est interieurement revêtu d'une membrane blanche, qui est comme une espece de doublure que l'on détache aisément du canal sans la déchirer.

Le ventricule du Castor est une des parties des plus singulieres de cet animal. Ce ventricule a 12 ou 13 poûces de long sur environ 4 de large du côté de la ratte. Il diminuë peu à peu, en sorte qu'après les deux tiers il est rétreci de moitié par une saillie de plus d'un poûce qui avance dans sa capacité. Après quoy il s'élargit d'environ 3 poûces vers le pylore qui est considerablement relevé, arrondi & avancé vers la ratte par une membrane attachée à l'ésophage par son autre bout. L'évasement dont on vient de parler semble faire un second ventricule,

mais il ne sert proprement qu'à retenir plus long-tems les alimens, & sur-tout les solides, comme le bois dont il ne s'y fait qu'un extrait fort leger ; car il passe presque comme il a été avalé, au lieu que les herbes, les fruits, les racines se dissolvent parfaitement.

Les membranes du ventricule sont si minces que cette partie se déchire pour peu qu'on la gonfle. Il n'y a que la membrane charnuë qui s'épaissit du côté du pylore & le fortifie. On ne trouve aucunes glandes dispersées dans ce ventricule ; mais en récompense il est garni d'environ 100 vessies de deux ou trois lignes de long, lesquelles se rétrecissent du côté du ventricule comme le font les grains de raisin qui sont un peu trop pressez. Cette couche de vessies est attachée sur la membrane nerveuse, & recouverte de la charnuë. A l'égard de sa situation elle se trouve entre la partie droite du ventricule & l'ésophage. Toutes ces vessies font une espece de corps demi spherique haut de 7 ou 8 lignes, & large d'environ 3 poûces à sa base. L'interieur de chaque vessie paroît glanduleux ; mais elles sont si délicates qu'elles crevent pour peu qu'on les presse. Quoyque toutes ces vessies ayent chacune leurs issuës, elles répondent neanmoins à 12 petits orifices larges d'environ 2 lignes, rangez sur 4 colonnes qui s'ouvrent dans le ventricule. Après la mort de l'animal ces vessies contiennent matiere blanche presque sans odeur & de consistance de boüillie : mais il y a beaucoup d'apparence qu'elle est fluide lorsque l'animal est en vie. Cette matiere est sans doute le dissolvant des alimens, qui dans les Païs froids & pendant l'Hyver ne sont que de bois d'Aûne, de Plantane, d'Orme, de Frêne & de differentes especes de Peuplier. Pendant l'Esté les Castors vivent de toutes sortes d'herbes, de fruits, de racines, sur tout de celles de differentes especes de Nymphea.

Les intestins de cet animal sont très-délicats, & ont environ 20 pieds de long. Le cæcum a la figure d'une faux. Il est tenu dans cet état par deux ligamens qui rampent l'un le long de sa partie cave, & l'autre sur la partie con-

vexe. Mesuré par la partie cave il a 18 poûces de long, & plus de 30 par la convexe. Sa largeur est de 4 poûces dans son gros bout, & peut contenir 5 ou 6 livres d'eau. Le colon a 4 pieds de long, & le rectum environ 15 poûces.

La vessie est semblable à celle des chiens. Si l'on continuë d'ouvrir cet animal jusqu'à la racine de la queuë, on découvre fort aisément ses testicules & le paquet dont on a parlé dans la description du muscle peaucier. Ce paquet est un muscle creux qui renferme la verge & les bourses.

Les testicules sont situez dans les aînes, appuyez par leur base sur les parties laterales de l'os pubis, & engagez dans la graisse. Ils sont envelopez de plusieurs membranes que le peritoine & les muscles du bas ventre leur fournissent, sur tout le muscle cremastere dont les fibres qui sont circulaires leur donnent la figure d'un cône. Ils ressemblent tout-à-fait à ceux des chiens lorsqu'ils sont developez.

Les vaisseaux déferens grossissent considerablement derriere le col de la vessie; mais ils diminuënt avant que d'entrer dans l'uretre, où ils ont leur issuës separées l'une de l'autre.

Les vesicules seminales sont tellement engagées sous l'os pubis, qu'on ne peut les voir sans les separer. Elles ont ordinairement deux poûces de long sur un poûce de large vers le milieu; car elles sont pointuës par les deux bouts. Leurs conduits s'ouvrent aussi separément dans l'uretre, & vont aboutir ainsi que ceux des vaisseaux déferens à une éminence charnuë qui est grosse comme un pois, & qui est une espece de *veru montanum*. On voit à côté de cette éminence plusieurs petits orifices des conduits excretoires de quelques glandes situées autour du col de la vessie, lesquelles font la fonction des prostrates, & sont remplies d'une liqueur blanche & huileuse.

Le muscle creux est situé entre l'os pubis & l'ouverture des excremens. Il ressemble en quelque maniere à ces anciennes gibecieres larges & arrondies par le bas & rétre-

cies vers le haut. Un corps tendineux large d'environ un poûce tient ce muscle attaché à la levre inferieure & moyenne de l'os pubis d'où il descend, en s'évasant jusqu'à l'ouverture commune dont on va parler.

En ouvrant cette espece de gibeciere de haut en bas, on découvre vers son milieu la verge depuis la racine jusqu'au *balanus*. Elle partage cette capacité en deux cavitez, après quoy le muscle creux se repliant d'une certaine maniere, forme encore deux cavitez situées sous les premieres à côté du *balanus* : C'est dans ces quatre cavitez que sont renfermées les bourses qui contiennent le Castoreum : mais avant que de passer outre, il est bon de parler de l'ouverture commune. C'est une capacité d'environ deux poûces en tout sens lorsqu'elle est bien gonflée dans laquelle aboutissent les bourses du Castoreum, l'uretre, l'anus & le vagin dans les femelles. Elle est éloignée d'environ 3 poûces de la racine de la queuë, & de 4 poûces de l'os pubis, noirâtre & bordée d'un poil assez fin qui ne ressemble point à celui du reste du corps.

La verge tient par sa racine à la levre inferieure de l'os pubis. De là elle perce la membrane de la cloaque dans l'endroit où les bourses superieures communiquent. Cette membrane est collée circulairement à l'insertion du *balanus*, comme le diaphragme l'est à l'ésophage. La partie inferieure de la verge qui est longue d'environ deux poûces & demi, est contenuë dans la cavité superieure du muscle creux dans l'endroit où il se separe en deux cavitez ; de sorte que le *balanus* qui est long de près d'un poûce & demi, se trouve tout-à-fait dans le cloaque situé entre les issuës des bourses tant superieures qu'inferieures. Le Castor approche la femelle par devant, tant à cause de la situation de l'ouverture commune, qu'à cause de la longueur & de l'inflexibilité de la queuë. Un Chasseur a assuré M. Sarrasin qu'il avoit tué d'un coup de fusil un Castor mâle & une femelle accouplez dans cette situation.

Le *balanus* qui est tout-à-fait semblable à celui des

chiens, eſt couvert d'une peau chagrinée. On découvre dans le corps de la verge un os de figure piramidale, dont la baſe eſt attachée au corps caverneux, & qui eſt long d'environ 15 lignes.

Sous l'origine de la verge ſe trouvent deux corps gros comme une noix attachez aux corps caverneux. Ces deux corps ſont compoſez de veſicules fort délicates qui ſe gonflent dans le tems de la copulation par le moyen de pluſieurs vaiſſeaux ſanguins qui forment une eſpece de capſule à l'uretre.

On trouve au même endroit deux glandes ovales, longues d'environ 10 lignes ſur trois ou quatre lignes d'épais. Leurs vaiſſeaux excretoires qui ſont gros comme un ſtilet ordinaire & longs de plus de 12 ou 15 lignes, s'ouvrent dans l'uretre environ un poûce avant dans la verge. La ſubſtance de ces glandes eſt ferme & contient une liqueur huileuſe & griſâtre, qui peut être ſert à defendre le canal de l'uretre de l'âcreté des urines. Les rats en ont de pareilles, excepté qu'elles ſont rondes.

Les parties de la generation de la femelle du Caſtor ſont ſemblables à celles des femelles des lapins, des lievres, des rats. Le vagin de celles de Caſtor a cinq poûces de long. Il n'eſt pas renfermé non plus que l'uretre dans la cavité ſuperieure du muſcle creux comme l'eſt la verge du mâle; mais ce vagin a ſon ouverture dans la cloaque.

On aſſure que les femelles portent 4 mois, & qu'elles font juſqu'à 5, 6 & 8 petits : cependant on ne leur en trouve jamais plus de 4. M. Sarraſin l'a verifié dans celles qu'il a ouvertes.

Les Caſtors femelles ont 4 mammelles, deux ſituées ſur le grand pectoral, ainſi que celles des femmes entre la 2 & la 3 de vraïes côtes, & les deux autres au col environ 4 doigts plus haut que les premieres.

Les anciens qui ne diſſequoient pas avec beaucoup de ſoin, ne s'appercevoient pas des teſticules du Caſtor, parce qu'ils ſont fort petits, & qu'ils ſont ſituez dans les

aînes. La grôſſeur, la ſituation & la figure des bourſes leur impoſoit. Meſſieurs de l'Academie Royale des Sciences ont les premiers démêlé ces parties avec exactitude.

Les bourſes qui ſont contenuës dans les cavitez ſuperieures du muſcle creux, & que l'on appellera dans la ſuite bourſes ſuperieures, contiennent une matiere reſineuſe : mais celles qui ſont dans les cavitez inferieures, & que l'on nommera pour cela bourſes inferieures, y ſont aſſemblées par paquets renfermées ſous une membrane commune, & remplies d'une matiere huileuſe. Les ſuperieures ſont doubles, & reſſemblent aſſez bien à une beſace, dont chaque poche qui eſt d'environ trois poûces de long ſur un poûce & demi de large dans le fond, ſe trouve placée l'une à droit & l'autre à gauche de la verge. Ces bourſes décrivent un demi-cercle en approchant de la verge, & ſe rétreciſſent peu à peu juſqu'à leurs ouvertures, leſquelles ſont d'environ un poûce, & répondent dans la cloaque.

On remarque trois membranes dans la tiſſure de ces bourſes. La premiere eſt ſimple, mais très-ferme. La ſeconde eſt beaucoup plus épaiſſe, moëleuſe & fort garnie de vaiſſeaux. La troiſiéme eſt particuliere au Caſtor. Elle eſt ſeche comme un vieux parchemin. Elle en a l'épaiſſeur & ſe déchire de même ; mais elle eſt tellement repliée ſur elle-même, qu'elle acquiert quand on la dévelope trois fois plus de volume qu'elle n'avoit auparavant. Cette membrane eſt fort liſſe en dehors, gris de perle, marquetée aſſez ſouvent de taches brunes, quelquefois rougeâtres. Elle eſt inégale en dedans, garnie de petits filets auſquels la matiere reſineuſe eſt fort adherente.

Il ſemble que la premiere membrane ne ſert qu'à contenir les bourſes dans leur juſte grandeur. Les vaiſſeaux dont la ſeconde eſt tapiſſée fourniſſent la matiere reſineuſe mêlée avec le ſang. Cette membrane s'inſere dans tous les replis de la troiſiéme, comme la pie-mere entre dans les anfractuoſitez du cerveau. Pour la troiſiéme il y auroit beaucoup d'apparence qu'elle dût ſervir à filtrer la matiere

tiere resineuse, si l'on pouvoit y découvrir des glandes. Il faut les supposer très-petites, & peut-être que les filets dont ont vient de parler en font les conduits excretoires.

Cette matiere filtrée s'épaissit peu à peu dans les bourses, & y acquiert la consistance d'une resine échauffée entre les doigts. On l'appelle communément *Castoreum*. Elle conserve sa mollesse plus d'un mois après avoir été séparée de l'animal, & sent mauvais dans ce tems-là, étant grisâtre en dehors & jaunâtre en dedans : ensuite elle perd son odeur, elle se durcit & devient friable comme les autres resines : mais il est à remarquer qu'elle est combustible en tout tems. Les bourses les plus grosses ne pesent qu'environ deux onces.

Les bourses inferieures paroissent d'abord doubles : l'une est à droit, & l'autre à gauche de la cloaque : mais lorsqu'on a découvert la membrane qui les envelope, on en trouve quelquefois 2 ou 3 ensemble. Chaque paquet de ces bourses est long de deux pouces & demi sur environ 14 ou 15 lignes de diametre. Les bourses sont arrondies par le fond, & diminuënt insensiblement en approchant de la cloaque. La plus grande de ces bourses occupe toute la longueur du paquet ; mais elle n'a qu'environ 8 ou 10 lignes de diametre. La seconde qui n'est pas toûjours plus grande que la troisiéme, n'a pas ordinairement la moitié du volume de la premiere. Pour la troisiéme elle est le plus souvent moindre que les autres.

Ces bourses outre leur membrane commune en ont chacune 3 propres. La 1 qui est d'un tissu fort délicat, est parsemée de beaucoup de vaisseaux. La 2 est non seulement plus épaisse ; mais elle est revêtuë & comme encroûtée de glandes qui paroissent conglomerées, & ces glandes se répandent par paquets de differentes grosseurs sur la surface exterieure de cette membrane. On s'apperçoit au milieu de ces paquets de certaines capacitez qui s'ouvrent les unes dans les autres ; sçavoir, les plus grandes dans les plus petites, & enfin celles-ci dans la bourse même par des ouvertures d'une ou deux lignes.

La 3 membrane est blanche, & si délicate qu'elle se déchire comme si ce n'etoit qu'une crême épaissie sur la surface interieure de la seconde. Elle est percée aux mêmes endroits que celle-ci, afin de donner passage à la liqueur filtrée dans les glandes.

La 1 membrane soûtient les vaisseaux sanguins qui fournissent la liqueur propre à être filtrée. La 2 & la 3 servent à la filtration. Les glandes piquées quoyque très-legerement, laissent échaper une liqueur huileuse, & même celle qui est dans la bourse se vuide facilement par cette ouverture pour peu qu'on presse la bourse. Cette liqueur est jaune-pâle; pleine de petits corps ronds semblables à ceux que l'on voit dans l'huile d'olive lorsqu'elle commence à se figer. Celle du Castor dans la suite devient parfaitement liquide & de couleur d'ambre.

On ne sçauroit assez admirer l'industrie de la nature, qui pour empêcher que les petits conduits des bourses (lesquels se dégorgent dans la cloaque à côté du *balanus*) ne se bouchent par l'épaississement de la liqueur, ou ne se dessechent par l'action de l'air, les a tous garnis d'un poil long d'environ demi-pouce. Il est attaché par sa racine dans la bourse même un peu au-delà du conduit; ensuite il en enfile la longueur, & s'avance un peu dans la cloaque.

Toutes ces bourses tant superieures qu'inferieures ne communiquent point entr'elles. Leurs conduits, comme l'on vient de dire, aboutissent dans la cloaque. On ignore l'usage de ces liqueurs par rapport aux Castors. Il n'est pas vrai qu'ils s'en servent pour exciter leur appetit, lorsqu'il est languissant. M. Sarrazin a nourri un de ces animaux pendant deux ans: mais il n'en a sçû découvrir l'usage. Il est faux que les Chasseurs s'en servent d'appas pour attirer les Castors dans les pieges. On graisse avec la liqueur huileuse les pieges que l'on dresse aux animaux carnassiers, & qui font la guerre aux Castors, comme les Martes, les Renards, les Ours, & surtout les Carcajoux. Ces derniers vont attaquer pendant l'hyver les Castors dans leurs loges qu'ils brisent bien souvent.

Parmi les Sauvages les femmes graissent leurs cheveux avec l'huile des bourses de Castor; mais elle sent mauvais, & ne peut être qu'un appas pour des Sauvages.

Du bas ventre il faut passer à la poitrine des Castors. Cette partie est longue d'environ 5 pouces, fort étroite par en haut, beaucoup plus large vers le bas, fermée par 14 côtes, sçavoir 7 vraies qui sont fort courtes, & 7 fausses qui non seulement sont beaucoup plus larges, mais qui par devant laissent entr'elles une grande distance. C'est ce qui facilite au Castor le moyen de se rétrecir aisément; car elles se peuvent raprocher par la contraction des fibres circulaires du premier muscle.

Le sternum est composé de 5 os assez étroits. Le cartilage xiphoïde qui est large d'un pouce, est rond & fort flexible. Les poûmons ont six lobes, trois à droit, deux à gauche, & un autre fort petit qui est enfermé dans le mediastin. Les cartilages annulaires de la trachée artere sont chacun d'une seule piece.

Le cœur est long d'environ 2 pouces. Sa base à un peu plus d'un pouce & demi de diametre. Les ventricules en sont égaux; mais l'oreillette droite est beaucoup plus petite que la gauche: cependant je ne crois pas pour cela que la quantité de sang qui tombe dans ce ventricule soit moins proportionnée à sa grandeur; car la veine-cave inferieure est dans cet endroit considerablement évasée, & forme un espece de sac entouré de fibres charnuës long & large d'environ un pouce & demi de diametre. Ce sac agit de concert avec l'oreillette droite pour remplir le ventricule droit. Le même sac est plus étroit du côté du foie, où il est fermé par 3 valvules semblables aux sigmoïdes qui permettent bien au sang de poursuivre sa route ordinaire, mais qui s'opposent à son reflux, lequel seroit à craindre, puisque la veine-cave superieure au lieu de s'ouvrir dans l'oreillette, passe par derriere & se dégorge dans le sac; de sorte que le confluant de ces deux colonnes de sang se rencontrent dans un sens tout-à fait opposé, & que la sous-claviere gauche au lieu de finir sa route dans la veine-

cave superieure, descend (en passant sur la branche inferieure de l'aorte) sous la base du cœur, & va s'ouvrir dans le sac dont on a parlé.

Voici ce que M. Sarrazin remarqua de plus singulier dans la tête du Castor.

1. L'os occipital est posé sur le derriere de la tête comme une plaque.

2. Il n'y a point de sinus interieur dans la faux de la dure-mere. Cette membrane divise legerement le grand cerveau, soûtenuë dans sa situation par des osselets inserez dans sa propre substance, dont les uns ne sont que des lames osseuses très-solides quoique minces, & les autres qui sont ronds ont une ligne de diametre sur deux ou trois lignes de long.

3. Le cerveau n'a aucunes anfractuositez sensibles. On en separe la pie-mere comme si elle étoit simplement couchée sur un corps uni.

4. Le cervelet est relevé de plusieurs tuberositez de differentes figures, qui sont separées les unes des autres par la pie-mere. Il y en a deux qui sortent des côtez, & qui ont 4 lignes en tout sens.

5. Les yeux sont fort petits, l'ouverture des paupieres n'ayant qu'environ quatre lignes. La cornée est ronde, & l'iris d'un bleu foncé.

6. M. Sarrazin a remarqué comme une troisiéme paupiere située dans le grand angle de l'œil. C'est comme un rideau qui couvre la cornée, ou qui la découvre au gré de l'animal.

7. Les deux machoires qui sont très-fortes & presque égales, sont garnies chacune de 10 dents, deux incisives & huit molaires. Les incisives sont situées au bout du museau: celles d'enhaut sont longues d'environ 8 lignes, & celles d'enbas ont environ un pouce de long. Les racines des superieures ont deux pouces & demi de longueur: celles des inferieures en ont plus de trois & suivent la courbure des machoires, ce qui leur donne une force prodigieuse; aussi les Castors abattent à belles dents de grands arbres.

8. Comme ces animaux vivent le plus ſouvent d'alimens fort ſecs, la nature leur a donné des glandes ſalivales d'une grandeur prodigieuſe. Elles occupent tout le deſſous de la machoire inferieure, le devant du col, & deſcendent juſques ſur les clavicules. Ces glandes ſont couvertes d'un muſcle adherant à la peau, composé de deux plans de fibres charnuës attachées à la 2, 3 & 4 vertebre du col par un principe charnu, large de 4 doigts. L'un & l'autre de ces plans prenant des routes opposées, embraſſent le col vers la trachée artere, ſur laquelle ils croiſent leurs fibres en forme de natte. Celui qui vient du côté droit va vers le gauche s'inſerer par ſon aponevroſe au bras, au plis du coude & à l'avant-bras. L'autre plan va par une route opposée s'inſerer de même dans l'autre bras. Ce muſcle tient par enhaut à toute la machoire inferieure, & par enbas il eſt appuyé ſur de la graiſſe & deſcend juſques ſur les clavicules. Son uſage eſt de preſſer les glandes en abaiſſant la machoire, & en approchant les bras de l'animal en même tems qu'il tient entre ſes mains les alimens dont il ſe nourrit.

La queuë du Caſtor n'a aucun rapport avec le reſte du corps. Elle paroît approcher de la nature des poiſſons; car elle eſt couverte d'une peau écailleuſe, ſous laquelle on trouve une graiſſe ferme qui reſſemble aſſez à la chair du Marſoin, ce qui pourroit ſans doute avoir le plus contribué à faire paſſer le Caſtor pour un amphibie. Les écailles ſont exagones, épaiſſes de demi-ligne ſur environ 3 ou 4 lignes de long, couchées les unes ſur les autres, jointes enſemble par une pellicule fort délicate, enchaſſées dans la peau dont elles ſe ſeparent aiſément après la mort de l'animal. Il ſort d'entre chaque écaille trois ou quatre poils longs d'environ 2 lignes, qui ſont plus frequens dans les côtez de la queuë qu'ailleurs.

Cette queuë eſt meuë par un grand nombre de muſcles, dont les uns ſont grands & les autres petits. Les plus grands ſont appuyez ſur les apophyſes tranſverſes de l'os ſacrum : leurs tendons ſont diſtribuez par paquets de 4.

ou de 6 enfermez dans des gaines qui les conduisent le long des vertebres de la queuë. Les petits muscles ont leurs tendons collez & confondus avec ceux des premiers.

Le Castor étant destiné à des ouvrages de maçonnerie, coupe le bois avec ses dents, amollit & gache la terre glaise avec ses pieds. Sa queuë ne lui sert pas seulement de truelle, mais d'auge pour porter le mortier ; ainsi il étoit necessaire qu'elle fût écailleuse, garnie de graisse & de plusieurs muscles.

Les pieds de devant sont semblables aux pieds des animaux qui comme lui aiment à ronger, & qui tiennent ce qu'ils mangent entre leurs pattes, comme les rats, les écureüils. Les pieds de derriere n'y ont aucun rapport ; & ressemblent à ceux des oiseaux de riviere, qui sont garnis de membranes entre les doigt, comme sont des oyes & des canards. Ainsi le Castor est propre à marcher sur la terre, & à nager dans les eaux. Depuis le bout du nez jusqu'aux cuisses, il est semblable à un rat : mais depuis les cuisses jusqu'à la queuë il ressemble assez aux oiseaux de riviere qui ont les pieds plats.

M. Sarrasin a joint à l'Anatomie du Castor plusieurs choses qui regardent leur genre de vie.

1. Lorsque les grandes inondations sont passées, les femelles retournent à leurs logemens pour y mettre bas. Les mâles tiennent la campagne jusqu'aux mois de Juin & de Juillet, & ne reviennent chez-eux que lorsque les eaux sont tout-à-fait basses. Alors ils reparent les desordres que les inondations ont faites à leuss logemens, où ils en font de nouveaux Ils changent de lieu pour trois principales causes. 1. Lorsqu'ils ont consommé les alimens qui étoient portée. 2. Qand la compagnie est trop nombreuse. 3. Quand les Chasseurs les inquietent trop.

2. Pour établir leur demeure, ils choisissent un endroit abondant en vivres, arrosé d'une petite riviere & propre pour y faire un lac. Ils commencent par y construire une chaussée de hauteur suffisante pour élever l'eau jusqu'au premier lit de leurs logemens. Si le païs est plat & que la

riviere ſoit creuſe, les chauſſées ſont longues ; mais moins élevées que dans les valons. Ces chauſſées ont dix ou douze pieds d'épaiſſeur dans leurs fondemens, & diminuënt peu à peu juſqu'au haut où elles n'en ont ordinairement que deux. Comme ces animaux ont une grande facilité à couper du bois, ils ne l'épargnent pas, & le taillent ordinairement par morceaux gros comme le bras ou comme la cuiſſe, & longs depuis 2 juſqu'à 4, 5 & 6 pieds. Ils les enfoncent par l'un des bouts fort avant dans la terre & fort proche les uns des autres, les entrelaſſant avec d'autres morceaux plus petits & plus ſouples, dont ils rempliſſent les vuides avec de la terre glaiſe. On continuë à meſure que l'eau s'éleve, afin de pouvoir tranſporter plus aiſément les materiaux. On arrête enfin ces ſortes de digues lorſque les eaux retenuës peuvent atteindre le premier lit du logement qu'ils doivent faire. Le côté de la chauſſée que l'eau touche eſt en talus, & l'eau qui peſe ſuivant ſa hauteur la preſſe puiſſamment contre terre, le côté oppoſé eſt à plomb. Elles ſont aſſez ſolides pour ſoûtenir les perſonnes qui montent deſſus, & ces animaux ont grand ſoin de les entretenir ; car ils réparent les moindres ouvertures avec la terre glaiſe. S'ils s'apperçoivent que les Chaſſeurs les obſervent, ils n'y travaillent que la nuit, ou bien ils abandonnent leur demeure.

3. La chauſſée étant finie, ils travaillent à leurs cabanes, qu'ils fondent toûjours ſolidement ſur le bord de l'eau, ſur quelque petite Iſle, ou ſur des pilotis. Ces logemens ſont ronds ou ovales, & débordent des deux tiers hors de l'eau ; mais ils ont la précaution de laiſſer une porte que la glace ne puiſſe pas boucher. Quelquefois ils bâtiſſent la cabane entiere ſur la terre, & font des foſſez de 5 ou 6 pieds de profondeur, qu'ils conduiſent juſqu'à l'eau. Ils employent les mêmes materiaux pour les bâtimens que pour les chauſſees, excepté que les bâtimens ſont perpendiculaires, & terminez en maniere de dome. Les murailles ont ordinairement deux pieds d'épaiſſeur. Comme leurs dents valent bien les meilleures ſcies, ils

coupent tous les bouts de bois qui excedent les murailles, & y appliquent un enduit en dedans & en dehors qui est une espece de torchis fait avec la terre glaise & des herbes seches. C'est bien dans cette occasion où ils se servent de leur queuë pour mieux affermir cet induit.

4. Le dedans de la cabane est voûté en anse de panier, & propre pour loger 8 ou 10 Castors. Hors d'œuvre cette maison à 8 ou 10 pieds de large sur 10 ou 12 pieds de long, supposé que la cabane soit ovale : dans œuvre elle a 4 ou 5 pieds de large sur 5 ou 6 pieds de long. Si le nombre des Castors est de 15 ou 20 & même de 30, ce qui est neanmoins fort rare, le logement est grand à proportion, & même il y en a plusieurs les uns contre les autres. Quelques Missionaires ont assûré M. Sarrasin qu'on avoit trouvé 400 Castors logez dans differentes cabanes qui communiquoient les unes aux autres. Elles sont disposées par etages, afin de s'y pouvoir retirer quand les eaux croissent Ils ont aussi une ouverture separée de leur porte & de l'endroit où ils se baignent. C'est par cette ouverture qu'ils vont à l'eau rendre leurs excremens.

5. On appelle Castors terriers ceux qui se logent dans les cavernes pratiquées dans un terrain elevé sur le bord de l'eau. Ils commencent leur logement par une ouverture qui va plus ou moins avant dans l'eau, selon que les glaces peuvent être plus ou moins épaisses, & la continuënt de 5 ou 6 pieds de long : mais elle n'a de largeur qu'autant qu'il en faut pour y pouvoir passer, après quoy ils font un lac de 3 ou 4 pieds en tout sens, où ils se baignent quand il leur plaît. Ensuite ils coupent un autre boyau dans la terre, qui va toûjours en s'élevant par étages, afin de s'y mettre au sec quand les eaux s'élevent. On trouve quelquefois de ces boyaux qui ont plus de 1000 pieds de long. Ces Castors couvrent les endroits où ils couchent avec de l'herbe. En hyver ils font des copeaux qui leur servent de matelas.

6. Tous ces ouvrages, surtout ceux des Castors qui vivent dans les pays froids, sont ordinairement achevez au

mois

mois d'Aoust & de Septembre, qui est le tems où il faut commencer à faire des provisions pour vivre pendant l'hyver. Ils coupent donc le bois par morceaux longs depuis 2 ou 3 pieds jusqu'à 8 ou 10. Les gros morceaux sont traînez par plusieurs de ces animaux, les petits par un seul, mais par des chemins differens pour ne pas s'embarrasser les uns les autres. Ils en mettent d'abord une certaine quantité qui flotte dans l'eau, puis ils en placent de nouveaux sur les premiers, qu'ils entassent pieces sur pieces jusqu'à ce que leur provision réponde au nombre des animaux qui ont dessein de loger ensemble : par exemple, la provision de 8 ou 10 Castors est de 25 ou 30 pieds en quarré sur 8 ou 10 pieds de profondeur. Ce bois n'est pas entassé comme celui de nos chantiers, mais il l'est d'une maniere qui leur permet d'en arracher les morceaux qu'il leur plaît, & ils ne mangent que ceux qui trempent dans l'eau. Avant que de les manger ils les coupent menu, & les apportent dans l'endroit de la cabane où ils couchent. S'ils les avoient coupés avant que de les mettre dans leur chantier, l'eau les auroit entraîné d'un côté & d'autre.

7. A l'égard de la chasse du Castor, on la fait depuis le commencement de Novembre jusqu'au mois de Mars & d'Avril, parce que ces animaux sont bien fournis de poil. On le tuë à l'affut, on lui tend des pieges, ou on le prend à la tranche. L'affut est la maniere la plus ennuyeuse & la moins assurée. La plus commune est celle de lui tendre des pieges. Quoique les Castors ayent fait leurs provisions, ils ne laissent pas que d'aller de tems en tems dans les bois chercher de nouvelle nourriture. Les Chasseurs même qui sçavent qu'ils aiment mieux le bois frais que celui qui est flotté, leur en apportent tout près de leurs cabanes, & leur dressent des pieges semblables à ces quatre de chiffre dont on prend les rats. On plante fort avant dans la terre plusieurs piquets de trois ou quatre pieds de long, entre lesquels il y a une traverse fort pesante, élevée d'environ un pied & demi, sous laquelle on met pour appas une branche de Peuplier longue de 5 ou 6 pieds, la-

quelle conduit à une autre branche fort petite. Celle-ci répond à la traverse avec tant de justesse, que le Castor a beau remuer la premiere, la traverse ne tombe que lorsqu'il coupe la petite branche, & il lui en coûte toûjours la vie.

8. Prendre les Castors à la tranche, c'est faire des ouvertures à la glace avec des instrumens tranchans lorsque les glaces n'ont qu'environ un pied d'épais. Les Castors ne manquent pas de venir à ces ouvertures pour respirer, & c'est là où on les assomme à coup de hache. Il y a des Chasseurs qui remplissent ces trous avec la bourre de l'épi de *Typha* pour n'être pas vûs par les Castors, & alors ils les attrapent par un pied de derriere. S'il y a quelque ruisseau près des cabanes, on en coupe la glace en travers pour y tendre un filet bien fort, tandis qu'on va briser la cabane pour en chasser ces animaux, qui ne manquent pas de se sauver dans le ruisseau & de donner dans le paneau.

METHODE POUR LA RECTIFICATION DES COURBES.

PAR M. CARRÉ.

1704. 15. Mars.

MOnsieur Vanheuraët nous a donné une maniere de rectifier des Courbes qui m'a paru un peu embarrassée, car elle suppose une des regles de M. Hudde pour la réduction des Equations : C'est ce qui m'a donné occasion de chercher la même chose par la methode *des Infiniment-petits*, qui est beaucoup plus simple & plus facile, & qui ne suppose rien.

Soient deux lignes courbes *NIB* & *DMQ* avec la droite *DB*, dont la nature est telle qu'ayant mené d'un

point quelconque M de la Courbe DMQ la tangente MT, & PM perpendiculaire sur DE prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre la Courbe NIB au point I, PT soit toûjours à TM comme quelque ligne donnée est à PI. Je dis que l'espace $DNBE$ est égal au parallelogramme fait de la donnée & d'une ligne égale à la Courbe DMQ.

Pour le démontrer soit menée une autre ligne pm infiniment proche de PM, & MR parallele à DE. A cause des triangles semblables TPM, MRm; $PT.TM :: RM.Mm$: Or la supposition $PT.TM :: a$ (la ligne donnée). PI; donc RM ou Pp. $Mm :: a.PI$. Donc le rectangle fait de la donnée par Mm est égal au rectangle de PI par Pp, c'est-à-dire $Mm \times a = PI \times Pp$. Mais la somme des Mm est égale à la Courbe DMQ, & la somme des $PI \times Pp$ est égale à l'espace $DNBE$; donc, &c.

Maintenant soit cette équation générale $a^n y^m = x^p$ qui exprime la nature d'une infinité de Courbes telles que DMQ, m marquant une puissance quelconque paire, & p une puissance impaire. Ayant nommé DP, x; PM, y; & PI, z; donc MR ou $Pp = dx$, & $Rm = dy$, on cherchera la valeur de la soûtangente PT que l'on trouve par les regles $= \frac{mx}{p}$; & à cause du triangle rectangle TPM, $TM = \overline{\frac{mmxx}{pp} + \frac{x^{\frac{2p}{m}}}{a^{\frac{2n}{m}}}}^{\frac{1}{2}}$. On aura donc $PT \left(\frac{mx}{p}\right)$. $TM \left(\overline{\frac{mmxx}{pp} + \frac{x^{\frac{2n}{m}}}{a^{\frac{2n}{m}}}}^{\frac{1}{2}}\right)$ :: la donnée (a). PI (z). D'où

l'on tire $zz = aa + \frac{pp}{mm} \frac{x^{\frac{2p-2m}{m}}}{a^{\frac{2n-2m}{m}}}$ qui est un lieu à une infinité d'autres lignes courbes telles que NIB, dont la quadrature sert à trouver la longueur des premieres Courbes DMQ.

Si $n = 1$, & $m = 2$, p sera $= 3$; car tous les termes d'un lieu geometrique doivent être d'un même degré, & pour lors l'équation generale $a^n y^m = x^p$ se changera en celle-ci $ayy = x^3$ qui exprime la nature de la seconde parabole cubique, & l'egalité correspondante deviendra $zz = \frac{9ax}{4} + aa$ qui est un lieu à la parabole ordinaire, dont le sommet est éloigné du point D de $\frac{4a}{9}$, & le parametre $= \frac{9a}{4}$. Or nommant BE, d; & AE, b; DE sera $b - \frac{4a}{9}$, & on trouvera par la methode de la quadrature de la parabole * que la somme infinie des $\frac{zdx}{a}$ qui est égale à la longueur de la ligne courbe DMQ, est égale à $\frac{2bd}{3a} - \frac{8}{27}a$.

* Calcul Integral p. 18.

Si la Courbe DMQ est une parabole du premier genre qui ait pour axe DN, l'équation generale se changera en celle-ci $ay = xx$, car en ce cas $n = 1$, $m = 1$, & $p = 2$, & sa correspondante deviendra $zz = 4xx + aa$, d'où l'on tire $xx = \frac{zz - aa}{4}$, qui est un lieu à l'hyperbole, dont le centre est le point D, le parametre $= \frac{1}{2}a$, & l'axe traversant $= 2a$: Car par la proprieté de l'hyperbole xx (les x representent ici les ordonnées). $zz - aa :: \frac{1}{2}a. 2a.$

Il est manifeste que l'on ne peut trouver geometriquement la longueur de la parabole sans la quadrature de l'hyperbole, & réciproquement on ne peut trouver la quadrature de l'hyperbole sans la longueur de la parabole.

NOUVELLE FORMATION DE SPIRALES,

Beaucoup plus différentes entr'elles que tout ce qu'on peut imaginer d'autres Courbes quelconques à l'infini ; avec les Touchantes, les Quadratures, les déroulements, & les longueurs de quelques-unes de ces Spirales qu'on donne ſeulement ici pour éxemples de cette formation générale.

PAR M. VARIGNON.

DAns les Mémoires de 1700, pag. 90, en démontrant les Forces centrales de la Spirale générale de M. de Fermat, je dis que j'en avois encore une infiniment plus univerſelle : La voici formée par le moyen d'une Courbe en général, qui dans le détail fournit non-ſeulement toutes les Spirales de M. de Fermat, mais encore autant d'autres que cette Courbe générale ſe peut diverſifier en particuliéres, ſoit geométriques, ſoit mécaniques ; & même en autant d'autres encore que chaque Courbe particuliére peut avoir de diſpoſition différentes dans l'uſage qu'on en peut faire pour cela, ainſi qu'on le verra dans les éxemples qu'on en donnera dans la ſuite. 1704. 9. Avril.

Cette nouvelle formation de Spirales me vint en penſée dés il y a ſix ans, en faiſant réfléxion que celles de M. Fermat (dont la nature eſt d'avoir par tout leurs ordonnées concourantes, ou leurs rayons, en raiſon des puiſſances quelconques des arcs circulaires qui en expriment les révolutions) ne différent aucunement de celles qu'on trouveroit en prenant les arcs de révolution en rai-

ſon des ordonnées de Paraboles de tous les genres à l'infini, dont les abſciſſes ſeroient égales aux ordonnées concourantes des Spirales cherchées. Ce fut, dis-je, ce qui me fit penſer à ſubſtituer d'autres Courbes, ou plutôt une Courbe en général qui les comprît toutes, à la place de ces Paraboles ; & j'en vis naître une infinité de genres de Spirales toutes différentes de celles dont je viens de parler : Il y en avoit d'infinies comme celles-là, & de même contour qu'elles ; il y en avoit auſſi d'infinies du côté du Pole ou de leur centre, dont les unes étoient encore infinies, & d'autres finies par l'autre bout ; il s'en trouvoit de finies de part & d'autre ; on en voyoit qui avoient des points d'inflexion, ou de torſes ; d'autres revenoient une ou pluſieurs fois ſur elles-mêmes en forme de laſſis ou de nœuds ; il y en avoit même de rebrouſſées, & cela d'une variété infinie. En voici de toutes ces façons, entre leſquelles ſont ſix Spirales logarithmiques, dont cinq ſont nouvelles.

FORMATION NOUVELLE de Spirales à l'infini.

Comment une même Courbe quelconque peut engendrer une ou pluſieurs Spirales à l'infini.

FIGURE I.

I. Soit en général une Courbe quelconque *HHV*, appellée *Courbe génératrice* (geométrique ou mécanique, il n'importe), dont les ordonnées ſoient *GH* ; ſon axe ou ſon diametre *CX*, lequel rencontre en *A* la circonférence d'un cercle quelconque *ABYA* appellé *Cercle de révolution* ; ſoit auſſi *CAX* la premiere poſition d'une Regle *CP*, laquelle (fixe au centre de ce cercle) tourne ſuivant *ABY* à meſure que ſe forme une Spirale *OZAK*, telle que cette Regle la rencontrant en *E*, & le cercle de révolution en *B*, ſi de ſon centre *C* on fait l'arc de cercle *EG* avec l'ordonnée *GH* de la Courbe géneratrice *HHV* ; l'on ait par tout la circonférence entiere *ABYA* du cercle de révolution, à l'arc *AMB* ou *ABYAMB*, &c. parcouru par le point *B* de la Regle *CP*, comme une droite conſ-

tante quelconque *AD* est à l'ordonnée correspondante *HG* de la Courbe génératrice *HHV*.

Il suit de cette génération que les arcs de révolution *AMB* ou *ABYAMB*, sont toûjours ici entr'eux comme les ordonnées correspondantes *GH* d'une Courbe quelconque *HHV*; & que par conséquent les Spirales ainsi trouvées, sont infiniment plus générales que tout ce qu'on en a donné jusqu'ici.

II. Pour trouver l'équation universelle qui les exprime toutes à la fois, soit la circonférence du cercle de révolion $ABYA = c$, son rayon $CA = a$; que ses arcs de révolution *AMB* dans la premiére, *ABYAMB* ou $c + AMB$ dans la seconde, $2c + AMB$ dans la troisiéme, $3c + AMB$ dans la quatriéme, en un mot nc dans quelque révolution terminée à *B*, que le nombre n (entier ou rompu) puisse signifier, soient les abscisses $= x$ de la Spirale ou plutôt du cercle de révolution, lesquelles ayent le point *A* pour origine, & se prennent toutes suivant *AMB*; soient aussi *CE* ou $CG = y$, $GH = z$, & $AD = b$; soient de plus appellées s les abscisses ou les arcs (pris depuis leur origine) des Courbes qui résultent de ces Spirales déroulées, & v les abscisses des axes de ces mêmes Courbes. On prendra $\int$ & S pour des caractéristiques, dont la premiére $\int$ signifira *somme* ou *intégrale*, & la seconde S signifira *sinus*, comme d signifie *différentielle*.

Noms dont on se servira dans la suite.

III. Cela posé, la génération précédente (*art.* 1.) de la Spirale *OZAK* donnera par tout *ABYA* (c). *AMB* ou *ABYAMB*, &c. (x) :: *AD* (b) *GH* (z). De sorte que l'équation générale de cette Spirale sera $cz = bx$, dans laquelle il n'y a plus qu'à substituer la valeur de z, résultante de la nature donnée de la Courbe *HHV*; ou (ce qui revient au même, & ce qui souvent est plus commode) à substituer au lieu de z sa valeur $\frac{bx}{c}$ dans l'équation de cette Courbe génératrice donnée, du nom de laquelle cette Spirale prendra le sien : c'est-à-dire que cette Spirale s'appellera *Parabolique*, *Hyperbolique*, *Logarithmique*,

Equation générale des Spirales précédentes.

Circulaire, &c. selon que sa Courbe génératrice sera une *Parabole*, une *Hyperbole*, une *Logarithmique*, un *Cercle*, &c.

EQUATION GÉNÉRALE de Spirales à l'infini.

$$cz = bx.$$

Il est à remarquer que la même formation de Spirales (art. 1.) *auroit aussi donné* $zc^r = bx^r$, *si l'on eût pris* $\overline{ABYA}^r . \overline{AMB}^r$ *ou* $\overline{ABYAMB}^r$ :: AD. GH. *Mais la précédente équation suffit pour tout ce qu'on vient de promettre de cette formation; outre que l'équation précédente est quelquefois aussi générale que celle-ci, ainsi qu'on le verra dans l'article 72.*

COROLLAIRES GÉNÉRAUX.

Les arcs de révolutions des Spirales précédentes suivent toûjours la raison des ordonnées correspondantes de leurs Courbes génératrices, pendant que les rayons de ces Spirales suivent de même la raison des abscisses de ces Courbes génératrices.

IV. La raison de b à c étant (*hyp.*) constante, il résulte de l'équation précédente (*art.* 3.) que les arcs (x) de révolution suivront toûjours la raison des ordonnées GH (z) correspondantes de la Courbe génératrice HHV de quelque Spirale que ce soit, ainsi qu'on l'a déja remarqué sur la fin de l'article 1. Donc chaque rayon CE (y) de cette Spirale étant (*art.* 1.) toûjours égal à l'abscisse correspondante CG de sa Courbe génératrice, en prenant C pour leur origine; les rayons CE de chaque Spirale suivront toûjours la raison des abscisses CG de sa Courbe génératrice, pendant que les arcs (x) de révolution suivront la raison des ordonnées GH (z) de cette Courbe. D'où l'on voit en général que pour avoir une Spirale dont les rayons suivent telle raison qu'on voudra, pendant que les arcs de révolution suivront telle autre raison qu'on voudra aussi, il n'y a qu'à lui donner une Courbe génératrice dont les abscisses (prises de l'origine C) suivent la premiére de ces raisons, & les ordonnées la seconde. D'où l'on voit aussi déja que la Logarithmique ordinaire doit ainsi engendrer deux Spirales Logarithmiques differentes, selon qu'elle aura son asymptote sur CX;

ou

ou perpendiculaire en C à cette même CX : Dans ce second cas ce sera la Spirale Logarithmique ordinaire dont les ordonnées ou rayons (y) sont en progression Geometrique, pendant que les arcs de révolutions correspondans (x) sont en progression Arithmétique ; & dans le premier cas c'en sera une autre dont les ordonnées ou rayons seront en progression Arithmétique, pendant que les arcs de révolution correspondans seront en progression Geometrique. Et ainsi des autres Courbes qu'on voudra prendre pour génératrices ; ce qui donnera toûjours des Spirales dont les rayons (y) & les arcs (x) correspondans suivront telles raisons qu'on voudra.

Ces Spirales commenceront toûjours du côté des moindres ordonnées de leurs Courbes génératrices.

V. Il suit encore de l'art. 3. que chaque Spirale commencera toûjours du côté de A où les x (*hyp.*) commencent, & toûjours à une distance du centre C, égale à l'abscisse CG qui répond à la moindre des ordonnées de la Courbe génératrice HHV ; & par conséquent à une distance infinie de ce centre, si cette Courbe génératrice a CX pour asymptote ; puisque $z=o$ rend aussi $x=o$ dans l'équation générale de l'art. 3. Cela se verra dans l'art. 30. n. 1. & dans l'art. 55.

La Spirale ne fait qu'un nombre fini de révolutions avant que d'arriver à son centre, lorsque sa Courbe génératrice y a une ordonnée finie.

VI. De quelque maniére que les ordonnées GH (z) croissent ou décroissent, si celle qui passe par le centre C, est finie, la Spirale y arrivera après un nombre fini de révolutions ; puisque z finie rend aussi x finie dans l'égalité générale de l'art. 3.

La Spirale n'arrive à son centre qu'après un nombre infini de révolutions, lorsque sa Courbe génératrice y a une ordonnée infinie, c'est-à-dire, une asymptote pour ordonnée.

VII. Mais si la Courbe génératrice HHV a quelque ordonnée (z) infinie, la Spirale fera une infinité de révolutions avant que d'arriver à son point E correspondant : De sorte que si cette asymptote ou ordonnée infinie (z) passe par le centre C de la Spirale, cette Spirale n'y arrivera jamais qu'après un nombre infini de revolutions. Et tout cela parce que z infinie rend aussi x infinie dans l'équation générale de l'art. 3. On le verra dans l'art. 30. n. 3. & dans l'art. 49.

La Spirale passera toûjours par le pied G de cha-

VIII. L'équation générale $cz=bx$ de l'art. 3. donnant aussi $ncz=nbx$, il est visible que $z=nb$ donnera

que ordonnée GH *multiple de son paramétre* AD.

toûjours $x = nc$; & par conséquent quelque nombre entier que n signifie, x sera un pareil multiple de c, que z le sera de b, c'est à dire que x exprimera autant de révolutions complettes que z (GH) contiendra de fois b (AD). Et comme cette Spirale (quelle qu'elle soit) passe toûjours par CX au commencement & à la fin de chaque revolution, & qu'elle a toûjours (*art.* 1.) son rayon CE (y) égal à l'abscisse CG terminée par l'ordonnée GH (z) correspondante de sa Courbe generatrice HHV; il suit que ce rayon CE sera alors en CG; & qu'ainsi cette Spirale passera toûjours par le pied G de chaque ordonnée GH (z) multiple de AD (b), & qu'elle sera d'autant de révolutions (en tout) que la plus grande de ces ordonnées GH (z) contiendra de fois la droite AD (b) : c'est-à-dire, d'une infinité de révolutions dans le cercle $ABYA$, lorsque la Courbe génératrice HHV y aura une ordonnée (z) infinie. Et de même d'une infinité hors ce même cercle, lorsque les ordonnées GH (z) croîtront à l'infini du côté de X ou de x. Si l'ordonnée (z) infinie étoit à la circonférence du cercle de révolution, comme en A, la Spirale seroit encore d'une infinité de révolutions au dedans ou au dehors de ce cercle, selon que l'accroissement des ordonnées de la Courbe génératrice en viendroit.

Maniere de trouver en quels points la Spirale doit rencontrer son axe.

FIG. II. III.

IX. Il suit de cet art. 8. que si après avoir divisé la plus grande ordonnée XV ou CV de la Courbe génératrice HHV, en parties XR, RS, ST, &c. ou CR, RS, ST, &c. égales à AD, on fait RH, SH, TH, &c. toutes paralleles à CX, lesquelles aillent rencontrer la Courbe génératrice HHV en autant de points H, desquels soient faites les ordonnées HG de cette Courbe : la Spirale (quelle qu'elle soit) coupera l'axe CX en tous les points G de ces ordonnées ; les abscisses correspondantes CG en seront les rayons à la fin de chaque révolution complette ; & leurs parties GG seront les différences de ces rayons. De sorte que la nature de la Courbe HHV étant donnée, il n'y aura qu'à substituer nb au lieu de z dans son équation, & la valeur de y qui en résultera, sera celle du rayon CG où se terminera la révolution marquée par le nombre que n signifira. Et en

prenant n pour un nombre moindre ou plus grand d'une unité que celui-là, la valeur de y, qui en résultera, sera aussi celle du rayon CG où se terminera la révolution immédiatement précédente ou immédiatement suivante. Ainsi la différence de ces deux valeurs de y, sera la valeur de la différence de ces deux rayons CG. De même en général, quelle que soit la différence de ces deux valeurs de n, celle des y, qui en résultera, sera aussi celle des rayons CG où se terminent les révolutions marquées par ces différentes valeurs de n.

Tout cela servira dans la suite pour trouver les valeurs des aires différentes des espaces spiraux.

X. Il suit encore de l'art. 8. qu'en prenant AD (b) pour l'ordonnée (z) qui passe par A dans chaque Courbe génératrice HHV, la Spirale qui en sera engendrée comme cy-dessus (*art.* 3.) passera alors par A, soit pour sortir du cercle de révolution, ou pour y entrer, le point A se trouvant alors un des points G du précédent art. 9. De sorte que de quelque nature que soit cette Spirale, elle n'aura jamais plus d'une révolution du côté qu'elle aura commencé, soit au dedans ou au dehors du cercle $ABYA$, tant que les ordonnées GH (z) de sa Courbe génératrice HHV iront en diminuant depuis D, soit du côté de C, ou du côté de X; & si elles vont en diminuant de part & d'autre depuis D, la Spirale n'aura tout au plus que deux révolutions, une de chaque côté de AD: encore faudra-t-il pour les rendre complettes, que ces ordonnées diminuënt de part & d'autre jusqu'à zero sans passer outre. Mais si ces ordonnées (z) vont en augmentant de part & d'autre depuis D, la Spirale aura autant de révolutions de chaque côté de AD, que cette droite sera contenuë de fois dans la plus grande des ordonnées HG (z) qui s'y trouveront.

Quand la Spirale doit sortir de son cercle de révolution ou y entrer, & ce qu'elle doit faire de révolutions auparavant.

FIG. IV. V.

XI. Jusqu'ici nous n'avons fait mention que des Spirales engendrées par des Courbes dont toutes les ordonnées n'étoient que d'un seul côté du centre C de ces Spirales. Mais si l'on veut que la Courbe génératrice HHV

Spirales dont les Courbes génératrices ont des ordonnées de part & d'autre de leurs centres.

ſoit placée de maniére qu'elle ait des ordonnées *HG* de part & d'autre de ce centre *C*, ou (ce qui revient au même) que ce centre ſoit ſur l'axe *AX* de cette Courbe entre ſes ordonnees, comme dans les Fig. 6. 7. il n'y a qu'à concevoir cette même Courbe *HHV* comme diviſée par ſon ordonnée *CS* en deux autres Courbes génératrices *SHL*, *SHV*, & dire de chacune d'elles ce qu'on a dit juſqu'ici de la même : en concevant les deux portions de Spirales *KZC*, *CORQ*, comme deux differentes Spirales dont *LHS*, *SHV*, ſont les Courbes génératrices. Il faut, dis-je, chercher ſur *CP* prolongée du côté de *P*, & non du côté de *C* (*Cp* n'en eſt qu'une poſition) ſuivant les articles précédens quelle Spirale *KZC* doit réſulter de la Courbe génératrice *LHS*, & de même quelle autre Spirale *CORQ* doit auſſi réſulter de l'autre Courbe génératrice *SHV*; concevoir enſuite ces deux Spirales comme n'en faiſant plus qu'une ſeule *KZCORQ* : ce ſera la Spirale entiére que doit engendrer toute la Courbe *LHV*. On trouvera de même toute autre Spirale engendrée par quelque Courbe *HHV* que ce ſoit, à quelque endroit de ſon axe *AX* que le centre *C* de la Spirale ſoit ſuppoſé.

FIG. VI. VII.

Quand les Spirales doivent paſſer par leurs centres ; quand elles doivent s'y rebrouſſer, & de quelle maniere.

XII. Il ſuit des art. 6. & 7. que ces Spirales, auſſi-bien que celles dont les Courbes génératrices n'ont d'ordonnées que d'un côté de leurs centres, paſſeront toutes par ces mêmes centres, chacune par le ſien, tant que leurs Courbes génératrices y auront des ordonnées ; & jamais, tant qu'elles n'y en auront point, comme lorſque le centre de la Spirale engendrée par une ou par deux hyperboles oppoſées, ſe trouve ſur ſon axe tranſverſe entre leurs ſommets. Ce cas des Spirales ainſi engendrées par des Courbes dont aucune des ordonnées ne paſſeroit par leurs centres, n'a aucune difficulté particuliére : elles ſe trouveront comme celles des articles précédens, ſoit que leurs Courbes génératrices ayent des ordonnées de part & d'autre de leurs centres, ſoit qu'elles n'en ayent que d'un côté ſeulement. Et là il eſt encore à remarquer que tant que ces Courbes génératrices auront des ordonnées continuës d'un côté à l'autre du centre *C*, les Spirales qui

en naîtront, s'y rebrousseront toûjours, le premier rayon de leur retour se confondant avec le dernier de leur arrivée en ce point ; ce qui n'en fait qu'une seule touchante CY (Fig. 6. & 7.) des deux portions de la Spirale ZC & CO qui s'y terminent, laquelle touchante CY aura sa position dépendamment du rapport de AD à CS. Pour ce qui est de ce rebroussement en C, il sera de convexités opposées ZC, CO, si les ordonnées de la Courbe génératrice continuënt de croître ou de décroître d'un côté à l'autre de celle qui passe par le centre C ; mais les convexités & concavités en seront tournées en même sens, dès que ces ordonnées croîtront ou décroîtront de part & d'autre de celle qui passe par ce centre. Cette seconde espece de rebroussement se trouvera même par tout où les ordonnées des Courbes génératrices HHV, feront des *plus grands*, ou des *plus petits*, de part & d'autre desquels ces Courbes s'étendent : c'est-à-dire, par tout où ces Courbes auront des ordonnées comprises entre d'autres qui depuis elles aillent de part & d'autre en croissant ou en diminuant, comme dans la Fig. 8.

Il y auroit encore bien des Remarques à faire sur ce général ; mais en voilà assez pour à present : voyons-en donc seulement quelques usages.

EXEMPLE I.

XIII. Concevons que la Courbe génératrice HHV soit une des Paraboles à l'infini, dont l'équation générale soit (suivant les noms de l'art. 2) $za^{m-1}=y^m$, ou $z=\frac{y^m}{a^{m-1}}$, ayant CX pour axe intérieur ou extérieur selon l'exigence de m, & l'origine des y en C. Si l'on substituë cette valeur de z dans l'équation générale de l'article 3. l'on aura $\frac{y^m}{a^{m-1}}=\frac{bx}{c}$, ou $cy^m=bxa^{m-1}$ pour celle de toutes les Spirales paraboliques à l'infini, résultante de cette position de la Parabole générale HHV ; d'où (en prenant AD pour une ordonnée de cette Parabole gé-

Spirales paraboliques générales de M. de Fermat, appellées ici vertico-centrales pour les distinguer de tout ce qu'on peut encore trouver d'autres Spirales paraboliques

FIG. IV.

nérale *HHV*) l'on aura aussi $cy^m = xa^m$ pour l'équation générale de toutes ces Spirales paraboliques, à cause qu'en *A* (*art.* 2.) ayant *GH* (z) $=$ *AD* (b), & *CE* (y) $=$ *CB* $=$ *CA* (a), l'équation parabolique $z = \frac{y^m}{a^{m-1}}$ donne $b = a$. De sorte que si l'on prend $m = \frac{q}{p}$, l'on aura de même $cy^{\frac{q}{p}} = xa^{\frac{q}{p}}$, ou $c^p y^q = x^p a^q$, pour l'équation de toutes ces mêmes Spirales paraboliques, laquelle est la même que si on les eût formées à la maniere de M. de Fermat en prenant par tout $c^p. x^p :: a^q. y^q$.

Plusieurs autres Spirales paraboliques pouvant encore naître de la Parabole génératrice HHV *dont il s'agit ici, selon la variété des points de son axe où leur centre se peut trouver; nous appellerons celles-ci* Spirales paraboliques vertico-centrales, *à cause qu'elles ont leur centre au sommet de leurs Paraboles génératrices. Voici les tangentes de ces Spirales, leurs déroulemens en Paraboles, leurs longueurs, & leurs espaces entiers & par couches répondantes à tel nombre de révolutions & à telle révolution particuliére qu'on voudra.*

Expression générale des soutangentes de ces Spirales paraboliques vertico-centrales de tous les genres.

XIV. Pour trouver la Tangente *ET* requise à tel point *E* qu'on voudra de la Spirale *COZAK*, soit *CT* perpendiculaire à *CP*, & qui rencontre cette Tangente en *T*; soit de plus *Cp* indéfiniment proche de *CP*, laquelle rencontre la Spirale en *e*, le cercle en *b*, & l'arc concentrique *GE* en *F*. Cela fait, on aura *CB* (a). *CE* (y) :: *Bb* (dx). $EF = \frac{ydx}{a}$. Et de plus *Fe* (dy). *EF* $\left(\frac{ydx}{a}\right)$ :: *CE* (y). $CT = \frac{yydx}{ady}$. Mais l'équation $cy^m = xa^m$ de l'art. 13. donne $dx = \frac{mcy^{m-1}dy}{a^m}$. Donc en substituant cette valeur de dx dans la précédente valeur de *CT*, l'on aura $CT = \frac{mcy^{m+1}}{a^{m+1}}$ (à cause de $cy^m = xa^m$) $= \frac{mxy}{a}$. De sorte que $\frac{mxy}{a}$ sera l'expression générale des soutangentes de toutes les Spirales paraboliques vertico-centrales à l'infini.

Et là il eſt à remarquer que quelque portion de circonférence circulaire (décrite du rayon $CB = a$, ou parcouruë par le point B de la Regle mobile CP) que x ſignifie ſuivant l'art. 2. l'on aura toûjours $\frac{xy}{a}$ pour une ſemblable quantité de circonférence circulaire décrite du rayon $CE = y$, ou par le point de cette Regle, qui paſſe par celui d'atouchement dont il eſt ici queſtion. Ainſi en général les ſoûtangentes CT de ces Spirales paraboliques ſeront toûjours à ces quantités correſpondantes $\frac{xy}{a}$ de circonférences circulaires :: m. 1.

XV. De là ſi l'on ſuppoſe $x = nc$, quelque nombre de révolutions complettes ou incomplettes que n ſignifie; l'art. 8. donnant alors $nb = z$ (*art.* 13.) $= \frac{y^m}{a^{m-1}}$, ou $y = \overline{nba^{m-1}}^{\frac{1}{m}}$ (*art.* 13.) $= \overline{na^m}^{\frac{1}{m}} = an^{\frac{1}{m}}$, la ſubſtitution de ces valeurs de x & de y dans l'expreſſion générale $CT = \frac{mxy}{a}$ des ſoûtangentes de toutes ces Spirales paraboliques, trouvée dans le précédent art. 14. donnera auſſi $CT = \frac{mncan^{\frac{1}{m}}}{a} = mcn^{\frac{1}{m}+1} = mcn^{\frac{m+1}{m}}$ pour l'expreſſion générale des ſoûtangentes qui ſe trouvent à la fin de tel nombre de leurs révolutions complettes ou incomplettes, qu'on voudra faire ſignifier *à* n. D'où l'on voit que toutes ces ſoûtangentes ſont comme les $mn^{\frac{m+1}{m}}$ qui (multipliés par c) les expriment, quelque différence que les diverſes valeurs de m puiſſent apporter entre les Spirales auſquelles elles appartiennent; & que dans la même de toutes ces Spirales, quelle qu'elle ſoit, ces ſoûtangentes ſont toûjours comme les $n^{\frac{m+1}{m}}$ correſpondans.

Autre expreſſion générale des mêmes ſoûtangentes.

Ainſi, par exemple, dans la Spirale d'Archimede qui donne $m = 1$, toutes ces ſoûtangentes ſeront entr'elles comme les n^2, c'eſt-à-dire, comme les quarrés des nombres des révolutions complettes ou incomplettes qui leur

répondent. De ſorte que toutes celles de ces ſoûtangentes, dont les points d'attouchement correſpondans ſe trouveront à la fin des révolutions complettes de ces Spirales, ſeront entr'elles comme 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, &c. c'eſt-à-dire, comme les quarrés des nombres naturels, ſelon que le nombre n de ces révolutions ſera 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

De même ſi l'on ſuppoſe $m = 2$, comme lorſque la Parabole génératrice HHV eſt une Parabole ordinaire d'Archimede ou d'Apollonius ; on trouvera auſſi que toutes les ſoûtangentes qui ſe trouvent à la fin des révolutions complettes ou incomplettes de la Spirale qui en réſulte, ſeront entr'elles comme les $n^{\frac{3}{2}}$, ou $\sqrt{n^3}$, qui leur répondent ; c'eſt à-dire, comme les racines quarrées des cubes des nombres de ces révolutions. De ſorte que toutes celles de ces ſoûtangentes qui ſe trouvent à la fin des révolutions complettes de cette Spirale, ſeront entr'elles comme les racines quarrées $\sqrt{1}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{125}$, $\sqrt{216}$, $\sqrt{343}$, &c. des cubes des nombres naturels, ſelon que le nombre n de ces révolutions complettes ſera 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. Et ainſi de pareilles ſoûtangentes de toutes les autres Spirales paraboliques vertico-centrales à l'infini, ſelon les valeurs différentes qu'on peut donner à m.

Rapport général des mêmes ſoûtangentes aux circonférences des cercles circonſcrits, c'eſt à-dire, décrits du centre des Spirales par leurs points d'attouchemens.

XVI. Si préſentement on veut ſçavoir quel rapport toutes ces ſoûtangentes CT des Spirales paraboliques vertico-centrales à l'infini, doivent avoir aux circonférences circulaires qui (concentrique à ces Spirales) paſſent par leurs points d'attouchement E correſpondans, quelque nombre de révolutions complettes ou incomplettes que n puiſſe ſignifier depuis l'origine de ces Paraboles juſqu'à ces points d'attouchement ; il n'y a qu'à conſiderer que puiſque (*art.* 15.) le rayon CE (y) de chacun de ces cercles, eſt en général $= an^{\frac{1}{m}}$, l'on aura de même en général ſa circonférence $= cn^{\frac{1}{m}}$, à cauſe de $an^{\frac{1}{m}} . cn^{\frac{1}{m}} :: a . c$.

qui

qui est (*art.* 2.) le rapport du rayon du cercle *ABYA* à sa circonférence. Car ayant déja (*art.* 15.) $mcn^{\frac{m+1}{m}}$ pour l'expression générale des soûtangentes qui leur répondent, l'on aura aussi en général chacune de ces soûtangentes *CT* à la circonférence du cercle décrit du centre *C* par le point d'attouchement *E* correspondant $:: mcn^{\frac{m+1}{m}}. cn^{\frac{1}{m}} :: mn. 1.$ c'est-à-dire, comme le produit du degré (m) de la Parabole génératrice *HHV*, par le nombre (n) des révolutions, est à l'unité : quels que soient ces nombres m & n, entiers ou rompus, il n'importe.

Le même rapport pour le cas des Touchantes à la fin de telle révolution complette qu'on voudra.

XVII. Donc si l'on prend n pour un nombre entier quelconque, lequel par conséquent exprime autant de révolutions complettes qu'on lui voudra supposer d'unités ; on trouvera de même en général que chaque soûtangente *CT* à la fin de quelque révolution complette que ce soit, des Spirales paraboliques vartico-centrales à l'infini, doit toûjours être à la circonférence du cercle qui passe par le point d'attouchement correspondant *E*, lequel se trouve alors sur l'axe *AX*, c'est-à-dire, à la circonférence du cercle circonscrit à cette révolution :: $mn. 1$. De sorte que ce sera comme m, $2m$, $3m$, $4m$, $5m$, $6m$, $7m$, &c. à l'unité, selon que le nombre n des révolutions complettes en question, sera 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. quel que puisse être le degré m de ces Spirnles à l'infini.

Ainsi dans la Spirale, par exemple, d'Archimede, laquelle donne $m = 1$, & qui par-là fait aussi que chaque soûtangente de cette Spirale à la fin de tel nombre n qu'on voudra de ses révolutions complettes, doit toûjours être à la circonférence du cercle circonscrit, ou qui passe par le point d'attouchement correspondant :: $n. 1.$ c'est-à-dire, comme le nombre des révolutions complettes qui (*hyp.*) s'y termine, est à l'unité : De sorte que la soûtangente qui répond à la fin de la premiere révolution de cette Spirale d'Archimede, sera égale à la circonférence du cercle qui passe par-là, & qui a le même centre que cette Spirale, c'est-à-dire, du

cercle *ABYA* circonſcrit à cette premiere révolution qui (*art.* 9. & 13.) finit en *A*; la ſoûtangente qui répond à la fin de la ſeconde révolution, ſera double de la circonférence du cercle circonſcrit à cette ſeconde révolution; celle qui répond à la fin de la troiſiéme révolution, ſera triple de la circonférence circulaire pareillement circonſcrite; à la fin de la quatriéme, elle en ſera quadruple; à la fin de la cinquiéme, elle en ſera quintuple; & ainſi à l'infini: c'eſt-à-dire en général que la ſoûtangente de la Spirale d'Archimede à la fin de tant de révolutions complettes qu'on voudra, ſera toûjours à la circonference du cercle circonſcrit, ou qui (concentrique à cette Spirale) paſſe par ſon point d'attouchement correſpondant, comme ce nombre de révolutions ſera à l'unité. Ce qui fait voir que toute la doctrine d'Archimede ſur les Tangentes des Spirales, compriſe dans les vingt premieres propoſitions du Traité qu'il en a fait, n'eſt qu'un Corollaire très-limité de celle-ci, dont un plus grand détail ſeroit également facile pour toutes les autres valeurs de m à l'infini.

Rapport des mêmes ſoûtangentes repriſes en général, à la circonférence du ſeul cercle circonſcrit à la premiere révolution complette des Spirales touchées en quelque endroit que ce ſoit.

XVIII. Voilà (*art.* 15. 16. & 17.) pour le rapport général des ſoûtangentes *CT* de toutes les Spirales paraboliques vertico-centrales entr'elles & aux circonférences circulaires qui, concentriques à ces Spirales, paſſent par leurs points d'attouchement *E* correſpondans. Voici preſentement celui de toutes ces mêmes ſoûtangentes à la circonférence du cercle *ABYA* circonſcrit (*art.* 9. & 13.) à la ſeule premiere révolution complette de ces Spirales. Les art. 15. & 2. le donneront auſſi en général $:: mcn^{\frac{m+1}{m}}$. $c :: mn^{\frac{m+1}{m}}$. 1. quelques ſoient les nombres m & n, entiers ou rompus, il n'importe: c'eſt-à-dire, pour toutes les Spirales paraboliques vertico-centrales à l'infini, que chacune de de leur ſoûtangentes à la fin de telle révolution complette ou incomplette qu'on voudra faire ſignifier à n, ſera toûjours à la circonférence du cercle *ABYA* circonſcrit à la premiere de leurs révolutions $:: mn^{\frac{m+1}{m}}$. 1.

Ainsi la Spirale ; par exemple, d'Archimede, donnant $m=1$, elle aura par tout chacune de ses soûtangentes CT, à la circonference du cercle $ABYA$ circonscrit à la premiere évolution :: n^2. 1. c'est à dire, comme le quarré du nombre (n) de ses révolutions comprises entre son centre C & son point d'attouchement E correspondant, est à l'unité D'où l'on voit que toutes celles de ces soûtangentes dont les points d'attouchement correspondans se trouveront à la fin des révolutions complettes de cette Spirale, doivent être à la circonference du cercle $ABYA$ circonscrit à sa premiere révolution, comme les quarrés des nombres naturels 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, &c. à l'unité, selon que le nombre n des revolutions complettes sera 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. Ce qui s'accorde parfaitement avec les art. 15. & 17.

On trouvera de même tous les rapports que les soûtangentes qui répondent à la fin de tel nombre de révolutions complettes ou incomplettes qu'on voudra faire signifier à n dans tout ce que les différentes valeurs de m peuvent exprimer d'autres Spirales paraboliques vertico-centrales à l'infini, doivent avoir à la circonference du cercle $ABYA$ circonscrit à la premiere révolution de chacune de ces Spirales ; ainsi nous ne nous arrêterons pas davantage à leurs Tangentes. Passons à leurs Espaces.

XIX. Quant aux Espaces que ces Spirales paraboliques comprennent, on a vû (*art.* 14.) que $EF=\frac{ydx}{a}=\frac{mcy^m dy}{a^{m+1}}$; & qu'ainsi le triangle élémentaire ECF $\left(\frac{yydx}{2a}\right)$ ou $ECe=\frac{mcy^{m+1}dy}{2a^{m+1}}$. Donc, en intégrant, l'on aura $\frac{mcy^{m+2}}{\overline{2m+4}\times a^{m+1}}$, ou (à cause de l'équation $cy^m=xa^m$ de l'art. 13.) $\frac{mxyy}{2ma+4a}$ pour tout ce que ces triangles forment de couches d'espace les unes sur les autres, entre ces Spirales & leur rayon CE (y), selon (*art.* 2.) que x est moin-

Somme des couches d'espace comprises les unes sur les autres entre les Spirales paraboliques vertico-centrales depuis leur centre jusqu'à tel de leurs rayons qu'on voudra.

dre, égale, ou plus grande que c. Par conséquent cette somme de couches d'espaces spiraux, doit être à un pareil nombre de couches d'espaces circulaires compris dans le secteur ou produit $\frac{xyy}{2a}$ (fait de ce rayon CE (y), & d'un arc $\frac{xy}{a}$ décrit de ce même rayon & semblable à x) :: m. $m+2$.

Déroulement de ces spirales en Paraboles plus élevées d'un degré que leurs Paraboles génératrices.

XX. On peut encore trouver ces espaces spiraux en déroulant leurs Spirales à la maniere de M. Bernoulli Professeur à Groningue, rapportée dans les Actes de Leipsik de 1691. pag. 16. & 17. par M[r] son frere Professeur à Bâle. Pour cela soit CQ perpendiculaire en C sur CX prolongée vers x, & qui soit rencontrée en Q, q, par les arcs de cercles EQ, eq, décrits du centre C, & des rayons CE, Ce. Imaginons ensuite une Courbe CLI dont les appliquées QL, ql, paralleles à Cx, & (*hyp.*) indefiniment proches l'une de l'autre, ayent $RL = EF$ (*art.* 14.) $= \frac{ydx}{a} = \frac{mcy^m dy}{a^{m+1}}$ pour différence. Il est visible que si l'on intégre cette différence, l'on aura $\frac{mcy^{m+1}}{m+1 \times a^{m+1}}$ pour la valeur de chacune de ces appliquées QL, ql, ou de leurs égales CN, Cn, en faisant LN, ln, paralleles à CQ: de sorte qu'ayant déja (*art.* 2.) $LN = y$, si l'on fait aussi $CN = v$, l'on aura $v = \frac{mcy^{m+1}}{m+1 \times a^{m+1}}$ pour l'équation de la Courbe CLI qu'on voit être une Parabole plus élevée d'un degré que la génératrice CHV de la Spirale proposée, laquelle génératrice avoit (*art.* 13.) $za^{m-1} = y^m$ pour son équation. Donc en général toutes les Spirales paraboliques vertico-centrales à l'infini, doivent se dérouler ainsi en Paraboles plus élevées d'un degré que leurs Paraboles génératrices.

Par exemple, la Spirale d'Archimede ayant $m = 1$, doit se dérouler en une Parabole dont l'équation soit $v = \frac{cyy}{2aa}$, c'est-à-dire, en la Parabole ordinaire du même Archimede ou d'Apollonius, ainsi que Détonville & d'au-

tres l'ont trouvé; au lieu que l'équation générale $za^{m-1} = y^m$ des Paraboles génératrices des Spirales en question, se réduisant ici a $z = y$, fait voir que la génératrice de la Spirale d'Archimede, est un triangle qui (suivant cette équation) peut passer pour une Parabole moindre d'un degré que celle d'Apollonius. Et ainsi des autres Spirales paraboliques vertico-centrales à l'infini.

XXI. De ce que (*art.* 20) $Rl = Qq = Fe$, $RL = FE$, & que les angles sont droits en R & en F, il suit aussi que $Ll = Ee$; & ainsi de tous les autres élémens correspondans de la Courbe CLI, & de la Spirale $COZAK$. Donc (en intégrant) l'arc parabolique CL se trouvera toûjours égal à l'arc Spirale $COZAE$ correspondant. Ainsi (*art.* 20.) on peut encore dire en général que les arcs des Spirales paraboliques vertico-centrales de tous les genres, sont toûjours égaux aux arcs correspondans de Paraboles plus élevées d'un degré que les génératrices de ces Spirales; & que par consequent ces arcs de Spirales sont toûjours rectifiables. Longueurs de ces Spirales.

1°. Tant que l'Exposant (m) du degré de leurs Paraboles génératrices est une fraction positive, dont le Numérateur est l'unité, & le Dénominateur un nombre pair quelconque. Car l'équation $v = \frac{mcy^{m+1}}{\overline{m+1} \times a^{m+1}}$ de l'art. 20. donnant $dv = \frac{mcy^m dy}{a^{m+1}}$, l'on aura $\sqrt{dv^2 + dy^2} = \sqrt{\frac{mmccy^{2m}dy^2}{a^{2m+2}} + dy^2} = \frac{dy\sqrt{mmccy^{2m} + a^{2m+2}}}{a^{m+1}} = \frac{mcdy}{a^{m+1}} \times \sqrt{y^{2m} + \frac{a^{2m+2}}{mmcc}}$ (A).

Or on sçait que $ay^p dy \times \overline{y^q + b}^r$ est intégrable lorsque $\frac{p+1}{q} - 1$ est un nombre entier & positif, ou zero. Donc ayant ici $p = 0$, & $q = 2m$, la precedente différentielle (A) sera aussi intégrable si $\frac{0+1}{2m} - 1$ ou $\frac{1}{2m} - 1$ est un nombre entier & positif, ou zero.

Pour voir quelle doit être m pour cela, soit un nombre entier positif indéterminée $n = \frac{1}{2m}$; & conséquemment $m = \frac{1}{2n}$, ou $2m = \frac{1}{n}$: cette hypothese rendra $\frac{1}{2m} - 1 = n - 1$, nombre entier & positif, ou zero, selon qu'on prendra l'entier & positif $n > 1$, ou $n = 1$. Ce qui fait voir que la précédente différentielle A des précédents arcs de Spirales, sera intégrable, & conséquemment ces arcs rectifiables, tant que m y sera égale à une fraction positive, dont le Numérateur soit l'unité, & le Dénominateur double d'un nombre entier & positif plus grand que l'unite, ou égal à elle; ce qui rend ce Dénominateur un nombre pair quelconque. *Ce qu'il faloit ici 1°. faire voir.*

2°. Ces arcs de Spirales seront aussi rectifiables, même lorsque cet Eyposant m de leurs Paraboles génératrices, sera un efraction négative, dont le Numerateur soit l'unité, & dont le Dénominateur soit un nombre impair quelconque au-dessus de l'unité. Car l'équation $v = \frac{mcy^{m+1}}{\overline{m+1} \times a^{m+1}}$ de l'ar. 20. venant (nomb. 1.) de donner $\sqrt{dv^2 + dy^2} = \sqrt{\frac{mmccy^{2m}dy^2}{a^{2m+2}} + dy^2}$, l'on aura aussi $\sqrt{dv^2 + dy^2} = = y^m dy \sqrt{\frac{mmcc}{a^{2m+2}} + \frac{1}{y^{2m}}}$ (B) pour l'élément des arcs en question, lequel comparé à $ay^p dy \times \overline{y^q + b}^r$, qu'on sçait être intégrable tant que $\frac{p+1}{q} - 1$ sera un nombre entier & positif, ou zero: cette comparaison rendant $m = p$, & $-2m = q$, & en conséquence $\frac{m+1}{-2m} - 1 = \frac{p+1}{q} - 1$, l'on voit que tant que $\frac{m+1}{-2m} - 1$ sera un nombre entier & positif, ou zero, l'élément B des arcs spiraux en question, sera aussi intégrable, & ces arcs rectifiables.

Pour voir quelle doit être ici m pour cela, soit presentement $\frac{m+1}{-2m} = n$ nombre entier & positif plus grand que

l'unité, ou égal à elle : Cette hypothese rendra $\frac{m+1}{-2m} - 1 = n - 1$, nombre entier & positif, ou zero : cas auquel on vient de voir que l'élément B de ces arcs spiraux en question est intégrable, & eux rectifiables. Or ce cas rend $m = -\frac{1}{2n+1}$. Donc ce cas de m égale à une fraction négative, qui a l'unité pour Numérateur, & dont le Dénominateur est un nombre impair quelconque au dessus de l'unité, rend aussi rectifiables les arcs spiraux dont il s'agit ici. *Ce qu'il faloit 2°. faire voir.*

Autre maniere de trouver les sommes de couches des espaces spiraux de l'article 19.

XXII. Enfin de ce que (*art.* 20.) $Nn = LR = EF$, & $NL = CQ = CE$, il suit que le quadrilatére élémentaire $NLln$ doit être double du triangle élémentaire correspondant ECe, & ainsi de leurs intégrales. Donc l'espace parabolique CLN (fait de tous ces quadrilatéres) doit être double de ce que l'arc spiral correspondant $COZAK$ renferme de couches d'espace (fait de tous ces triangles) entre lui & son plus grand rayon CE. Or l'équation de la Parabole CLI étant (*art.* 20.) $v = \frac{mcy^{m+1}}{\overline{m+1} \times a^{m+1}}$, on sçait que l'espace CLN doit être $= \frac{mcy^{m+2}}{\overline{m+2} \times a^{m+1}}$. Donc cette somme de couches d'espace spiral, doit être $= \frac{mcy^{m+2}}{\overline{2m+4} \times a^{m+1}}$ (à cause de l'équation $cy^m = xa^m$ de l'art. 13.) $= \frac{mxyy}{2ma+4a}$, comme dans l'art. 19.

Ce qu'il y a de ces espaces Spiraux en une ou plusieurs couches entre deux quelconques de leurs rayons.

XXIII. Par la même raison, si l'on prend un autre point quelconque Z entre C & E sur la Spirale en question, & qu'on fasse son rayon $ZC = r$; l'on aura aussi $\frac{mcr^{m+2}}{\overline{2m+4} \times a^{m+1}}$ pour tout ce qu'il y aura de plans ou de couches d'espace entre le rayon ZC de cette Spirale, & son arc COZ compris depuis son centre C jusqu'à ce rayon. Donc tout ce qu'il y a d'espace Spiral depuis ZC jusqu'à

la plus grande *EC* (en une ou en plusieurs couches) sera $= \frac{mcy^{m+2} - mcr^{m+2}}{2m+4 \times a^{m+1}}$. Par conséquent en prenant f pour la difference dont la plus grande *EC* (y) surpasse *ZC* (r), c'est-à-dire, $y-f=r$, ou $mcr^{m+2} = mc \times \overline{y-f}^{m+2}$; l'on aura $\frac{mcy^{m+2} - mc \times \overline{y-f}^{m+2}}{2m+4 \times a^{m+1}}$ pour ce qu'il y aura d'espace (en une ou en plusieurs couches) entre *ZC* & la plus grande *EC*.

Rapport général de ces espaces Spiraux compris (en une ou plusieurs couches) entre deux rayons quelconques, à la circonférence du cercle circonscrit, ou dont le rayon seroit le plus grand de ces deux-ci.

XXIV. Cela étant, si l'on considere que cette *EC* (y) est le rayon du cercle circonscrit, que la circonférence de ce cercle est $=\frac{cy}{a}$, & son aire $=\frac{cyy}{2a}$; l'on aura cet espace spiral à celui de ce cercle :: $\frac{mcy^{m+2} - mc \times \overline{y-f}^{m+2}}{2m+4 \times a^{m+1}} . \frac{cyy}{2a}$ :: $\frac{my^{m+2} - m \times \overline{y-f}^{m+2}}{m+2 \times a^{m}} . yy$. De quelque nombre de couches que soit fait ce même espace Spiral compris entre *ZC* & la plus grande *EC*.

Ainsi dans la Spirale, par exemple, d'Archimede, laquelle donne $m=1$, cet espace Spiral sera toûjours par tout à son cercle circonscrit :: $\frac{y^3 - \overline{y-f}^3}{3a} . yy$ :: $\frac{3fyy - 3ffy + f^3}{3a} . yy$. De sorte que si c'est à la fin des révolutions complettes qu'il s'agisse de trouver l'espace de chacune, ayant alors $f=a$ distance de l'une à l'autre, & $y=na$ en prenant n pour un nombre entier qui soit celui de ces révolutions complettes; l'espace Spiral de la derniere de ces révolutions exprimées par n, sera toûjours ici à son cercle circonscrit :: $\frac{3nna^3 - 3na^3 + a^3}{3a} . nnaa$ :: $3nn - 3n + 1 . 3nn$. Ce qui joint à l'art. 17. comprend tout le traité d'Archimede *De Spiralibus*.

Autre maniere de trouver le même rapport.

XXV. Pour trouver encore la même chose d'une autre maniere, & en général pour toutes sortes de Spirales vertico-

vertico-centrales à l'infini, soient encore la plus grande CE (y) & CZ $(y-f)$ deux rayons d'une même Spirale, à chacun desquels finisse tel nombre qu'on voudra de révolutions telles qu'on voudra aussi, à commencer en C de part & d'autre ; soit presentement n un nombre entier ou rompu (il n'importe) qui exprime le nombre de révolutions complettes ou incomplettes terminées à la plus grande CE (y), lequel nombre surpasse d'une différence ou excès quelconque e le nombre des révolutions complettes ou incomplettes qui se terminent à CZ $(y-f)$, en sorte que $n-e$ exprime aussi ce dernier nombre de révolutions : il faut chercher d'abord la valeur du rayon CZ $(y-f)$. Pour cela je considere que puisque (*hyp.*) n & $n-e$ sont les nombres de ce qu'il y a de révolutions complettes ou incomplettes depuis C jusqu'à la plus grande CE (y), & jusqu'à CZ $(y-f)$; l'on aura (*art.* 2.) $nc=x$ pour le chemin que le point B (fixe sur la Regle CP) fait autour de C pendant toutes les révolutions qui se terminent à la plus grande CE (y), & $nc-ec=x$ pour celui que fait de même ce point B de la Regle CP autour de C pendant toutes les révolutions qui se terminent à CZ $(y-f)$. De sorte que suivant l'Analogie de l'équation générale $cy^m=xa^m$ de l'article 13. l'on aura $nc.\ y^m :: c.\ a^m :: nc-ec.\ \overline{y-f}^m$. Et par conséquent $\overline{y-f}^m = \frac{nc-ec}{nc} \times y^m = \frac{n-e}{n} \times y^m$,

ou $y-f = \frac{\overline{n-e}^{\frac{1}{m}}}{n^{\frac{1}{m}}} \times y$, ou bien aussi $\overline{y-f}^{m+2} = \frac{\overline{n-e}^{\frac{m+2}{m}}}{n^{\frac{m+2}{m}}} \times y^{m+2}$.

Donc en substituant cette valeur de $\overline{y-f}^{m+2}$ dans l'Analogie générale de l'art. 24. l'on aura $\frac{my^{m+2} - m \times \overline{y-f}^{m+2}}{\overline{m+2} \times a^m}$

$= \frac{n^{\frac{m+2}{m}} - \overline{n-e}^{\frac{m+2}{m}}}{n^{\frac{m+2}{m}}} \times \frac{my^{m+2}}{\overline{m+2} \times a^m}$. Par conséquent en général suivant ce même art. 24. l'espace spiral parabolique ver-

tico-central de tous les genres, & d'autant de couches ou de révolutions complettes ou incomplettes (à commencer par la derniere, c'est à-dire, par le point E) qu'en marque le nombre e, sera toujours à son cercle circonscrit, ou décrit du plus grand rayon $CE(y)$: : $\frac{n^{\frac{m+2}{m}} - \overline{n-e}^{\frac{m+2}{m}}}{n^{\frac{m+2}{m}}} \times \frac{my^{m+2}}{\overline{m+2} \times a^m} . yy$: : $\frac{n^{\frac{m+2}{m}} - \overline{n-e}^{\frac{m+2}{m}}}{n^{\frac{m+2}{m}}} \times \frac{my^m}{m+2} . a^m$ (à cause que l'art. 13. donne $a^m = \frac{cy^m}{x}$, & qu'on suppose $x = nc$) : : $\frac{n^{\frac{m+2}{m}} - \overline{n-e}^{\frac{m+2}{m}}}{n^{\frac{m+2}{m}}} \times \frac{my^m}{m+2} . \frac{cy^m}{nc}$: : $n^{\frac{m+2}{m}} - \overline{n-e}^{\frac{m+2}{m}} . \frac{m+2}{m} \times n^{\frac{2}{m}}$.

Troisiéme maniere de trouver le même rapport.

XXVI. Tout cela se peut encore trouver en général d'une maniere encore plus simple, en continuant de supposer $x = nc$, quelque nombre de révolutions complettes ou incomplettes depuis C jusqu'à $EC(y)$ que le nombre n (entier ou rompu) puisse signifier. Car alors ayant $y = an^{\frac{2}{m}}$, comme dans l'art. 15. la substitution de ces valeurs de x & de y dans la valeur (*art.* 19. & 22.) générale $\frac{mxyy}{2ma+4a}$ de tout ce qu'il y a de couches d'espace Spiral les unes sur les autres dans tout ce que n marque de révolutions, donnera aussi $\frac{mncaan^{\frac{2}{m}}}{2ma+4a}$, ou $\frac{macn^{\frac{m+2}{m}}}{2m+4}$ pour une pareille valeur de cette même somme de couches d'espace Spiral.

Par la même raison, si au lieu de n on met $n = e$ pour un moindre nombre quelconque de révolutions complettes ou incomplettes depuis C jusqu'à CZ, quel que soit encore le nombre e, entier ou rompu, il n'importe, on trouvera

de même $\frac{mac \times \overline{n-e}^{\frac{m+2}{m}}}{2m+4}$ pour toutes les couches d'eſpace Spiral, marquées par n depuis C juſqu'à E la plus éloignée de C, moins ce que le nombre e en marque depuis Z juſqu'à cette E : c'eſt-à-dire, pour ce qu'il y en aura depuis C juſqu'à Z.

Donc en retranchant cette valeur de la précédente, l'on aura $\frac{macn^{\frac{m+2}{m}} - mac \times \overline{n-e}^{\frac{m+2}{m}}}{2m+4}$ pour la valeur générale de ce que ce nombre e marque de couches d'eſpace Spiral depuis Z juſqu'à E la plus éloignée de C. De ſorte que ſi l'on conſidere que (*art.* 16.) $cn^{\frac{1}{m}}$ eſt la circonférence du cercle circonſcrit dont la plus grande CE $(y) = an^{\frac{1}{m}}$ ſeroit le rayon, & que par conſéquent ſon aire eſt $= \frac{acn^{\frac{2}{m}}}{2}$; l'on aura tout ce que le nombre e (quel qu'il ſoit) marque de couches d'eſpace Spiral entre Z & E la plus éloignée de C, à ce cercle circõſ. :: $\frac{macn^{\frac{m+2}{m}} - mac \times \overline{n-e}^{\frac{m+2}{m}}}{2m+4} . \frac{acn^{\frac{2}{m}}}{2} :: \frac{mn^{\frac{m+2}{m}} - m \times \overline{n-e}^{\frac{m+2}{m}}}{m+2} . n^{\frac{2}{m}} :: n^{\frac{m+2}{m}} - \overline{n-e}^{\frac{m+2}{m}} . \frac{m+2}{m} \times n^{\frac{2}{m}}$. Ainſi que dans le précédent art. 25. *Ce qu'il faloit encore trouver.*

XXVII. Donc en prenant preſentement n & e pour deux nombres entiers quelconques, dont e ſoit le moindre à diſcrétion, ce rapport général deviendra celui que la ſomme des couches d'eſpace Spiral paraboliques vertico-central, d'autant de révolutions complettes (à commencer par la derniere) que le nombre e renferme d'unités, aura à ſon cercle circonſcrit. D'où l'on voit auſſi qu'en faiſant $e = 1$, l'eſpace Spiral de la derniere d'autant de révolutions complettes qu'on voudra en faire ſignifier à n, ſe trouvera toûjours à ce cercle circonſcrit ::

Le même rapport pour le cas des couches d'eſpace complettes, ou de révolutions complettes, en quelque nombre qu'elles ſoient.

$n^{\frac{m+1}{m}} - \overline{n-1}^{\frac{m+1}{m}} . \frac{m+1}{m} \times n^{\frac{1}{m}}$. Ce qui servira de Regle générale pour discerner les valeurs des différentes couches d'espaces Spiraux paraboliques de tous les genres, engendrés (comme dans l'art. 13.) par des révolutions complettes différentes, & prises à discrétion.

Par exemple, pour la Spirale d'Archimede, laquelle donne $m = 1$, ce rapport général donnera toûjours l'espace Spiral de la derniere d'autant de révolutions complettes qu'on en voudra exprimer par le nombre entier n, à son cercle circonscrit $:: n^3 - \overline{n-1}^3 . 3n^2 :: 3nn - 3n + 1 . 3nn$. comme on l'a déja vû dans l'art. 24. Ainsi la premiere révolution complette de cette Spirale d'Archimede, donnant $n = 1$, l'espace en sera à son cercle circonscrit *ABYA* $:: 1 . 3$. L'espace de la seconde révolution complette, laquelle donne $n = 2$, sera de même à son cercle circonscrit $:: 7 . 12$. Dans la troisiéme complette, laquelle donne $n = 3$, ce sera $:: 19 . 27$. Dans la quatriéme, qui donne $n = 4$, ce sera $:: 37 . 48$. &c.

Si l'on suppose $m = 2$, en sorte que l'équation (*art.* 13.) de la Spirale soit $cyy = aax$: en ce cas le précédent rapport général donnera l'espace Spiral de la derniere de tant de révolutions complettes qu'on voudra, à son cercle circonscrit $:: n^2 - \overline{n-1}^2 . 2n :: 2n - 1 . 2n$. Ainsi dans la premiere révolution complette, qui donne $n = 1$, ce sera $:: 1 . 2$. Dans la seconde, qui donne $n = 2$, ce sera $:: 3 . 4$. Dans la troisiéme, qui donne $n = 3$, ce sera $:: 5 . 6$. Dans la quatriéme, qui donne $n = 4$, ce sera $:: 7 . 8$. &c.

Si l'on suppose au contraire $m = \frac{1}{4}$, en sorte que l'équation (*art.* 13.) de la Spirale soit $cy^{\frac{1}{4}} = xa^{\frac{1}{4}}$, ou $ccy = axx$: en ce cas le précédent rapport général donnera l'espace Spiral de la derniere de tant de révolutions complettes qu'on voudra, à son cercle circonscrit $:: n^5 - \overline{n-1}^5 . 5n^4 :: 5n^4 - 10n^3 + 10nn - 5n + 1 . 5n^4$. Ainsi dans la premiere révolution complette, qui donne $n = 1$, ce sera $:: 1 . 5$. Dans la seconde, qui donne $n = 2$, ce sera $:: 31 . 80$.

Dans la troisiéme, qui donne $n = 3$, ce sera :: 211. 405. Dans la quatriéme, qui donne $n = 4$, ce sera :: 781. 1280. &c. Et ainsi de toutes les autres Spirales paraboliques vertico-centrales à l'infini, pour chacune desquelles le précédent rapport général fournira de même une expression litterale, qui détaillée comme cy-dessus, donnera tous les rapports de leurs espaces (pris un à un par révolutions complettes) aux cercles circonscrits.

C'est ainsi que la Table suivante a été faite, & qu'on la peut continuer à l'infini selon les différentes valeurs de m qu'on lui substituëra dans la précédente Analogie générale, en y prenant successivement n pour des nombres entiers qui suivent l'ordre des nombres naturels, comme dans la premiere colomne de la Table, où ils marquent chacun la derniere d'autant de révolutions complettes pour chaque valeur de m, qu'il contient d'unités ; ce qui détermine les valeurs correspondantes de l'espace Spiral de chaque révolution complette, à son cercle circonscrit, pour chaque valeur de m qui se trouve au-dessus d'elles.

Nombre n des révolutions complettes.	Si $m = 1$		Si $m = 2$		Si $m = \frac{1}{1}$	
	Espaces.	Cercles.	Espaces.	Cercles.	Espaces.	Cercles.
1	1	3	1	2	1	5
2	7	12	3	4	31	80
3	19	27	5	6	211	405
4	37	48	7	8	781	1280
5	61	75	9	10	2101	3125
6	91	108	11	12	4651	6480
7	127	147	13	14	9031	12005
8	169	192	15	16	15961	20480
9	217	243	17	18	26281	32805
10	271	300	19	20	40951	50000
&c.	&c.	&c.	&c	&c	&c.	&c.

&c.

XXVIII. Si l'on veut présentement comparer l'espace Spiral compris entre deux rayons quelconques de chacune de ces Spirales paroboliques vertico-centrales au seul cer-

Rapport général des espaces Spiraux de tous &c. à la circonference du cercle de la premiere révolution.

cle *ABYA* de la 1re révolution, il n'y a qu'à considérer que suivant les noms de l'art. 2. l'aire de ce cercle est $= \frac{ac}{2}$, & que (*art.* 26.) $\frac{macn^{\frac{m+2}{m}} - mac \times \overline{n-e}^{\frac{m+2}{m}}}{2m+4}$ est aussi la valeur générale de ce que le nombre e (entier ou rompu) marque de couches d'espace Spiral depuis Z jusqu'à E la plus éloignée de C. Car alors cette somme de couches (complettes ou incomplettes) d'espace Spiral parabolique vertico-central de tous les genres, se trouvera être en général à ce cercle *ABYA* de la 1re révolution :: $\frac{macn^{\frac{m+2}{m}} - mac \times \overline{n-e}^{\frac{m+2}{m}}}{2m+4}$. $\frac{ac}{2}$ :: $n^{\frac{m+2}{m}} - \overline{n-e}^{\frac{m+2}{m}} \cdot \frac{m+2}{m}$. quels que soient les nombres exprimés par m, n, e, entiers ou rompus, il n'importe.

De sorte qu'en prenant présentement n & e pour des nombres entiers, afin de rendre toutes ces couches complettes; ce rapport sera encore celui d'autant de couches complettes d'espace Spiral parabolique vertico-central de tous les genres (à commencer par la derniere) qu'il y aura d'unités dans e, au même cercle *ABYA* de la premiere révolution.

D'où l'on voit que si l'on fait enfin $e = 1$, l'espace Spiral de la derniere d'autant de révolutions complettes que le nombre n contient d'unités, se trouvera aussi être au cercle *ABYA* de la premiere révolution :: $n^{\frac{m+2}{m}} - \overline{n-1}^{\frac{m+2}{m}} \cdot \frac{m+2}{m}$. Ce qui servira encore de Regle générale pour discerner les rapports de différentes couches d'espaces Spiraux paraboliques vertico-centraux de tous les genres, & de révolutions complettes, au cercle *ABYA* de la premiere. Le détail & la Table s'en feront comme ceux de l'art. 27.

Réflexions sur le détail des rapports précédens.

XXIX. Il est à remarquer dans les deux articles précédens 27. & 28. que si au lieu d'y prendre e pour l'unité, on l'eût prise pour telle fraction, ou portion de l'unité,

que l'on auroit voulu ; la formule générale de chacun de ces deux articles, auroit donné de même le rapport de pareilles portions d'une couche d'espace Spiral de telle révolution complette que le nombre entier n puisse exprimer : Par exemple, d'un demi, d'un tiers, d'un quart, d'un cinquiéme, &c. de cette couche d'espace Spiral à son cercle circonscrit ou de la derniere révolution dans l'art. 27. & au cercle de la premiere révolution dans l'art. 28. selon que l'on auroit pris e pour $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, &c. De sorte que ces deux articles 27. & 28. fournissent ensemble le moyen de comparer & de trouver le rapport de telle couche qu'on voudra, entiere ou par parties quelconques, d'espace Spiral parabolique vertico-central de quelque genre que ce soit, à son cercle circonscrit, ou à celui de la premiere révolution.

Les art. 25. & 26 fournissent aussi la maniere d'en comparer plusieurs couches complettes ou incomplettes à la fois à leur cercle circonscrit ; d'où l'on voit, ainsi que dans l'art. 28. la maniere de les comparer de même au seul cercle de la 1re révolution. L'art. 26. donne enfin la maniere de comparer toutes ces couches d'espaces entr'elles, une ou plusieurs à la fois, même dans des Spirales différentes. Tout cela joint aux art. 15. 16. 17. & 18. où l'on voit de même la maniere de comparer les soûtangentes de toutes ces Spirales entr'elles, & aux circonférences circulaires qui (concentriques à ces Spirales) passent par leurs points d'attouchement correspondant, & aussi à la circonférence du seul cercle de la premiere révolution : Tout cela, dis-je, marque assez la fécondité de la méthode qu'on suit ici. En voici encore un autre éxemple.

EXEMPLE II.

XXX. Si l'on suppose que la Courbe génératrice HHV soit une hyperbole asymptotique générale dont C soit le centre, & CV, CX, ses asymptotes ; les Spirales hyperboliques de tous les genres, qui en doivent résulter, s'en déduiront avec leurs dépendances de même qu'on le vient de

Spirales hyperboliques asymptotiques, appellées ici cocentrales pour les distinguer de tous ce qu'on peut encore trouver d'autres Spirales

hyperboliques asymptotiques.

FIG. V.

voir des Spirales paraboliques de l'exemple premier. Mais si l'on veut abreger, & se servir de ce qui se trouve démontré de ces Spirales paraboliques dans ce premier exemple, il faut encore prendre ici AD pour une ordonnée de HHV, & considérer que de même qu'il n'y a qu'à rendre négatif l'exposant m de l'équation parabolique $z=\frac{y^m}{a^{m-1}}$ de l'art. 13. pour en faire l'équation générale $z=\frac{y^{-m}}{a^{-m-1}}$, ou $zy^m = a^{m+1}$ de toutes les hyperboles entre asymptotes à l'infini; il n'y a aussi qu'à rendre négatif l'exposant m de l'équation générale $xa^m = cy^m$ de toutes les Spirales paraboliques de l'art. 13 pour en faire $xy^m = ca^m$, qui est aussi l'équation de toutes les Spirales hyperboliques correspondantes à l'infini, dans lesquelles sa transformation précédente de m positive en négative, la rend ici positive pour toute la suite de cet exemple. En voici les conséquences en supposant les mêmes noms que dans l'art. 13.

Les Spirales hyperboliques dont il s'agit ici, ayant les mêmes centres que leurs hyperboles génératrices, s'appelleront dans la suite Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales, *pour les distinguer de plusieurs autres que ces mêmes hyperboles prises en dedans comme en dehors, pourroient engendrer dans tout ce qu'elles peuvent avoir d'autres positions par rapport aux centres de ces Spirales. Voici les conséquences de la précédente égalité générale de ces Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales.*

L'origine ou le commencement de ces Spirales hyperboliques, est à une distance infinie de leur centre.

1°. Il suit de cette égalité générale $xy^m = ca^m$ que lorsque AMB (x) est $=o$, alors CE (y) en AX est infinie. Ce qui fait voir que l'origine des abscisses AMB (x) étant en A, celle de ces Spirales doit être à une distance infinie de C du côté de X; au lieu que les Spirales paraboliques vertico-centrales de l'exemple premier ont la leur en C: Et tout cela parce que (*art.* 5.) dans ces Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales les ordonnées GH de leurs hyperboles génératrices croissent de X vers C

en

en commençant à une distance infinie, pendant que la Regle CP tourne de A vers B suivant $ABYA$ en commençant en A; au lieu que dans les Spirales paraboliques vertico-centrales, la Regle CP tournant de même de A vers B en commençant en A, les ordonnées GH de leurs paraboles génératrices croissent de C vers X à l'infini en commençant en C.

2°. Lorsque $AMB\,(x)$ est $= ABYA\,(c)$, l'égalité présente $xy^m = ca^m$ donne aussi $AC\,(a) = CE\,(y)$. Ce qui fait voir qu'à la fin de la premiere révolution, les Spirales hyperboliques dont il s'agit ici, viennent du côté de X couper en A le cercle de révolution $ABYA$, & entrent dedans pour n'en plus ressortir. Ce qui fait voir que l'arc Spiral de la premiere révolution est entierement hors de ce cercle $ABYA$, & tout le reste dedans. *Elles entrent dans le cercle de révolution à la fin de la premiere.*

3°. Lorsque $CE\,(y)$ sera $= o$, c'est-à-dire, lorsque cette Spirale arrivera au centre C du cercle de révolution, alors x sera infinie. Ce qui fait voir conformément à l'art. 7. qu'elle n'y peut arriver qu'après une infinité de révolutions. *Elles n'arrivent au centre de ce cercle, qui est aussi le leur, qu'après une infinité de révolutions.*

XXXI. En faisant encore m négative dans l'équation $v = \frac{mcy^{m+1}}{m+1 \times a^{m+1}}$ qu'on a vûë (*art.* 20.) devoir être celle de toutes les Spirales paraboliques vertico-centrales déroulées, ce lieu donnera aussi en général $v = \frac{-mcy^{1-m}}{-m+1 \times a^{1-m}} = \frac{mca^{m-1}}{m-1 \times y^{m-1}}$ pour celui de toutes les Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales pareillement déroulées, en prenant toûjours v pour les abscisses des Courbes qui en résultent, sur lesquelles abscisses les ordonnées perpendiculaires sont égales aux $y\,(CE)$ correspondans de ces Spirales. D'où l'on voit, *Déroulement de ces Spirales hyperboliques.*

1°. Que lorsque $m > 1$, ces Spirales-ci se déroulent en hyperboles exprimées par ce même lieu $v = \frac{mca^{m-1}}{m-1 \times y^{m-1}}$. *Quand elles se déroulent en hyperboles.*

Quand elles se déroulent en Paraboles.

2°. Lorſque $m < 1$, ces mêmes Spirales ſe déroulent en Paraboles, dont le lieu (tiré du précédent) eſt $v = \frac{mcy^{1-m}}{-1+m \times a^{1-m}}$, ou $-v = \frac{-mcy^{1-m}}{-1+m \times a^{1-m}} = \frac{mcy^{1-m}}{1-m \times a^{1-m}}$ ſur l'axe renverſé des hyperboles précédentes, & le Parametre $= \frac{mc}{1-m \times a^{1-m}}$.

Et quand elles se déroulent en logarithmique ordinaire.

3°. Mais lorſque $m = 1$, alors chacune de ces équations (*n.* 1. & 2) ne donnant que v infinie, je remonte à leur différentielle qui me donne ici $-dv = \frac{cdy}{y}$ pour celle de la Courbe réſultante du déroulement de la Spirale hyperbolique de ce cas. D'où l'on voit qu'elle ſe déroule en une logarithmique ordinaire dont la ſoûtangente vaut la circonférence *ABYA* (c) du cercle de révolution.

Longueurs de ces Spirales.

XXXII. Il ſuit auſſi de ces déroulemens (*art.* 20.) que les longueurs de ces Spirales hyperboliques ſont préciſément les mêmes (par parties correſpondantes) que celles des Courbes qui en ſont déroulées. Par conſéquent que celles de ces Spirales qui ſe déroulent (*art.* 31. *n.* 2.) en Paraboles, ſeront rectifiables.

1°. Tant que l'Expoſant (m) du degré des hyperboles génératrices, ſera une fraction poſitive dont le Numérateur ſoit l'unité, & le Dénominateur un nombre impair quelconque au-deſſus de l'unité. Car puiſque l'équation $-v = \frac{mcy^{1-m}}{1-m \times a^{1-m}}$ de l'article 31. nomb. 2. donne $dv = -\frac{mcy^{-m}dy}{a^{1-m}} = -\frac{mca^{m-1}dy}{y^m}$, l'on aura $\sqrt{dv^2+dy^2} = \sqrt{\frac{mmcca^{2m-2}dy^2}{y^{2m}}+dy^2} = \frac{dy}{y^m}\sqrt{mmcca^{2m-2}+y^{2m}} = y^{-m}dy\sqrt{mmcca^{2m+2}+y^{2m}}$ (*A*). Or on ſçait que $ay^p dy \times \overline{y^q+b}^r$ eſt intégrable lorſque $\frac{p+q}{q} - 1$ eſt un nombre entier & poſitif, ou zero. Donc la précédente diffé-

rentielle *A*, qui a $-m=p$, & $2m=q$, sera intégrable tant que $\frac{-m+1}{2m}-1$, c'est-à-dire $\frac{1-3m}{2m}$, sera ici un nombre entier & positif, ou zero.

Pour voir quelle doit être m pour cela, soit $\frac{1-m}{2m}=n$ prise pour nombre entier & positif quelconque plus grand que l'unité, ou égal à l'unité, afin d'avoir $n-1=\frac{1-m}{2m}-1=\frac{1-3m}{2m}$ pour nombre entier & positif, ou égal à zero, & rendre ainsi intégrable la précédente différentielle *A*. Or il est visible que cette hypothêse de $\frac{1-m}{2m}=n$, rend $m=\frac{1}{2n+1}$. Donc cet élément *A* des arcs de Spirales dont il s'agit ici, sera intégrable, & conséquemment ces arcs rectifiables, tant que l'exposant m du degré des hyperboles génératrices de ces Spirales, sera une fraction positive dont le Numérateur soit l'unité, & le Dénominateur un nombre impair quelconque au-dessus de l'unité. *Ce qu'il faloit* 1°. *faire voir.*

2°. Ces arcs de Spirales sont aussi rectifiables, même lorsque cet Exposant m de leurs hyperboles génératrices, sera une fraction négative dont le Numérateur soit l'unité, & le Dénominateur un nombre pair quelconque. Car suivant le précédent n. 1. l'on aura ici $\sqrt{dv^2+dy^2}$

$$=\sqrt{\frac{mmcca^{2m-2}dy^2}{y^{2m}}+dy^2}=\sqrt{\frac{mmccy^{-2m}dy^2}{a^{2-2m}}+dy^2}=$$

$$=\frac{dy}{a^{1-m}}\sqrt{mmccy^{-2m}+a^{2-2m}}=\frac{mcdy}{a^{1-m}}\sqrt{y^{-2m}+\frac{a^{2-2m}}{mmcc}}\ (B)$$

pour l'élément des arcs spiraux en question, lequel comparé à $ay^p dy\times\overline{y^q+b}^r$, qu'on sçait être intégrable tant que $\frac{p+1}{q}-1$ sera un nombre entier & positif, ou zero. Cette comparaison rendant $p=0$, $q=-2m$, & conséquemment $\frac{p+1}{q}-1=\frac{0+1}{-2m}-1=\frac{1+2m}{-2m}$; l'on voit que

tant que $\frac{1+2m}{-2m}$ ſera un nombre entier & poſitif, ou zero, le précédent élément B des arccs de Spirales en queſtion, ſera auſſi intégrable, & ces arcs rectifiables.

Pour voir quelle doit être m pour cela, ſoit préſentement $\frac{1}{-2m} = n$ priſe pour un nombre entier & poſitif plus grand que l'unité, ou égal à l'unité, afin d'avoir $\frac{1}{-2m} - 1 = \frac{1+2m}{-2m} = n - 1$ nombre entier & poſitif, ou zero, & rendre ainſi intégrable la précédente différentielle B. Or il eſt viſible que cette hypothêſe de $\frac{1}{-2m} = n$, rend $m = -\frac{1}{2n}$. Donc cet élément B des arcs des Spirales dont il s'agit ici, ſera intégrable, & conſéquemment ces arcs rectifiables, tant que l'Expoſant m du degré des hyperboles génératrices de ces Spirales, ſera une fraction négative dont le Numérateur ſoit l'unité, & le Dénominateur un nombre pair quelconque. *Ce qu'il faloit* 2°. *faire voir.*

Si l'on compare les précédents nomb. 1. 2. *avec les deux de l'art.* 21. *l'on verra que les deux mêmes valeurs de* m, *l'une poſitive & l'autre négative, chacune deſquelles rend rectifiables les arcs de Spirales paraboliques dans cet art.* 21. *rendent auſſi chacune rectifiables les arcs de Spirales hyperboliques dans le préſent art.* 32. *avec cette ſeule différence qu'elles ont chacune des ſignes contraires dans ces deux art.* 21. 32. *enſorte que la valeur poſitive de* m, *poſitive dans l'art.* 21. *eſt négative dans le préſent art.* 32. *& la négative dans celui-là, eſt poſitive dans celui-ci. Ce qui réſulte de ce que l'Expoſant poſitif* m *des Paraboles génératrices des Spirales de l'art.* 21. *rendu négatif, les change en Hyperboles génératrices des Spirales du préſent art.* 32.

Contour de ces mêmes Spirales. XXXIII. Quant au contour de toutes ces Spirales hyperboliques, on vient de voir (*art.* 30. *n.* 1.) que depuis le point N où elles ſont coupées hors le cercle de révolution $ABYA$ par VC prolongée vers Q, elles vont à

l'infini du côté de X sans jamais rencontrer CX. Pour voir présentement si c'est en s'éloignant de cette droite CX, ou bien en s'en approchant comme d'une asymptote, que cela arrive ; imaginons en quelque point e à telle distance qu'on voudra du point C, avec le rayon Ce qui rencontre en b le cercle de révolution $ABYA$; soient aussi des points b & e sur CX, deux perpendiculaires $bL = Sx$ (sinus de l'arc $AMb = x$; S marque *sinus*) & $eK = t$.

On aura $bL\ (Sx).\ eK\ (t) :: Cb\ (a).\ Ce\ (y) = \frac{at}{Sx}$.

Donc $y^m = \frac{a^m t^m}{Sx^m}$; ce qui étant substitué dans l'égalité générale $xy^m = ca^m$ (*art.* 30.) de ces Spirales hyperboliques, donnera $\frac{xt^m}{Sx^m} = c$. De sorte que lorsque l'arc x (Ab) sera $= dx$, c'est-à-dire infiniment petit, son sinus Sx (bL) se trouvant aussi alors $= dx$, l'on aura pour lors $c = \frac{t^m dx}{dx^m} = t^m dx^{1-m}$, ou $c^m \times c^{1-m} = t^m dx^{1-m}$; d'où résulte $c^m.\ t^m :: dx^{1-m}.\ c^{1-m}$. Donc

1°. Lorsque $m = 1$, l'on aura $c = t$, c'est-à-dire, qu'en ce cas la Spirale hyperbolique s'éloignera continuellement de CX depuis N du côté de X, mais seulement de la longueur eK qui a une distance infinie du point C, ne voudra que la circonférence $ABYA$ du cercle de révolution : De sorte qu'en prolongeant VC vers Q jusqu'à ce que CQ soit égale à cette circonférence, l'on aura QX (parallele à CX) pour asymptote de cette premiere Spirale hyperbolique. *Les unes s'éloignent continuellement de leur axe CX, sans cependant s'en éloigner que d'une distance finie.*

2°. Si $m < 1$, l'Analogie précédente $c^m.\ t^m :: dx^{1-m}.\ c^{1-m}$. donnera c^m nulle par rapport à t^m ; & par conséquent t (eK) sera pour lors infinie. D'où l'on voit que toutes les Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales, dont l'exposant (m) est moindre que l'unité s'éloignent aussi continuellement de la droite CX depuis N du côté de X, *D'autres s'en éloignent d'une distance infinie.*

même jusqu'à devenir infiniment éloignées de cette droite CX; au lieu que la précédente ($n.$ 1.) où cet exposant (m) étoit $= 1$, ne s'en éloigne jamais plus que de la longueur de la circonférence de son cercle de révolution $ABYA$.

D'autres au contraire s'en approchent continuellement depuis un certain point, comme d'une asymptote qu'elles ne rencontrent qu'à une distance infinie.

3°. Enfin lorsque $m > 1$, l'Analogie précédente donnant $c^m . t^m :: dx^{1-m} . c^{1-m} :: \frac{1}{dx^{m-1}} . \frac{1}{c^{m-1}} :: c^{m-1} . dx^{m-1}$. L'on aura pour lors t^m nulle par rapport à c^m, c'est-à-dire, t (AK) $= 0$. D'où l'on voit que toutes les autres Spirales hyperboliques comprises dans ce dernier cas, s'approchent à l'infini de CX depuis N du côté de X, laquelle CX en devient pour cet effet l'asymptote.

Points d'inflexion de ces dernieres Spirales hyperboliques.

XXXIV. Si au lieu d'infiniment éloignés qu'on vient d'imaginer entr'eux les points e, E, on les imagine à present infiniment près l'un de l'autre, en sorte que l'arc de cercle FE (compris entre les rayons Ce, CE) soit infiniment petit; si de plus on fait $FE = dv$ constant, & le reste comme cy-dessus, la maniere ordinaire (*Anal. des Infin. petits*, *art.* 66.) de trouver les points d'infléxion ou de rebroussement, donneroit ici $dv^2 + dy^2 - yddy$ égal à zero ou à l'infini pour la formule générale qui les donne dans les Courbe dont les ordonnées CE, Ce, &c. concourent toutes dans un même point C: de sorte que si l'on y substitue les valeurs de dv, dy, ddy, selon la nature de la Courbe en question, cette formule générale deviendra celle de cette Courbe en particulier & en déterminera le point d'infléxion ou de rebroussement si elle en a, ou fera voir qu'elle n'en a point du tout.

Or suivant les noms donnés dans l'art. 2. l'on aura ici $\frac{ydx}{a} = dv$; & l'équation générale de toutes les Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales étant (*art.* 30.) $xy^m = ca^m$, l'on aura aussi $y^m dx - mxy^{m-1} dy = 0$, ou $dx = \frac{mxy^{m-1} dy}{y^m} = \frac{mxdy}{y}$; & par conséquent $\frac{ydx}{a}$ (dv)

$=\frac{mxdy}{a}$; ce qui donne $dy=\frac{adv}{mx}$; & de là $-ddy=-\frac{adxdv}{mxx}$, en différentiant dy négativement, à cause que la supposition de dv (EF) constante, fait augmenter les x pendant que les dy diminuënt. Donc en substituant ces valeurs de dv, dy, ddy, dans la formule générale dv^2+dy^2-yddy, elle se changera en $\frac{yydx^2}{aa}+dy^2-\frac{aydxdv}{mxx}=$ $=\frac{yydx^2}{aa}+dy^2-\frac{yydx^2}{mxx}$ (à cause de $dx=\frac{mxdy}{y}$) $=$ $=\frac{mmxxdy^2}{aa}+dy^2-mdy^2=\frac{mmxx+aa-maa}{aa}\times dy^2$ pour toutes les Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales en particulier : laquelle formule $\frac{mmxx+aa-maa}{aa}\times dy^2$ égalée à zero, donnera $mmxx+aa-maa=0$; d'où résulte $x=\frac{a}{m}\sqrt{m-1}$ au point d'infléxion de ces sortes de Spirales.

Il suit de là que de toutes ces Spirales hyperboliques il n'y a que celles qui ont $m>1$, lesquëlles ayent un point d'infléxion, cette valeur de x devenant zero ou imaginaire dans toutes celles qui ont $m=1$, ou $m<1$. Ce qui s'accorde parfaitement avec l'art. 33. où l'on voit (*n.* 3.) que les Spirales du premier de ces trois cas-ci, sont les seules qui depuis N s'approchent de CX du côté de X, les autres s'en éloignant toûjours, quoiqu'à distances différentes.

Voilà (art. 30. 31. 32. 33. & 34.) *pour ce qui concerne la forme générale, les déroulemens, & les longueurs de ces Spirales hyperboliques. Voici présentement leurs Touchantes, & les espaces entiers & par couches répondantes à tel nombre de révolutions & à telle révolution particuliere qu'on voudra.*

XXXV. On a trouvé cy-dessus (*art.* 14.) que la soûtangente générale des Spirales paraboliques vertico-centrales étoit $\frac{mxy}{a}$: Il n'y a qu'à y faire m négative, & la soûtangente des Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales se trouvera $=-\frac{mxy}{a}$. Ce qui fait voir en général qu'on doit prendre ici la même soûtangente que *Expression générale des soûtangentes des Spirales hyperboliques dont il s'agit ici.*

pour les Spirales paraboliques vertico-centrales, mais en sens contraire.

On voit aussi de là & de l'équation générale $xy^m = ca^m$ (*art.* 30.) des Spirales hyperboliques dont il s'agit ici, que dans celle qui a $m = 1$, toutes les soûtangentes sont égales chacune à la circonférence (c) du cercle de révolution $ABYA$; & par conséquent toutes égales entr'elles, & à celle de la ligne logarithmique en laquelle on a vû (*art.* 31. *n.* 3.) que cette Spirale hyperbolique se déroule; que dans toutes les autres Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales, les soûtangentes croissent avec les y (CE) lorsque $m < 1$; & qu'au contraire elles diminuënt à mesure que les y croissent, lorsque $m > 1$: parce que l'équation générale $xy^m = ca^m$ de ces Spirales, donnant $x = \frac{ca^m}{y^m}$, leur soûtangente générale $(-\frac{mxy}{a})$ doit aussi être $= -\frac{mca^{m-1}}{y^{m-1}}$. Tout cela revient à ce qui vient d'être dit de leurs déroulemens dans l'art. 31.

Autre expression générale des mêmes soûtangentes.

XXXVI. En faisant encore m négative dans l'art. 15. on trouvera de même $-mcn^{\frac{1-m}{-m}}$, ou $-mcn^{\frac{m-1}{m}}$ pour l'expression générale de toutes ces soûtangentes hyperboliques à la fin de telle révolution complette ou incomplette qu'on voudra exprimer par le nombre n entier ou rompu. D'où l'on voit que toutes ces soûtangentes sont entr'elles comme les $-mn^{\frac{m-1}{m}}$ qui les expriment quelque varieté que les différentes valeurs de m puissent apporter entre les Spirales ausquelles elles appartiennent; & que dans la même de ces Spirales, quelle qu'elle soit, ces soûtangentes sont toûjours comme les $-n^{\frac{m-1}{m}}$ correspondans: c'est à dire, comme $mn^{\frac{m-1}{m}}$ dans le premier cas, & comme $n^{\frac{m-1}{m}}$ dans le second, en prenant de part & d'autre ces soûtangentes négatives de positives qu'elles étoient dans l'art. 15. qui donne tout ceci.

Ainsi

Ainsi dans la Spirale engendrée comme cy-dessus par l'hyperbole asymptotique ordinaire, qui donnne $m = 1$, toutes ces soûtangentes seront comme $n^{\frac{1-1}{1}} = n^0 = 1$, c'est-à-dire égales entr'elles, conformément à ce qu'on en a déja vû dans l'art. 35. quelque nombre des révolutions complettes ou incomplettes que n puisse signifier.

Si l'on suppose $m = 2$, les soûtangentes de la Spirale hyperbolique de ce cas, seront entr'elles comme $n^{\frac{1}{2}}$, ou $\sqrt{n}$, c'est-à dire, comme les racines quarrées des nombres (n) des révolutions complettes ou incomplettes qui leur répondent. De sorte que toutes celles de ces soûtangentes dont les points d'attouchement correspondans se trouvent à la fin des révolutions complettes de cette Spirale, seront entr'elles $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, &c. c'est à dire, comme les racines quarrées des nombres naturels, selon que le nombre entier n de ces révolutions complettes sera 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

Si $m = \frac{1}{2}$, les soûtangentes de la Spirale hyperbolique de ce cas, seront comme $n^{\frac{1-2}{1}} = n^{-1} = \frac{1}{n}$, c'est-à-dire, l'une à l'autre en raison réciproque des nombres (n) des révolutions complettes ou incomplettes qui leur répondent. Et ainsi de pareilles soûtangentes de toutes les autres Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales, qui doivent résulter de toutes les autres valeurs qu'on peut donner à m.

On trouvera de même le rapport de ces soûtangentes de Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales de tous les genres, aux circonférences des cercles circonscrits, c'est-à-dire, des cercles qui (concentriques à ces Spirales) passent par leurs points d'attouchement correspondans, ou à la circonférence seule du cercle ABYA *de la premiere révolution, en faisant* m *négative dans les art.* 16. 17. *&* 18. *Car alors le rapport des soûtangentes des Spirales paraboliques vertico centrales, à de pareilles circonférences circulaires, se changera en celui-là : ainsi en voi-*

là assez pour ce qui regarde les Tangentes de ces Spirales. Passons donc à leurs Espaces, pour en dire aussi quelque chose, l'article suivant suffira.

Expression générale de ces espaces compris dans les Spirales hyperboliques dont il s'agit ici.

XXXVII. On a trouvé cy-dessus en général (*art.* 19. & 22.) que tout ce pu'il y a de couches d'espace Spirale parabolique vertico-centrales dans *COEC* (*Fig.* 4.)

FIG. IV.

est $= \frac{mcy^{m+2}}{2m+4 \times a^{m+1}}$. Donc en faisant encore ici m négative, l'on y aura de même $\frac{-mcy^{2-m}}{-2m+4 \times a^{1-m}}$ ou $\frac{mcy^{2-m}}{2m-4 \times a^{1-m}}$ pour l'expression ou la valeur de tout ce qu'il y a ici (*Fig* 5.) de semblables couches d'espace Spiral hyperbolique asymptotique cocentral dans *COEC*, si $m < 2$; ou dans *XCEX*, c'est-à-dire, dans tout le reste de cet espace Spiral depuis *CE* jusqu'à son origine, si $m > 2$. Ainsi quoyque (*art.* 30. *n.* 1. & 3.) cette origine soit à une distance infinie du côté de *X*, & que du côté du centre *C* ces Spirales fassent une infinité de révolutions avant que d'arriver en ce point *C*, ces espaces ne laissent pas d'être finis, le premier dans la Spirale qui a $m < 2$, & le second dans celle qui a $m > 2$; ils ont seulement leurs complémens infinis, chacun dans la sienne : Il n'y a que le cas de $m = 2$ qui rende l'un & l'autre de ces espaces infini dans une même Spirale hyperbolique asymptotique cocentrale.

FIG. V.

Les différentes couches de ces espaces Spiraux hyperboliques, & leurs rapports aux cercles circonscrits, ou au seul cercle ABYA *de la premiere révolution, se trouveront & se détailleront comme l'on a fait* (art. 23. 24. 25. 26. 27. 28. & 29.) *pour les espaces Spiraux paraboliques de l'exemple premier, en y rendant seulement* m *négative : ce seul changement transformant tout ce qu'il y a de parabolique dans cet exemple-là, en l'hyperbolique de celui-ci ; ce que les huit derniers articles précédens font assez voir. Ainsi nous ne nous y arrêterons pas davantage, non plus qu'à plusieurs autres proprietés de ces Spirales hyperbo-*

liques, le Pere Nicolas Jesuite les ayant suffisamment détaillées dans le Traité qu'il en donna en 1696.

EXEMPLE III.

XXXVIII. Soit encore la Courbe génératrice HHV une Parabole quelconque, dont le sommet soit A, son axe AX, & son équation $\overline{a \mp y}^m = zp^{m-1}$ (sçavoir $\overline{a-y}^m$ depuis A jusqu'en C, où y (GC) devient $=0$; & après cela $\overline{a+y}^m$, à cause qu'alors y (GC) se trouve négatif) ou $z = \frac{\overline{a \mp y}^m}{p^{m-1}}$. Ainsi l'équation générale des Spirales (*art.* 3.) donnant aussi $z = \frac{bx}{c}$, l'on aura $\frac{\overline{a \mp y}^m}{p^{m-1}} = \frac{bx}{c}$, ou $\overline{a \mp y}^m = \frac{bxp^{m-1}}{c}$ pour l'équation de la Spirale $AEZORQ$ résultante de la position précédente de la Parabole générale qu'on lui vient de donner pour génératrice.

Autres Spirales paraboliques générales appellées ici co-verticales pour les distinguer de celles de l'exemple 1. art. 13. &c.

FIG. VI.

Il est visible que cette Spirale est la même que si elle eût été formée par les extrémités E des ordonnées BE ($a \mp y$) d'une Parabole quelconque, qui auroit son paramétre $= \frac{bp^{m-1}}{c}$, son sommet en A, & dont l'axe de ces ordonnées auroit été roulé en cercle, ou plutôt (à cause des différens retours) autour d'un cercle $ABYAMB$, &c. au centre duquel elles tendroient toutes. De sorte que la Spirale parabolique que M. Bernoulli Professeur à Bâle, a formée dans les Actes de Leipsik de 1691. pag. 14. en roulant ainsi la Parabole d'Apollonius, n'est qu'un cas particulier de cette générale ci.

Je laisserois volontiers à toutes ces nouvelles Spirales paraboliques le nom de Paraboles helicoïdes *que M. Bernoulli a donné à la sienne pour la distinguer de celles de l'exemple premier. Mais parce que l'on en peut trouver encore plusieurs autres lesquelles auroient aussi des Paraboles pour génératrices, & des contours tout à fait différens selon les différentes situations*

qu'on peut donner à ces Paraboles par rapport à l'axe AX *qui passe par le centre* C *du cercle de révolution* ABYA ; *nous appellerons ces Spirales* paraboliques co-verticales, *en prenant* A *pour le sommet du cercle de révolution* ABYA, *où leurs Paraboles génératrices ont aussi* (hyp.) *le leur.*

Expression générale des soûtangentes de ces Spirales paraboliques co-verticales.

XXXIX. L'équation générale $\overline{a \mp y}^{m} = \frac{bxp^{m-1}}{c}$ de ces Spirales paraboliques co-verticales, donnant $dx = \frac{mc \times \overline{a \mp y}^{m-1} dy}{bp^{m-1}}$ tout positif, à cause que leurs x & leurs y croissent alternativement depuis A jusqu'en C, & qu'après cela elles croissent ensemble ; l'on aura leurs soûtangentes $= \frac{mcyy \times \overline{a \mp y}^{m-1}}{abp^{m-1}} = \frac{mxyy}{aa \mp ay}$: sçavoir $\frac{mxyy}{aa - ay}$ depuis A jusqu'en C, & $\frac{mxyy}{aa + ay}$ dans tout le reste.

Autre expression générale des mêmes soûtangentes.

XL. Mais pour réduire toutes ces soûtangentes à une même formule, soit l'arc de révolution $x = nc$, quelque portion ou quantité de la circonference (c) du cercle de révolution $ABYA$ que le nombre n (entier ou rompu) puisse signifier ; l'art. 8. donnant alors $nb = z$ (*art.* 38.) $= \frac{\overline{a \mp y}^{m}}{p^{m-1}}$, l'on aura $a \mp y = \overline{nbp^{m-1}}^{\frac{1}{m}}$; d'où résulte $\mp y = -a + \overline{nbp^{m-1}}^{\frac{1}{m}}$, & de là $yy = aa + \overline{nbp^{m-1}}^{\frac{2}{m}} - 2a \times \overline{nbp^{m-1}}^{\frac{1}{m}}$. Donc en substituant ces valeurs de x, $a \mp y$, yy, dans la précédente formule $\frac{mxyy}{aa \mp ay}$ des soûtangentes dont il s'agit ici, l'on aura ici de cette maniere $\frac{mncaa + mnc \times \overline{nbp^{m-1}}^{\frac{2}{m}} - 2mnca \times \overline{nbp^{m-1}}^{\frac{1}{m}}}{a \times \overline{nbp^{m-1}}^{\frac{1}{m}}}$ pour l'expression générale de ces mêmes soûtangentes, par rapport à quelque point d'attouchement que ce soit, c'est-à dire,

quelque nombre de révolutions complettes ou incomplettes que le nombre n (entier ou rompu) puiſſe ſignifier, depuis A juſqu'à ce point d'attouchement des Spirales paraboliques co-verticales dont il eſt ici queſtion, & quel que ſoit auſſi le degré m de ces mêmes Spirales, ou de leurs Paraboles génératrices.

Ainſi, par éxemple, dans celle de ces Spirales que M. Bernoulli appelle *Parabole helicoïde*, laquelle donne $m = 2$, ces ſoûtangentes ſeront $= \frac{2ncaa + 2nncbp - 4nca\sqrt{nbp}}{a\sqrt{nbp}}$ à la fin de quelque nombre de révolutions complettes ou incomplettes, qu'on puiſſe faire ſignifier à n.

De même ſi l'on ſuppoſe $m = 1$, comme lorſque la Parabole génératrice HHV dégénere en une ligne droite faiſant un angle de 45 deg. en A avec AX, les ſoûtangentes de la Spirale qui en réſultera, ſeront $= \frac{ncaa + n^3cbb - 2nncab}{nab}$ $= \frac{caa + nncbb - 2ncab}{ab}$, quelque nombre de révolutions complettes ou incomplettes qu'on puiſſe encore faire ſignifier à n. Et ainſi des autres valeurs de m à l'infini.

On fera le même uſage de ces ſoûtangentes qu'on a fait de celles de l'art. 15. dans les art. 16. 17. & 18. Paſſons donc aux eſpaces renfermés dans les Spirales dont il s'agit ici. Mais auparavant il eſt bon d'avertir que dans la ſuite lorſque le ſigne — précédera les grandeurs $\overline{a - y}$, $\overline{a + y}$, $\overline{a \mp y}$, *couvertes chacune d'un trait, il ſignifiera* moins *ces grandeurs entieres; ainſi quoiqu'il dût les changer en* $-a + y$, $-a - y$, $-a \pm y$, *on n'y fera ce changement de ſignes qu'en ceſſant de les regarder chacune comme ſimple, en leur ôtant le trait qui les couvre. C'eſt pour les reconnoître comme racines de celles de leurs puiſſances qui ſe trouveront auſſi dans la ſuite, qu'on ſe contentera d'indiquer ainſi ce changemant de ſignes ſans le faire : on le fera dans les applications particulieres.*

XLI. Pour avoir préſentement les eſpaces de ces Spirales paraboliques co-verticales, ſoient CP, Cp, ou Cp, cp, deux poſitions de la Regle mobile de l'art. 1. infini- *Expreſſion générale des eſpaces compris dans les Spirales paraboliques co-verticales.*

ment proches l'une de l'autre, dont la seconde soit rencontrée en *F* par l'arc *EG*, & le reste comme dans cet article 1. Alors on aura *CB* (a). *CE* (y) :: *Bb* (dx). $EF = \frac{ydx}{a}$. De sorte que le triangle élémentaire *ECF* ou *ECe* de l'espace cherché *ACEA*, ou *AEZCORECA*, sera $\frac{yydx}{2a}$ (*art.* 39.) $= \frac{mcyy \times \overline{a \mp y}^{m-1} dy}{2abp^{m-1}}$ (en supposant $s = a \mp y$, qui doit donner par tout $ds = dy$, à cause que $s = AG$ croît pendant que $-y = CG$ du côté de *A* diminuë, & que $+y = CG$ du côté de *X* croît aussi) $= \frac{mc \times \overline{a - s}^2 \times s^{m-1} ds}{2abp^{m-1}} = \frac{mcaa \times s^{m-1} ds - 2mcas^m ds + mcs^{m+1} ds}{2abp^{m-1}} = \frac{mcas^{m-1} ds}{2bp^{m-1}} - \frac{mcs^m ds}{bp^{m-1}} + \frac{mcs^{m+1} ds}{2abp^{m-1}}$. Donc en intégrant, l'on aura l'espace cherché $= \frac{cas^m}{2bp^{m-1}} - \frac{mcs^{m+1}}{\overline{m+1} \times bp^{m-1}} + \frac{mcs^{m+2}}{\overline{2m+4} \times abp^{m-1}}$ (à cause de $s = a \mp y$) $= \frac{ca \times \overline{a \mp y}^m}{2bp^{m-1}} - \frac{mc \times \overline{a \mp y}^{m+1}}{\overline{m+1} \times bp^{m-1}} + \frac{mc \times \overline{a \mp y}^{m+2}}{\overline{2m+4} \times abp^{m-1}}$ (à cause de l'équation $\overline{a \mp y}^m = \frac{bxp^{m-1}}{c}$ de ces Spirales) $= \frac{ax}{2} - \frac{mx \times \overline{a \mp y}}{m+1} + \frac{mx \times \overline{a \mp y}^2}{2ma+4a}$: sçavoir $ACEA = \frac{ax}{2} - \frac{mx \times \overline{a - y}}{m+1} + \frac{mx \times \overline{a - y}^2}{2ma+4a}$ depuis *A* jusqu'au centre *C*, dans lequel centre *y* se trouvant $= 0$, ce qu'il y a d'espaces ou de couches d'espace dans *AEZCA*, se trouvera $= \frac{ax}{2} - \frac{max}{m+1} + \frac{max}{2m+4} = \frac{ax}{\overline{m+1} \times \overline{m+2}}$. Après cela, les *y* deve-

nans négatifs, tout ce qu'il y aura de couches d'espace Spiral depuis *A* jusqu'à tel point *E* que l'on voudra par de-là *C* dans *AEZCORECA*, &c. se trouvera $= \frac{ax}{2} - \frac{mx \times \overline{a+y}}{m+1} + \frac{mx \times \overline{a+y}^2}{2ma+4a}$.

XLII. On réduira aussi toutes ces quadratures en une même formule, en supposant l'arc $x = nc$, quelque portion ou quantité de la circonférence (c) du cercle de révolution *ABYA*, que le nombre n (entier ou rompu) puisse signifier. Car alors trouvant $a \mp y = \overline{nbp^{m-1}}^{\frac{1}{m}}$ comme dans l'art. 40. la substitution de ces valeurs de x & de $a \mp y$ dans l'équation de l'espace général *ACEA* ou *AEZCORECA* $= \frac{ax}{2} - \frac{mx \times \overline{a \mp y}}{m+1} + \frac{mx \times \overline{a \mp y}^2}{2ma+4a}$ du précédent article 41. l'on aura aussi en général cet espace $= \frac{nac}{2} - \frac{mnc \times \overline{nbp^{m-1}}^{\frac{1}{m}}}{m+1} + \frac{mnc \times \overline{nbp^{m-1}}^{\frac{2}{m}}}{2ma+4a}$, quelque nombre de révolutions complettes ou incomplettes que le nombre n (entier ou rompu) puisse signifier depuis *A* jusqu'à quelque point *E* qu'on voudra des Spirales paraboliques eo verticales dont il s'agit ici, quel que soit aussi le degré m de ces mêmes Spirales, ou de leurs Paraboles génératrices.

Autre expression général des mêmes espaces.

Ainsi, par exemple, dans celle de ces Spirrles, que M. Bernoulli appelle *Parabole helicoïde*, laquelle donne $m = 2$, l'on aura $\frac{nac}{2} - \frac{2nc}{3}\sqrt{nbp} + \frac{nnbcp}{4a}$ pour ce qu'elle aura d'espace *ACEA*, ou *AEZCORECA*, en une ou en plusieurs couches d'autant de révolutions complettes ou incomplettes que le nombre n (entier ou rompu) en marquera depuis *A* jusqu'à quelque point *E* que ce soit de cette Spirale. Et ainsi des espaces de toute autre Spirale résultante de toute autre valeur qu'on voudra donner à m.

On fera aussi le même usage de ces espaces qu'on a fait de ceux de l'article 26. dans ce même article & dans les suivans

27. 28. & 29. *pour en avoir telle couche ou telle portion de conche qu'on voudra.*

Déroulement des Spirales dont il s'agit ici, avec la maniere d'en trouver encore les espaces.

XLIII. En suivant la méthode dont on s'est servi dans l'art. 20. pour trouver en quelles Courbes se déroulent toutes les Spirales paraboliques dont les Paraboles génératrices ont leur sommet au centre du cercle de révolution; on trouvera aussi (en se servant ici des mêmes noms que là) que les Spirales dont il s'agit ici, se déroulent toûjours en Courbes dont l'équation génerale est $v = \pm \frac{c \times \overline{a \mp y}^{m}}{bp^{m-1}} \mp \frac{mc \times \overline{a \mp y}^{m+1}}{\overline{m+1} \times abp^{m-1}}$, en prenant (dis-je) y & v pour les coordonnées perpendiculaires de ces mêmes Courbes.

Pour le voir il faut se souvenir que l'art. 20. donne en géneral $dv = \frac{ydx}{a}$ pour l'élément de l'abscisse v de l'axe de la Déroulée d'une Spirale quelconque; & que l'art 39. donne $\overline{a \mp y}^{m} = \frac{b \times p^{m-1}}{c}$ pour l'équation génerale des Spirales *co-verticales*, dont il s'agit ici, d'où résulte $dx = \mp \frac{mc \times \overline{a \mp y}^{m-1} dy}{bp^{m-1}}$; laquelle valeur de dx substituée dans la précédente équation $dv = \frac{ydx}{a}$, donnera $dv = \mp \frac{mcy \times \overline{a \mp y}^{m-1} dy}{abp^{m-1}}$ pour l'équation differentielle des déroulées des Spirales dont il s'agit ici.

Pour en trouver l'intégrale $v = \pm \frac{c \times \overline{a \mp y}^{m}}{bp^{m-1}} \mp \frac{mc \times \overline{a \mp y}^{m-1}}{\overline{m+1} \times abp^{m-1}}$ qu'on lui vient d'assigner, soit $s = a \mp y$; qui donnera $ds = dy$ comme dans l'art. 41. & de plus $\pm a \mp s = y$: cette supposition rendra ici $dv \left(\frac{mcy \times \overline{a \mp y}^{m-1} dy}{abp^{m-1}} \right)$ =

$= \frac{\pm mca \mp mcs \times s^{m-1}ds}{abp^{m-1}} = \pm \frac{mcs^{m-1}ds}{bp^{m-1}} \mp \frac{mcs^{m}ds}{abp^{m-1}}$,

dont l'intégrale est $v = \pm \frac{cs^{m}}{bp^{m-1}} \mp \frac{mcs^{m+1}}{\overline{m+1} \times abp^{m-1}}$,

(à cause de la supposition de $s = a \mp y$) $= \pm \frac{c \times \overline{a \mp y}^{m}}{bp^{m-1}}$ $\mp \frac{mc \times \overline{a \mp y}^{m+1}}{\overline{m+1} \times abp^{m-1}}$. Donc $v = \pm \frac{c \times \overline{a \mp y}^{m}}{bp^{m-1}} \mp \frac{mc \times \overline{a \mp y}^{m+1}}{\overline{m+1} \times abp^{m-1}}$ est l'équation générale des Courbes en qui se déroulent les Spirales dont il s'agit ici, ainsi qu'on le vient d'avancer.

L'art. 38. faisant voir que l'équation générale $\overline{a \mp y}^{m} = zp^{m-1}$ de la Parabole *AHV* génératrice des Spirales paraboliques *co-verticales*, dont il s'agit ici, dont $\overline{a - y}^{m} = zp^{m-1}$ est pour depuis *A* jusqu'en *C*, & $\overline{a + y}^{m} = zp^{m-1}$ pour depuis *C* à l'infini vers *X* : l'on voit en conséquence, qu'ici l'équation générale des Déroulées de ces Spirales, est $v = \frac{c \times \overline{a - y}^{m}}{bp^{m-1}} - \frac{mc \times \overline{a - y}^{m+1}}{\overline{m+1} \times abp^{m-1}}$ depuis *A* jusqu'en *C*; & $v = -\frac{c \times \overline{a + y}^{m}}{bp^{m-1}} + \frac{mc \times \overline{a + y}^{m+1}}{abp^{m-1}}$ depuis *C* vers *X*, à l'infini.

On verra de plus ici qu'entre les mêmes ordonnées (y) de part & d'autre, les longueurs de ces Courbes déroulées sont par tout égales à celles des Spirales dont elles sont les Déroulées, & leurs espaces doubles de ceux de ces Spirales. Tout cela se trouvera de la même maniere qu'on l'a trouvé dans les art. 21. & 22. pour les Spirales paraboliques vertico-centrales de l'exemple premier.

Il est à remarquer que si l'on faisoit présentement m *négative, la Parabole génératrice* HHV *de l'art.* 38. *Fig.* 6. *se chan-* Fig. VI. VII.

geroit (*Fig.* 7.) *en une hyperbole générale* HHV *entre les asymptotes orthogonales* AX, AV; *& par conséquent dont le centre seroit un point* A *de la circonférence du cercle de révolution* ABYA, *comme la Parabole y avoit son sommet. Les Spirales paraboliques qu'on a vû* (art. 38.) *résulter de cette Parabole, se changeroient de même en hyperboliques; & tout ce qu'on a dit de ces premieres Spirales dans l'exemple où nous sommes, deviendroit propre à celles-ci, de même qu'on a vû* (Exemple 2.) *ce qui concerne les Spirales paraboliques de l'exemple premier, devenir propre aux hyperboliques de l'exemple second. Ainsi il n'y a rien là qui nous doive arrêter davantage. Nous ne nous arrêterons point non plus aux rebroussemens que l'une & l'autre Spirale de cet exemple-ci, doit avoir en* C; *ce que nous en avons dit en général dans l'art. 12. doit suffire. L'art. 7. fait assez voir aussi que les Spirales hyperboliques qui résulteroient ici de* m *négative, différent encore de celles de l'exemple second, en ce que c'est en s'approchant du centre* C *que celles de cet exemple font une infinité de révolutions autour de lui avant que d'y arriver; au lieu que ce seroit en s'écartant seulement d'une distance finie de ce centre que celles qui résulteroient ici de* m *négative, feroient une infinité de révolutions autour de lui, après y être arrivées en un nombre qui seroit seulement à l'unité comme l'ordonnée* SC *est au paramétre* AD.

EXEMPLE IV.

Spirale circulaire appellée ici vertico-centrale, pour la distinguer de tout ce que les différentes positions de son cercle générateur en pourroit encore produire d'autres.

FIG. VIII.

XLIV. Soit la Courbe génératrice *HHV* un demi-cercle quelconque dont le diamétre soit *CX*, le centre *F*, & l'équation $z = \sqrt{2ry - yy}$, en supposant $CF = r$, & le reste comme dans l'art. 2. Donc en substituant cette valeur de z dans l'égalité générale $cz = bx$ ou $z = \frac{bx}{c}$ de l'art. 3. l'on aura $\frac{bx}{c} = \sqrt{2ry - yy}$ ou $x = \frac{c}{b}\sqrt{2ry - yy}$ pour celle de la Spirale particuliere *COBZAKLRESX*, laquelle on voit commencer en *C* (on pourroit aussi suivant l'article 5. la concevoir commencer en *X*), suivre *COBZAK* à mesure que les *GH* augmentent, arriver en

A (*art.* 8.) à la fin de la premiere révolution, en prenant AD (b) pour une des ordonnées (z) du cercle générateur; se rebrousser (*art.* 11.) au point K ou l'arc circulaire $FK = \frac{crr - bcr}{ab}$ (tiré du centre C par F) la rencontre, ensuite revenir en arriere suivant $KLRESX$ à mesure que les GH diminuënt jusqu'en X où elle arrive à la fin de son retour après avoir fait $FL = AF$.

Pour voir présentement que $FK = \frac{crr - bcr}{ab}$, soit β le point où la droite CK coupe le cercle de révolution, c'est-à-dire, le point où étoit le point B de la Regle CP lorsqu'elle passoit par K; l'Analogie de l'art. 3. donnera NF (r). AD (b) :: $AMYA\beta$ (x). $AMYA$ (c). Et par conséquent aussi $r - b. b :: x - c. c.$ ce qui donne $\frac{cr - cb}{b} = x - c = A\beta$. mais AC (a). FC (r) :: $A\beta$ $\left(\frac{cr - cb}{b}\right)$. FK. Donc $FK = \frac{crr - cbr}{ab}$, ainsi qu'on le vient de dire.

XLV. De ce que (*art.* 44.) $x = \frac{c}{b}\sqrt{2ry - yy}$ est l'égalité qui exprime la nature de la Spirale dont il s'agit ici, l'on aura $\frac{cryy - cy^3}{ab\sqrt{2ry - yy}}$, ou (à cause de l'équation précédente) $\frac{ccryy - ccy^3}{abbx}$ pour l'expression générale des soûtangentes de cette Spirale. *Tangentes de cette Spirale circulaire.*

XLVI. Quant à sa Quadrature, l'élément triangulaire $\frac{yydx}{2a}$ de l'espace Spiral $COEC$ se trouvant aussi $= \frac{cryydy - cy^3dy}{2ab\sqrt{2ry - yy}} = \frac{c}{2ab} \times \frac{\frac{3}{2}ry^4dy - y^5dy}{\sqrt{2ry^3 - y^6}}$ (A) $+ \frac{cr}{3ab} \times dy\sqrt{2ry - yy}$ (B) $- \frac{4cr}{3ab} \times \frac{rydy}{2\sqrt{2ry - yy}}$ (C). Or l'intégrale de A est $= \frac{c}{2ab} \times \frac{1}{3}\sqrt{2ry^5 - y^6} = \frac{cyy}{6ab}\sqrt{2ry - yy}$; celle de B est $= \frac{cr}{3ab} \times HVCGH = \frac{cr}{3ab} \times \frac{y\sqrt{2ry - yy}}{2} + \frac{cr}{3ab} \times$ seg. *Sa Quadrature, ou les espaces qu'elle renferme.*

$CVHC$; & celle de C eſt $= \frac{4cr}{3ab} \times$ ſeg. $CVHC$. Donc l'eſpace ſpiral $COEC$ eſt $= \frac{cyy}{6ab} \sqrt{2ry-yy} + \frac{cr}{3ab} \times \frac{y\sqrt{2ry-yy}}{2} + \frac{cr}{3ab} \times$ ſeg. $CVHC - \frac{4cr}{3ab} \times$ ſeg. $CVHC = \frac{cyy+cry}{6ab} \times \sqrt{2ry-yy} - \frac{cr}{ab} \times$ ſeg. $CVHC$, depuis C juſqu'en K où l'accord des x & des y à croître enſemble, ceſſe pour croître alternativement depuis K juſqu'en X. De maniere qu'en faiſant l'ordonnée FN avec la corde CN, l'on aura tout l'eſpace $COEZAKC = \frac{cr^3}{3ab} - \frac{cr}{ab} \times$ ſeg. $CVHNC$. Au contraire depuis X juſqu'en K, le ſecteur Spiral $CXSEC$ ſera $= \frac{cyy+cry}{6ab} \sqrt{2ry-yy} - \frac{cr}{ab} \times$ ſeg. $CVHNHC + \frac{cr}{ab} \times CVHNHXC = \frac{cyy+cry}{6ab} \sqrt{2ry-yy} + \frac{cr}{ab} \times$ ſect. XCH. De ſorte qu'en K, où y eſt $= r$, & le ſecteur $XCH =$ ſect. XCN, l'on aura tout l'eſpace $CXSERLKC = \frac{cr^3}{3ab} + \frac{cr}{ab} \times$ ſect. XCN.

On voit auſſi de là que la différence dont cet eſpace $CXSERLKC$ ſurpaſſe l'autre $COEZAKC$, eſt $= \frac{cr}{ab} \times$ ſect. $XCN + \frac{cr}{ab} \times$ ſeg. $CVHNC = \frac{cr}{ab} \times CVNXC$ produit de $\frac{cr}{ab}$ par le demi-cercle générateur $CNXC$; & leur ſomme, c'eſt-à-dire, tout l'eſpace $CKAZEOCKLRESXC = \frac{2cr^3}{3ab} + \frac{cr}{ab} \times$ ſect. $XCN - \frac{cr}{ab} \times$ ſeg. $CVHNC = \frac{2cr^3}{3ab} + \frac{cr}{ab} \times 2$ triang. $CNF = \frac{2cr^3}{3ab} + \frac{cr^3}{ab} = \frac{5cr^3}{3ab}$.

Les différentes couches d'eſpace, qui ſe trouvent les unes ſur les autres dans tout cela, ſe détailleront comme l'on a fait celles des Spirales paraboliques de l'exemple premier.

Déroulement de cette Spirale circulaire.

XLVII. Il eſt aiſé de voir par l'équation $x = \frac{c}{b} \sqrt{2ry-yy}$ (*art.* 44.) de cette Spirale circulaire vertico-centrale, qu'elle ſe déroule en une Courbe mécanique dont l'équa-

tion différentielle est $dv = \frac{crydy - cyydy}{ab\sqrt{2ry-yy}}$, en prenant (comme cy-dessus art. 20.) v pour les abscisses de l'axe, & y pour les ordonnées de cette Courbe dont la longueur est égale à celle de cette Spirale par parties correspondantes.

XLVIII. Pour la construction de cette Courbe mécanique, imaginons-en une autre geométrique $CM(E)m$, dont l'équation soit $\frac{cry - cyy}{b\sqrt{2ry-yy}} = s$, ses abscisses $CE = y$, & ses ordonnées perpendiculaires $EM = s$. Cette équation fait assez voir que cette Courbe doit commencer en C en touchant CG parallele à ses ordonnées, & s'élever ensuite vers M de maniere qu'en prenant $CE = \frac{3r - r\sqrt{5}}{2}$, son point M (au bout de l'ordonnée EM) soit le plus elevé de tous au-dessous de son axe CX, & la tangente en ce point parallele à cet axe; qu'à la distance $CE(y) = r$ de son origine C, cette Courbe doit revenir couper son axe CX en (E), & faire là avec lui un angle dont le sinus soit à celui de son complément :: $c.b.$ c'est-à dire, comme la circonférence $AMBY$ du cercle de révolution est au paramétre AD. Qu'après celà elle doit se continuer à l'infini au-dessous de CX sans jamais rencontrer son ordonnée $X\mu$ distante de C de la valeur de $CX = 2r$, laquelle en devient ainsi l'asymptote.

Construction de sa Déroulée. FIG. IX.

Cela posé, & $(G)(g)$ étant perpendiculaire sur CX prolongée vers A ensorte que CA soit $= a$, si l'on fait le rectangle $CADG$ égal à l'espace $CEMC$: il est encore manifeste que le point F, dans lequel les perpendiculaires DG & ME se rencontreront, sera un de ceux de la Courbe cherchée; puisque l'on aura pour lors $adv = sdy$ (hyp.) $= \frac{crydy - cyydy}{b\sqrt{2ry-yy}}$, c'est-à-dire, $dv = \frac{crydy - cyydy}{ab\sqrt{2ry-yy}}$ qu'on vient de voir (art. 47.) être l'équation de cette Courbe. Donc en faisant par tout de même, l'on aura $CF(F)(f)f\varphi$ pour la Courbe qui résulte du déroule-

ment de la Spirale circulaire dont il s'agit ici, laquelle Courbe doit toucher l'axe *CX* en *C*; avoir un point d'inflexion en *F* sous le point *M* le plus haut de la Courbe *CM* (*E*) *m*; descendre ensuite jusqu'au point (*F*) qu'on trouve répondre aussi au point (*E*) en faisant de même le rectangle (*G*) *CA* (*D*) égal à l'espace *CM* (*E*) *C*; la tangente en ce point (*F*) se trouve parallele à *CX*; de là la Courbe *CF* (*F*) remonte vers φ, à cause qu'au de là du point (*E*) du côté de *X*, l'espace (*E*) *em* (*E*) devenant négatif par rapport à *CM* (*E*) *C*, le rectangle *gCAd* correspondant ne doit valoir que la différence de *CM* (*E*) *C* à (*E*) *em* (*E*); ce qui rehausse le point *f* vers l'axe *CX*, ou vers φ : de maniere que lorsque l'espace (*E*) (*e*)(*m*) (*E*) est $=$ *CM* (*E*) *C*, alors *gd* étant en *CA*, le point (*f*) de cette Courbe doit se trouver en (*e*) sur *CX*; & ensuite monter vers *f* jusqu'en φ où elle doit toucher l'asymptote μ*X* prolongée à une distance *X*φ de l'axe *CX*, laquelle rende l'espace fini *CM* (*E*)—μ*m* (*E*) *X*μ $=$ *CA* (*d*) (*g*).

FIG. VIII. IX. Cela étant, il suit du déroulement qui a engendré cette Courbe *CF* (*F*) *f* (*f*) *f*φ, qu'en prenant ici (*Fig.* 9.) *CE* égale au petit rayon *CE* de la Fig. 8. l'on aura l'arc *CF* de cette déroulée, valant l'arc *COE* de la Spirale, & l'arc *CF* (*F*) $=$ *COEZAK*; en prenant aussi *Ce* dans la Fig. 9. égale au grand rayon *CE* de la Fig. 8. l'on aura de même l'arc *CF* (*F*) *f* $=$ *COEZAKLRE*, & *CF* (*F*) *f*φ $=$ *COEZAKLRESX*; & par tout de même, en prenant *CE* de la Fig. 9. égale au petit rayon *CE* de la Fig. 8. ou *Ce* de la Fig 9. égale au grand rayon *CE* de la Fig. 8.

FIG. IX. La Quadrature de cette Courbe *CF* (*F*) *f* (*f*) *f*φ, prise comme dans la Spirale circulaire du déroulement de laquelle cette Courbe résulte, se trouvant (à la maniere de l'art. 22.) double de celle qu'on vient de trouver (*art.* 46.), pour cette Spirale, on ne s'y arrêtera pas davantage.

EXEMPLE V.

Spirale logarith. XLIX. Soit la Courbe génératrice *HHV* une loga-

rithmique dont l'asymptote soit CV parallele à GH, ses ordonnées HK paralleles à CX, sa soûtangente $KT = b$ constante, & les autres noms comme dans l'article 2. l'équation de cette logarithmique sera $\frac{bdy}{y} = -dz$ (à cause de l'équation $cz = bx$ des Spirales en général de l'art. 3.) $= -\frac{bdx}{c}$, ou $\frac{dy}{y} = -\frac{bdx}{bc}$: De sorte qu'en prenant les dx constantes, c'est-à-dire, les x (AMB ou $ABYAMB$) en progression arithmétique croissante, l'on aura les y (CE) en progression geométrique décroissante. Ce qui prouve que la Spirale $OZEAREX$ qui en résulte, est une Spirale logarithmique ordinaire, ainsi qu'on l'a déja vû dans l'art. 4. *mique ordinaire.* Fig. X.

On voit aussi que cette Spirale entrera par A dans le cercle de révolution $ABYA$ à la fin de la premiere, conformément à l'art. 8. en prenant AD (b) pour une des ordonnées de la Courbe génératrice HHV. Et que suivant l'art. 7. elle fera une infinité de révolutions avant que d'arriver à son centre C.

On voit enfin que les ordonnées ou rayons de cette Spirale sont par tout à ses soûtangentes correspondantes :: $ab.\ bc.$ c'est-à-dire, en raison constante ; & par conséquent aussi les angles de cette Spirale avec ses ordonnées sont par tout les mêmes, ainsi qu'on le suppose d'ordinaire dans la définition qu'on en donne.

Longueur de cette Spirale logarithmique.

L. Cela étant, on aura dy à l'élément (ds) de cette Spirale :: $ab.\ \sqrt{aabb + bbcc}$. Ce qui donne cet élément $ds = \frac{dy}{ab}\sqrt{aabb + bbcc}$; & par conséquent $s = \frac{y}{ab}\sqrt{aabb + bbcc}$: c'est-à-dire, que l'arc de cette Spirale logarithmique, compris entre chaque ordonnée y (CE) & le centre C, est $= \frac{y}{ab}\sqrt{aabb + bbcc}$. D'où l'on voit que tous ces arcs sont finis, quoiqu'ils fassent chacun (*art.* 7.) une infinité de révolutions autour du centre C.

Sa Quadrature, ou l'espace qu'elle renferme.

LI. L'égalité $\frac{dy}{y} = -\frac{bdx}{bc}$ donne aussi $-\frac{bcydy}{2ab} = \frac{yydx}{2a}$ élément de l'espace $COZEC$. Ainsi cet espace sera $=$

$=\frac{bcyy}{4ab}$, dont les différentes couches se détailleront à l'infini comme l'on a fait celles des espaces spiraux paraboliques de l'éxemple 1. dans l'art. 23. &c. Ces espaces spiraux logarithmiques $(\frac{bcyy}{4ab})$ se trouvant ainsi comme les quarrés des ordonnées ou rayons (y), seront aussi (*art.* 49.) en progression geométrique pendant que les arcs (x), de révolution seront en progression arithmétique.

Cette Spirale logarithmique se déroule en un triangle rectiligne rectangle, qui en donne encore la longueur, & la quadrature.

LII. Si l'on examine le déroulement de cette Spirale logarithmique *OZEAREX* comme l'on a fait ceux des Spirales paraboliques du premier éxemple dans les art. 20. 21. & 22 on trouvera que cette Spirale logarithmique se déroule en un triangle rectiligne rectangle dont la hauteur est à la base :: $ab.\ bc.$ c'est-à-dire (*art.* 49.) comme les ordonnées sont aux soûtangentes correspondantes de cette Spirale logarithmique ; ce qui donne encore sa longueur & son espace tels qu'on les vient de trouver dans les art. 50. & 51. Car y (EC) étant la hauteur de ce triangle, cette Analogie donnera $\frac{bcy}{ab}$ pour sa base ; & par conséquent $\frac{y}{ab}\sqrt{aabb+bbcc}$ pour son hypothenuse, & $\frac{bcyy}{2ab}$ pour son aire. Ainsi les longueurs correspondantes de quelque Spirale que ce soit, & de sa Déroulée, étant toûjours égales entr'elles, & l'espace de la Spirale toûjours moitié du correspondant de sa Déroulée ; la longueur de la Spirale dont il s'agit ici, doit être $=\frac{y}{ab}\sqrt{aabb+bbcc}$, & son espace $=\frac{bcyy}{4ab}$, comme on l'a déja vû dans les articles 50. & 51.

Outre cette Spirale logarithmique connuë de tous les Geométres, en voici encore cinq autres pareillement logarithmiques dont personne (que je sçache) n'a parlé jusqu'ici.

EXEMPLE VI.

Premiere des nouvelles Spirales logarithmiques. FIG. XI.

LIII. La premiere de ces cinq nouvelles Spirales logarithmiques est encore formée, comme la précédente, par

par le moyen de la logarithmique ordinaire *HHV*, dont la soûtangente *GT* soit encore $=b$, mais dont *CX* soit l'asymptote, & $-\frac{bdz}{dy}=z$ son équation differentielle. Il est visible que l'égalité $z=\frac{bx}{c}$ des Spirales en général de l'art. 3. donnant $dz=\frac{bdx}{c}$, si l'on substituë ces valeurs de z & de dz dans $-\frac{bdz}{dy}=z$, il en résultera $-\frac{bbdx}{cdy}=\frac{bx}{c}$, ou $\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{b}$ pour l'équation de cette nouvelle Spirale logarithmique *COZEAREX*.

On voit de là qu'en prenant ici les dy constantes, c'est-à-dire, les y (*CE* ou *CG*) en progression arithmétique décroissante; les x (*AMB* ou *ABYAMB*) en suivront une geométrique croissante; au lieu que dans l'autre Spirale logarithmique (*excmp.* 5.) les x étant en progression arithmétique, c'étoient les y qui en suivoient une geométrique. On a déja vû tout cela dans l'art. 4.

LIV. Il suit encore de l'équation $\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{b}$ (*art.* 53.) de la Spirale dont il s'agit ici, que les soûtangentes de cette seconde Spirale logarithmique; sont par tout $=-\frac{xyy}{ab}$, c'est-à dire qu'elles sont toûjours aux y (*CE*) correspondantes :: $xy.\ ab$. *Tangentes de cette nouvelle Spirale.*

LV. On voit aussi (*art.* 5.) que cette Spirale-ci commence du côté de *X* à une distance infinie du point *C*; qu'ensuite (en prenant *AD* pour une ordonnée de *HHV*) elle entrera (*art.* 8.) par *A* dans le cercle *ABYA* à la fin de la premiere révolution; pendant laquelle l'arc infini *XRA* aura été décrit; & qu'enfin (*art.* 6.) elle arrivera au centre *C* après un nombre fini de révolutions. Ce qui est tout le contraire de la précédente (*excmp.* 5.) qui commençoit à une distance finie du côté de *X*, & n'arrivoit au centre *C* qu'après une infinité de révolutions. *Cette Spirale commence à une distance infinie de son centre, où elle arrive après un nombre fini de révolutions.*

LVI. Pour voir présentement, comme l'on a fait dans l'art. 3. pour les Spirales hyperboliques de l'exemple se- *A quelle distance de son axe elle commence.*

cond, si c'est en s'éloignant ou en s'approchant de la droite CX, que cette nouvelle Spirale logarithmique (qui coupe VC prolongée en N) va à l'infini depuis N du côté de X sans la rencontrer; soit encore un de ses points quelconque e pris sur son arc NX à telle distance qu'on voudra de son centre C, avec le rayon Ce qui rencontre le cercle de révolution $ABYA$ en b; soient aussi sur CX les perpendiculaires $bL = Sx$ (sinus de l'arc $Ab = x$: S signifie *sinus*), & $eK = t$.

On aura $bL\ (Sx).\ eK\ (t) :: Cb\ (a).\ Ce\ (y)$. Ce qui donne $at = y \times Sx$, ou $adt = y \times dSx - Sx \times dy$ ou bien aussi $\frac{adt - y \times dSx}{Sx} = -dy$ (à cause de l'équation $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{b}$ de l'art. 53.) $= \frac{bdx}{x}$. Mais parce que l'arc Ab, en devenant nul, rend $x = dx$, & $Sx = dx = dSx$; cette équation se changera alors en $\frac{adt - ydx}{dx} = \frac{bdx}{dx} = b$, ou en $adt - ydx = bdx$, d'où résulte $\frac{dt}{dx} = \frac{b+y}{a}$: De sorte qu'alors y, & par conséquent aussi $b+y$, se trouvant infinie par rapport à a, l'on aura de même dt infinie par rapport à dx infiniment petite du premier genre. Par conséquent cette nouvelle Spirale logarithmique $COZEAREX$ à une distance infinie de C du côté de X, doit se trouver éloignée de la droite CX du moins d'une distance finie: La voici.

Puisque $at = y \times Sx$, l'on aura aussi $\frac{atdy}{y \times Sx} = dy$ (à cause de $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{b}$ dans l'art. 53.) $= -\frac{bdx}{x}$. Mais parce que l'arc Ab en devenant nul lorsque y est infinie, rend $x = dx$, & $Sx = dx$; cette équation $\frac{atdy}{y \times Sx} = -\frac{bdx}{x}$ se changera pour lors en $\frac{atdy}{ydx} = -\frac{bdx}{dx}$; ce qui donne $\frac{dy}{dx} = -\frac{by}{at}$. Mais l'équation $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{b}$ de l'art. 53. donne aussi pour lors $\frac{dx}{dx} = -\frac{dy}{b}$; & par conséquent $b = -dy$; &

par conséquent aussi dy infinie par rapport à dx. Donc hy sera aussi infinie par rapport à at. Ainsi h & a étant (*hyp.*) finies, t le sera aussi. Donc lorsque Ce (y) est infinie, eK (t) est finie; & par conséquent la Spirale logarithmique *COZEAREX* dont il s'agit dans le présent art. 56. doit à une distance infinie de son centre C, ne se trouver éloignée que d'une distance finie de son axe CX. *Ce qu'il faloit trouver.*

LVII. Si l'on examine le déroulement de cette Spirale logarithmique, comme l'on a fait ceux des Spirales paraboliques du premier exemple, dans les art. 20. 21. & 22. en faisant de ses ordonnées concourantes (y) les ordonnées paralleles de sa Déroulée, & en prenant v pour les abscisses de l'axe de cette Déroulée, auquel ces ordonnées soient perpendiculaires; on trouvera $dv = \frac{vydy}{hh - hy}$ pour l'équation de cette même Déroulée. Car l'art. 20. donnant en général $dv = \frac{ydx}{a}$ pour l'élément de l'abscisse v de l'axe de la Déroulée d'une Spirale quelconque, d'où résulte $av = \int ydx$; & d'un autre côté l'art. 53. donnant $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{h}$ pour l'équation de la présente Spirale logarithmique, d'où résulte $hdx = -xdy$, & en conséquence $ydx + hdx = ydx - xdy$, dont (les y diminuant à mesure que les x croissent) l'intégrale est $\int ydx + hx = xy$: l'on aura ici $av + hx = xy$, ou $av = xy - hx$, d'où résulte $x = \frac{av}{y - h}$, & $dx = \frac{\overline{y-h} \times adv - avdy}{\overline{y-h}^2}$. Donc en substituant cette valeur de dx en sa place dans la précédente équation $dv = \frac{ydx}{a}$, l'on aura ici $dv = \frac{\overline{y-h} \times ydv - vydy}{\overline{y-h}^2} = \frac{yydv - hydv - vydy}{\overline{y-h}^2}$, & en conséquence $yydv - hydv - vydy = \overline{y-h}^2 \times dv = yydv - 2hydv + hhdv$; ce qui se réduit à $vydy = hhdv - hydv$, d'où résulte (ainsi qu'on le vient de dire)

Déroulement de cette nouvelle Spirale logarithmique.

$dv = \frac{vydy}{hh - hy}$ pour l'équation de la Déroulée de la Spirale logarithmique dont il s'agit ici ; de laquelle Déroulée suivant l'art. 20. la longueur sera la même que celle de cette Spirale, & son espace double de cette même Spirale : le tout pris par rapport à des arcs correspondants.

Ces longueurs, ces espaces entiers & par couches, se chercheront comme dans l'exemple premier pour les Spirales paraboliques vertico-centrales. Je finis donc en rapportant seulement les constructions des quatres nouvelles Spirales qui nous restent encore à faire voir : réservant le surplus pour une autre fois.

EXEMPLE VII.

Seconde des nouvelles Spirales logarithmiques.

LVIII. Soit $dz = \frac{abdy}{cyy}\sqrt{hh - yy}$ l'équation de la Courbe génératrice *HHV*. Il est visible que l'égalité générale (*art.* 3.) des Spirales, donnant $dz = \frac{bdx}{c}$, si l'on substituë cette valeur de dz dans l'égalité précédente, l'on aura $dx = \frac{ady}{yy}\sqrt{hh - yy}$, ou $\frac{ydx}{a} = \frac{dy\sqrt{hh - yy}}{y}$ pour l'équation de la Spirale que la Courbe génératrice proposée doit engendrer à la maniere de l'art. 1. De sorte qu'en prenant ds pour l'élément de cette Spirale, l'on aura $ds = \sqrt{dy^2 + \frac{hhdy^2 - yydy^2}{yy}} = \frac{hdy}{y}$, ou $\frac{ds}{h} = \frac{dy}{y}$. D'où l'on voit qu'en prenant les arcs (s) de cette Spirale en progression arithmétique, ses ordonnées correspondantes (y) seront en progression geométrique. Ainsi cette Courbe sera encore une Spirale logarithmique d'une troisiéme espece.

Et si l'on prend encore y & v pour les coordonnées orthogonales de sa Déroulée, il est visible aussi que $dv = \frac{dy}{y}\sqrt{hh - yy}$ sera l'équation de cette Déroulée, dont la longueur sera égale à celle de cette Spirale, & son

pace double celui de cette même Spirale : le tout pris par rapport à des arcs correſpondans.

EXEMPLE VIII.

LIX. Soit de même $dz = \frac{abzdy}{\sqrt{aabbbb - ccyyzz}}$ l'équation de la Courbe génératrice *HHV*. L'égalité générale $z = \frac{bx}{c}$ (*art.* 3.) des Spirales, donnant $dz = \frac{bdx}{c}$, l'on aura $dx = \frac{abxdy}{\sqrt{aabbbb - bbxxyy}} = \frac{axdy}{\sqrt{aabb - xxyy}}$; ce qui donne $aabbdx^2 = aaxxdy^2 + xxyydx^2$, ou bien $\frac{dx}{x} = \sqrt{\frac{aady^2 + yydx^2}{aabb}} = \frac{\sqrt{dy^2 + \frac{yydx^2}{aa}}}{b} = \frac{ds}{b}$, c'eſt-à-dire, $\frac{dx}{x} = \frac{ds}{b}$ pour l'équation de la Spirale qui doit réſulter de la Courbe génératrice propoſée, en prenant encore ds pour l'élément de cette Spirale. D'où l'on voit qu'en prenant les arcs (s) de cette même Spirale en progreſſion arithmétique, les arcs correſpondans (x) de révolution ſeront en progreſſion geométrique. Ainſi cette Courbe ſera encore une Spirale logarithmique d'une quatriéme eſpece.

Troiſiéme des nouvelles Spirales logarithmiques.

Autrement. Puiſque $dx = \frac{axdy}{\sqrt{aabb - xxyy}}$, l'on aura $\frac{ydx}{x} = \frac{xydy}{\sqrt{aabb - xxyy}}$, & $ds = \sqrt{dy^2 + \frac{xxyydy^2}{aabb - xxyy}} = \frac{abdy}{\sqrt{aabb - xxyy}} = \frac{bdx}{x}$, ou $\frac{ds}{b} = \frac{dx}{x}$, comme cy-deſſus.

EXEMPLE IX.

LX. Soit préſentement $aab^3hdyddy = aabbcdy^2dz - bcchydydz^2 + c^3yydz^3$ l'équation de la Courbe génératrice *HHV*. L'égalité générale de l'art. 3. donnant $dz = \frac{bdx}{c}$, l'on aura $aab^3hdyddy = aab^3dxdy^2 - b^3hydx^2dy + b^3yydx^3$, ou $aahdyddy + hydx^2dy = aadxdy^2 + yydx^3$.

Quatriéme des nouvelles Spirales logarithmiques.

Donc $\frac{b}{dx} \times \frac{aadyddy + ydx^2 dy}{\sqrt{aady^2 + yydx^2}} = \sqrt{aady^2 + yydx^2}$; & en intégrant (*dx* étant constante) $\frac{b}{dx}\sqrt{aady^2 + yydx^2} = \int \sqrt{aady^2 + yydx^2}$, ou (en divisant le tout par *a*) $\frac{b}{dx}\sqrt{dy^2 + \frac{yydx^2}{aa}} = \int \sqrt{dy^2 + \frac{yydx^2}{aa}}$, c'est-à-dire (en prenant encore *ds* pour l'élément de la Spirale) $\frac{bds}{dx} = s$, ou $\frac{ds}{s} = \frac{dx}{b}$ qui en sera l'équation. D'où l'on voit que cette Courbe est encore une Spirale logarithmique d'une cinquiéme espece, dont les arcs (*s*) seront en progression geométrique pendant que les arcs correspondans (*x*) de révolution seront en progression arithmétique.

EXEMPLE X.

Cinquiéme des nouvelles Spirales logarithmiques.

LXI. Soit enfin $aabbdy^3 = ccbydydz^2 - ccyydydz^2 + ccbyydzddz$ l'équation de la Courbe génératrice *HHV*. L'égalité générale $z = \frac{bx}{c}$ de l'art. 3. donnant $dz = \frac{bdx}{c}$, & $ddz = \frac{bddx}{c}$, la substitution de ces valeurs de *dz* & *ddz* dans la précédente équation de la Courbe proposée, la changera en $aabbdy^3 = bbbydydx^2 - bbyydydx^2 + bbbyydxddx$, ou $aady^3 + yydydx^2 = bydydx^2 + byydxddx$. Ce qui donne $\frac{dy}{b}\sqrt{aady^2 + yydx^2} = \frac{ydydx^2 + yydxddx}{\sqrt{aady^2 + yydx^2}}$: De sorte que si l'on integre en prenant *dy* constante, l'on aura $\frac{dy}{b} \times \int \sqrt{aady^2 + yydx^2} = \sqrt{aady^2 + yydx^2}$, ou (en divisant le tout par *a*) $\frac{dy}{b} \times \int \sqrt{dy^2 + \frac{yydx^2}{aa}} = \sqrt{dy^2 + \frac{yydx^2}{aa}}$: c'est-à-dire, $\frac{sdy}{b} = ds$ ou $\frac{dy}{b} = \frac{ds}{s}$ pour l'équation de la Spirale cherchée, en prenant encore *ds* pour son élément. D'où l'on voit qu'en prenant les arcs (*s*) de cette Spirale en progression geométrique, ses ordonnées (*y*) seront en

progreſſion arithmétique. Ainſi cette Courbe eſt encore une Spirale logarithmique d'une ſixiéme eſpece.

LXII. Telle eſt la conſtruction des ſix Spirales logarithmiques promiſes cy-deſſus, leſquelles comprennent toutes les combinaiſons poſſibles de progreſſions arithmétique & geometrique entre leurs arcs (s), ceux de révolution (x), & leurs ordonnées (y). Car

Les ſix Spirales logarithmiques précédentes ſont tout ce qu'il en peut réſulter des combinaiſons des progreſſions arithmétiques & geométriques de leurs ordonnées, de leurs arcs, & de ceux des révolution.

1°. Si l'on prend les arcs (x) de révolution en progreſſion arithmétique, la Spirale de l'art. 49. aura ſes ordonnées (y), & celle de l'art. 60. ſes arcs (s) en progreſſion geométique; Et réciproquement.

2°. En prenant les ordonnées ou rayons (y) de la Spirale en progreſſion arithmétique, celle de l'art. 53. aura ſes arcs (x) de révolution, & celle de l'art. 61. ſes propres arcs (s) en progreſſion geométrique; Et réciproquement.

3°. Enfin en prenant les arcs (s) de la Spirale en progreſſion arithmétique, celle de l'art. 59. aura ceux (x) de révolution, & celle de l'art. 58. ſes ordonnées (y) en progreſſion geométrique; Et réciproquement.

Voilà beaucoup plus d'Exemples qu'on ne s'étoit d'abord propoſé, de la formation générale des Spirales de l'article premier, & de l'uſage qu'on doit faire de leur équation univerſelle trouvée dans l'art. 3. Mais la facilité avec laquelle la conſtruction des ſix précédentes Spirales logarithmiques s'en déduit, m'a paru digne d'être obſervée. Voici preſentement quelques uſages de cette formation générale pour la deſcription des Courbes dont les ordonnées concourent en un même point quelconque de leur plan.

USAGE

De la Formation générale des Spirales de l'art. 1. pour la deſcription des Courbes dont les ordonnées concourent en quelque point que ce ſoit de ſon plan.

LXIII. Une Courbe quelconque OEZ, dont les *Maniére de trou.*

ver les génératrices propres à décrire par le moyen de l'art. 1. & commençant de Spirales, les Courbes dont les ordonnées concourent en quelque point que ce soit.

FIG. XII.

ordonnées EC, eC, &c. concourent toutes en quelque point C que ce soit de son plan, étant proposée à décrire, soit cette Courbe imaginée comme une espece de Spirale, dont C soit le centre ou le pole, $ABYA$ le cercle de révolution décrit de tel rayon AC qu'on voudra, la circónférence duquel soit rencontrée en B, b, par deux rayons ou ordonnées CE, Ce, de cette Courbe, infiniment proches l'une de l'autre; & tout le reste comme dans l'art. 1. Soient aussi les noms ici les mêmes que dans l'art. 2. Soient seulement de plus l'arc infiniment petit EF décrit du rayon CE, appellé dv, & AG ou BE appellée t; & par conséquent $a-y=t$, ou $y-a=t$, selon que AC (a) est plus grand ou moindre que EC (y). Pour éviter cette varieté de signes, nous supposerons toûjours dans la suite AC plus grand que EC; si le contraire arrive, on substituëra $y-a$ & dy aux places de $a-y$ & $-dy$, dans ce que nous allons dire. Cela posé.

1°. Si t & x, ou y & x, sont les variables de l'équation de la Courbe OEZ proposée à décrire; il n'y a qu'à considérer que l'équation générale $zc=bx$ de l'art. 3. donne $x=\frac{zc}{b}$, & $dx=\frac{cdz}{b}$: Car la substitution de ces valeurs de x & de dx à la place de ce qui s'en trouve dans l'équation donnée de la Courbe OEZ, changera cette même équation en une autre où il n'y aura de variables que t & z, ou y & z, avec leurs différences, si elle en a; & qui par conséquent sera l'équation de la Courbe génératrice HHV requise pour décrire la Courbe OEZ à la maniere de l'art. 1.

2°. Si dv se trouvoit avec une ou plusieurs des variables précedentes (j'y comprend aussi leurs différences, s'il y en a) dans l'équation donnée de la Courbe OEZ proposée à décrire; il n'y auroit alors qu'à substituer dans cette équation la valeur de dv qui résulte de l'Analogie CB (a). CE (y) :: Bb (dx). EF $(dv) = \frac{ydx}{a}$.

Et

Et pour lors n'y restant plus de variables que t & x, ou y & x, cette équation sera dans le cas précedent (*n.* 1.); ainsi il n'y aura qu'à en chasser x & dx par la substitution de leurs valeurs $\frac{cz}{b}$, $\frac{cdz}{b}$, résultantes de l'équation générale $cz = bx$ de l'art. 3. pour avoir celle de la Courbe cherchée *HHV* génératrice de la Courbe *OEZ* qu'on veut décrire.

EXEMPLE I.

LXIV. 1°. Soit $px = tt$ l'équation de la Courbe *OEZ* proposée à décrire. Cette équation donnera $x = \frac{tt}{p}$. Mais l'équation générale $zc = bx$ de l'art. 3. donne aussi $x = \frac{zc}{b}$. Donc $\frac{zc}{b} = \frac{tt}{p}$, ou $\frac{cpz}{b} = tt$ sera l'équation de la Courbe *HHV* génératrice de la Courbe *OEZ* à décrire à la maniere de l'art. 1. Ce qui fait voir que cette génératrice *HHV* doit être ici une Parabole ordinaire touchée en son sommet *A* par la droite *AC*.

Premier exemple des Courbes à décrire par le moyen de l'art. 1.

Cette Parabole ainsi trouvée, étant décrite, l'article premier fait voir que si l'on prend l'arc *AMB* à une ordonnée quelconque *HG* de cette Parabole, comme la circonférence entiere *ABYA* (c) est à la droite constante *AD* (b), & qu'après avoir tiré la droite *CB*, on fait (du centre *C*) l'arc circulaire *GE* qui rencontre cette droite *CB* en *E*; ce point *E* sera un de ceux de la Courbe *OEZ* à décrire.

En effet puisque (*constr.*) *AMB* (x). *HG* (z) :: *ABYA* (c). *AD* (b). L'on aura $x = \frac{zc}{b}$. Donc en substituant x au lieu de cette valeur dans l'équation $\frac{cpz}{b} = tt$ de la Parabole génératrice *HHV*, il en résultera $px = tt$ pour l'équation de la Courbe *OEZ* ainsi décrite par le moyen de cette Parabole génératrice *HHV*. Par conséquent cette équation $px = tt$ étant la même que celle de la

Courbe proposée à décrire, il s'ensuit que cette Courbe est aussi celle qui vient d'être décrite.

2°. Si au lieu de $px = tt$, on eût donné $px = \overline{a-y}^2$ pour l'équation de cette même Courbe *OEZ*; l'on auroit eu $pdx = \overline{2a-2y} \times -dy = 2ydy - 2ady$, ou $dx = \frac{2ydy - 2ady}{p}$ (à cause de $a-y=t$, ou $y-a=-t$, & $dy=-dt$) $= \frac{-2t \times -dt}{p} = \frac{2tdt}{p}$. Mais l'équation générale $zc = bx$ de l'art. 3. donne aussi $dx = \frac{cdz}{b}$. Donc $\frac{cdz}{b} = \frac{2tdt}{p}$; & (en intégrant) $\frac{pcz}{b} = tt$ sera l'équation de la Courbe *HHV*, laquelle par conséquent sera encore la génératrice de *OEZ* à la maniere de l'art. 1.

Il est à remarquer que cette Courbe OEZ *est encore la Parabole hélicoide de M. Bernoulli Professeur à Bâle, dont nous avons parlé cy-dessus art.* 38.

EXEMPLE II.

Second exemple des Courbes à décrire par le moyen de l'art. 1.

LXV. Soit de même $dx = \frac{adt\sqrt{et-ee}}{ae-et}$ l'équation de la Courbe *OEZ* proposée à décrire. L'équation générale $zc = bx$ de l'art. 3. donnant aussi $dx = \frac{cdz}{b}$, l'on aura tout d'un coup $\frac{cdz}{b} = \frac{adt\sqrt{et-ee}}{ae-et}$, ou $dz = \frac{abdt\sqrt{et-ee}}{ace-cet}$ pour l'équation de la Courbe *HHV* génératrice de *OEZ* à la maniere de l'art. 1.

On décrira présentement cette Courbe comme l'on vient de faire celle du précédent exemple premier, article 64.

Il est aussi à remarquer que cette Courbe *OEZ* est la Paracentrique, elle-même, qu'on a démontrée dans les Memoires de 1703. pag. 146. &c. avoir son origine entre *A* & *C* sur *AC*, & devoir faire une infinité de revolutions autour du centre *C* avant que d'y arriver : il n'y a

de difference entre l'équation qu'on en donne ici, & celle qui s'en trouve dans la page 146. de ces Memoires, qu'en ce qu'on appelle ici x, y, t, a, e, c, b, z, ce qu'on appelle-là z, y, x, c, a, e, g, k. La substitution de ces dernieres grandeurs à la place des premieres qui leur répondent, dans l'équation de la Courbe génératrice *HHV* qu'on vient de trouver, la rendroit aussi la même que celle de la génératrice de la seconde description qui se trouve de la précédente Paracentrique dans la page 149. des Mémoires dont on vient de parler.

EXEMPLE III.

LXVI. Soit aussi $dv = \frac{\overline{a-t} \times dt}{\sqrt{2at+2pt-tt}}$ l'équation d'une Courbe *OEZ* proposée à décrire. Il suffit de considérer que $CB\ (a).\ CE\ (y) :: Bb\ (dx).\ EF\ (dv) = \frac{ydx}{a}$. Et que l'égalité générale $zc = bx$ de l'art. 3. donnant $dx = \frac{cdz}{b}$, l'on aura $dv = \frac{ycdz}{ab}$ (*art.* 63.) $= \frac{\overline{a-t} \times cdz}{ab}$. Car la substitution de cette derniere valeur de dv dans l'égalité proposée, la changera en $\frac{\overline{a-t} \times cdz}{ab} = \frac{\overline{a-t} \times dt}{\sqrt{2at+2pt-tt}}$, ou en $dz = \frac{abdt}{c\sqrt{2at+2pt-tt}}$, qui sera celle de la génératrice *HHV* propre à décrire à la maniere de l'art. 1. la Courbe *OEZ* proposée : Cette description se fera encore comme celle de l'exemple 1. art. 64. *Troisième exemple des Courbes à décrire par le moyen de l'art. 1.*

AVIS.

LXVII. Quelque facile que paroisse la méthode de l'art. 1. pour la construction des Courbes dont les ordonnées concourent en un même point, il faut cependant avoüer qu'il y a des cas où il s'en trouve de beaucoup plus faciles : Par exemple, en voici une pour construire la *La méthode de l'art. 1. pour la description des Courbes dont les ordonnées concourent en quelque point que ce soit, est générale, mais*

elle n'est pas toûjours la plus simple ni la plus facile. Courbe OEZ du dernier exemple 3. beaucoup plus simple & plus facile que celle du précédent art. 66.

FIG. XIII. En effet l'équation $dv = \frac{a-t \times dt}{\sqrt{2at+2pt-tt}}$ de cette Courbe OEZ, donnant $\frac{adv}{a-t}(Bb) = \frac{adt}{\sqrt{2at+2pt-tt}}$, il est visible que l'on aura aussi $Bb = \frac{a}{a+p} \times \frac{a+p \times dt}{\sqrt{2at+2pt-tt}}$. Or si l'on prend $CR = p$; que du centre R, & du rayon AR $(a+p)$, on décrive le demi-cercle AVK, avec une de ses ordonnées quelconque GL; & que de l'extrémité l de son élément Ll on suppose lN parallele à AK, laquelle rencontre GL prolongée en N: l'on aura GL $(\sqrt{2at+2pt-tt})$. LR $(a+p)$ :: $Nl(dt)$. $lL = \frac{a+p \times dt}{\sqrt{2at+2pt-tt}}$. Donc $Bb = \frac{a \times lL}{a+p} = \frac{AC \times Ll}{AR}$; & (en intégrant) $AB = \frac{AC \times AL}{AR}$. Ce qui donne enfin AL. AB :: AR. AC. c'est-à-dire, les secteurs correspondans ARL & ACB par tout semblables entr'eux. D'où l'on voit qu'en prenant deux angles quelconques ARL & ACB égaux entr'eux, si après avoir fait l'ordonnée LG, on décrit du centre C par G l'arc GE qui rencontre le rayon CB en E, ce point E sera un de ceux de la Courbe à décrire OEZ, dont on voit que le contour doit être $AOEZCDK$ en forme de B. *Ce qu'il faloit trouver.*

On voit, dis-je, combien cette méthode est plus simple & plus aisée que celle de l'article premier, employée dans l'article 66. &c. Mais aussi en récompense celle de l'article premier est-elle beaucoup plus universelle en ce qu'elle peut servir à la construction de toutes les Courbes d'ordonnées concourantes, au lieu que celle du présent article 67. ne convient qu'à la Courbe de cet Article. Je finis par quelques Remarques sur cette méthode générale de l'article premier, & sur quelques autres qu'elle m'a fait encore imaginer pour la formation de toutes sortes de Spirales à l'infini.

REMARQUES

Sur différentes Formations générales de Spirales à l'infini.

Moyen général de former des Spirales, différent de celui de l'art. 1.

LXVIII. On a vû cy-dessus (*art.* 38.) la maniere dont M. Bernoulli Professeur à Bâle, a formé sa Parabole hélicoide dans les Actes de Leipsik de 1691. pag. 14. Il est visible qu'on pourroit aussi former autant d'autres Spirales qu'on peut imaginer d'autres Courbes au lieu de sa Parabole, roulées comme elle : c'est-à-dire, dont l'axe fut roulé en tant de révolutions qu'on voudroit sur la circonférence d'un cercle quelconque *ABYA*; ayant ses abscisses en *AMB* (x), dont l'origine est en *A*; & ses ordonnées *BE*, tendantes toutes au centre *C* de ce cercle, ou directement à contre-sens. Il est, dis-je, visible que toutes les Spirales *OEZ* formées par les extrémités *E* de toutes ces ordonnées, seroient aussi différentes entr'elles que tout ce qu'on peut imaginer de Courbes ainsi roulées. FIG. XIV.

Tout ce qui se peut former de Spirales par ce moyen, se peut aussi former par celui de l'art. 1.

LXIX. Mais toutes ces Spirales se peuvent encore trouver aisément par la méthode de l'art. 1. en imaginant du centre *C* par tout ces points *E*, autant d'arcs de cercles *EG*, qui rencontrent *AC* prolongée vers *X*, *x*, en autant de points *G*, desquels soient élevées autant de perpendiculaires *GH* sur cet axe *Xx*, lesquelles soient chacune à une droite constante *AD*, comme l'abscisse correspondante *AMB* ou $nc+AMB$ de tant de révolutions qu'on voudra, est à la circonférence (c) du cercle *ABYA*, sur laquelle circonférence on suppose que la génératrice, à la maniere de M. Bernoulli, a son axe roulé. Car il est manifeste que la Courbe *HHV* qui passera par tous les points *H* ainsi trouvés, sera la génératrice de toutes ces Spirales à la maniere de l'article premier.

LXX. Il est aussi fort aisé de trouver l'équation de *Maniere de pas-*

ser des génératrices du précédent art. 68. à celles de l'art 1. pour la description des mêmes Spirales.

cette génératrice à la maniere de l'art. 1. par l'équation de l'autre génératrice à la maniere de M. Bernoulli. Car si outre les noms de l'art. 2. on appelle v, les ordonnées BE de cette seconde génératrice roulée, dont les abscises sont (*hyp.*) AMB ou $nc + AMB = x$; on trouvera $v = \pm a \mp y$. Ainsi l'équation donnée de cette Courbe roulée, donnant v en x & en constantes, il en résultera une troisiéme équation de $\pm a \mp y$ avec cette valeur de v, dans laquelle équation il n'y aura plus de variables que des x & des y ; & qui par conséquent donnera de même x en y & en constantes, laquelle valeur de x étant substituée dans l'égalité générale $cz = bx$ (*art.* 3.) des Spirales engendrées comme dans l'article premier, la changera en celle de la Courbe HHV requise pour décrire à la maniere de l'article premier la Spirale proposée.

Exemple. Soit cette Spirale, *la Parabole hélicoide* de M. Bernoulli, engendrée à sa maniere par une Parabole ordinaire, laquelle ayant son axe roulé sur la circonférence du cercle $ABYA$, ait son sommet en A, AMB (x) pour ses abscisses, BE (v) pour ses ordonnées tendantes au centre C de ce cercle, & son parametre $= l$. L'équation de cette Parabole sera $xl = vv$, ou $v = \sqrt{xl}$. Ainsi ayant déja (*hyp.*) $v = a \mp y$, l'on aura aussi $\overline{a \mp y} = \sqrt{xl}$, ou $xl = \overline{a \mp y}^2$; d'où résultera de même $x = \frac{\overline{a \mp y}^2}{l}$. Donc ayant d'ailleurs (*art.* 3.) $cz = bx$, & par conséquent aussi $x = \frac{cz}{b}$; l'on aura enfin $\frac{cz}{b} = \frac{\overline{a \mp y}^2}{l}$, ou $\frac{czl}{b} = \overline{a \mp y}^2$ pour l'équation de la Courbe HHV propre à engendrer à la maniere de l'art. 1. la Parabole hélicoide de M. Bernoulli: aussi cette équation est-elle la même que celle qui résulte de l'équation parabolique générale $\overline{a \mp y}^m = zp^{m-1}$ de l'art. 38. qu'on a déja vû dans ce même article, devoir engendrer cette Spirale à la maniere de l'art. 1. en faisant $m = 2$. En effet cette équation générale de la Courbe

HHV, se réduit-elle alors à cette particuliere $\overline{a+y}^2 = zp$, dont le parametre p doit être ici $= \frac{cl}{b}$ pour avoir à la maniere de l'árt. 1. la même Spirale numeriquement que M. Bernoulli a trouvée par la sienne. Et ainsi de telle autre Spirale qu'on voudra rapporter de la maniere de M. Bernoulli à celle de l'art. 1.

LXXI. On a vû à la fin de l'art. 3. que cette maniere de l'art. 1. quelque générale qu'elle soit, le peut encore devenir quelquefois davantage en faisant $zc^\pi = bx^\pi$ au lieu de $zc = bx$ dans cet art. 3. En voici quelques exemples.

Comparaison de deux équations de Spirales en général, résultantes de l'art. 1.

1°. L'équation $zc^\pi = bx^\pi$ donnant $z = \frac{bx^\pi}{c^\pi}$, si l'on introduit cette valeur de z dans l'équation génératrice circulaire $z = \sqrt{2ry - yy}$ de l'art. 44. l'on aura $\frac{bx^\pi}{c^\pi} = \sqrt{2ry - yy}$, ou $bbx^{2\pi} = 2ryc^{2\pi} - yyc^{2\pi}$ pour l'équation des Spirales circulaires qui en doivent résulter à la maniere de l'art. 1. qui donneroit alors $\overline{ABYA}^\pi (c^\pi) . \overline{AMB}^\pi$ ou $\overline{ABYAMB}^\pi (x^\pi) :: AD(b) . GH(z)$. De sorte qu'en prenant $\pi = 1$, il en résulteroit $\frac{bx}{c} = \sqrt{2ry - yy}$ pour l'équation de la Spirale circulaire particuliere de l'article 44. comme dans cet Article.

2°. De même si l'on prend ici l'équation $\frac{dz}{b} = -\frac{dy}{y}$ de l'article 49. pour génératrice de la Spirale à trouver par le moyen de l'équation $zc^\pi = bx^\pi$, en s'en servant encore comme l'on a fait de $zc = bx$ dans cet article 49. Cette équation générale $zc^\pi = bx^\pi$ donnant $dz = \frac{\pi bx^{\pi-1}dx}{c^\pi}$, l'on auroit ici $\frac{\pi bx^{\pi-1}dx}{bc^\pi} = -\frac{dy}{y}$ pour l'équation de la Spirale cherchée, au lieu de l'équation $\frac{bdx}{bc} = -\frac{dy}{y}$ à la Spirale logarithmique ordinaire, que $zc = bx$ donnoit là, & qu'on voit n'être encore qu'un cas de celle qu'on

vient de trouver ; puisqu'en faisant $\pi = 1$, son équation $\frac{\pi b x^{\pi - 1} dx}{b c^{\pi}} = -\frac{dy}{y}$ se changera en $\frac{b\,dx}{bc} = -\frac{dy}{y}$ qui est celle de cette Spirale logarithmique ordinaire.

Et ainsi de plusieurs autres Spirales où l'équation générale $zc^{\pi} = bx^{\pi}$ doit porter une universalité beaucoup plus grande que ne feroit $zc = bx$.

Continuation de la comparaison précédente.

LXXII. Il est pourtant à remarquer que cette équation générale $zc^{\pi} = bx^{\pi}$ substituée à la place de $zc = bx$, ne produit pas toûjours ce surcroît d'universalité, ainsi qu'on en a averti à la fin de l'art. 3. & qu'on le vient encore d'insinuer au commencement & à la fin du précédent art. 71. par les mots de *quelquefois* & de *plusieurs*.

En effet 1°. si l'on prend encore la logarithmique génératrice du second exemple de cet article 71. n. 2. pour génératrice de celui-ci, en y prenant seulement son asymptote pour son axe, ainsi que dans l'art. 53. au lieu que cydessus (*art* 71. *n.* 2) c'étoit une de ses ordonnées à son asymptote qu'on prenoit pour son axe, comme dans l'art. 49. En ce cas l'équation de cette logarithmique génératrice étant $\frac{dz}{z} = -\frac{dy}{b}$ comme dans l'art. 53. Et l'équation générale $zc^{\pi} = bx^{\pi}$ donnant $z = \frac{bx^{\pi}}{c^{\pi}}$, & $dz = \frac{\pi b x^{\pi - 1} dx}{c^{\pi}}$: la substitution de ces valeurs de z & de dz dans l'équation génératrice $\frac{dz}{z} = -\frac{dy}{b}$, donnera $-\frac{dy}{b} = \frac{\pi b x^{\pi - 1} dx}{b x^{\pi}} = \frac{\pi dx}{x}$, ou $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{\pi b}$ pour celle de la Spirale cherchée; laquelle on voit être encore une Spirale logarithmique de même nature que celle que la même génératrice a engendrée dans l'art. 53. par le moyen de $zc = bx$. Ainsi $zc^{\pi} = bx^{\pi}$ ne produit rien ici de plus général que $zc = bx$, l'inégalité des constantes b & πb n'y faisant rien.

Pareillement 2°. si l'on prend l'équation parabolique $z = \frac{y^m}{c^{m-1}}$ de l'art. 13. pour la génératrice de la Spirale à trouver

trouver par le moyen de l'équation générale $zc^r = bx^r$; cette équation donnant $z = \frac{bx^r}{c^r}$, l'on aura $\frac{y^m}{a^{m-1}} = \frac{bx^r}{c^r}$, ou $c^r y^m = bx^r a^{m-1}$ pour l'équation de cette Spirale. De sorte qu'en prenant $b = a$, comme dans l'art. 13. l'on aura $c^r y^m = x^r a^m$ pour l'équation de cette Spirale, laquelle on voit être celle de M. de Fermat, trouvée dans cet art. 13. par le moyen de $zc = bx$. Ainsi l'universalité de l'équation $zc^r = bx^r$ de l'art. 71. ne fait encore rien ici de plus que la simple $zc = bx$ de l'art. 3.

Je n'entrerai point dans un plus grand détail, ne m'étant déja que trop étendu sur cette matiere. Voici cependant encore une autre maniere de former des Spirales à l'infini, qui me vient en pensée, laquelle est encore plus générale que celle de l'art. 1. Je n'en dirai que deux mots : me réservant à la traiter plus à fond dans une autre occasion.

Troisième formation générale des Spirales à l'infini. FIG. XV.

LXXIII. Toutes choses demeurant les mêmes que dans l'art. 1. imaginons de plus une Courbe quelconque *LLS* mobile autour du centre *C*, avec la Regle *CP* qui en soit le diametre ou l'axe, & dont les ordonnées soient *EL* qui fassent tel angle donné qu'on voudra avec cette Regle. Presentement après avoir trouvé chaque point *E* comme dans l'art. 1. au lieu d'y faire passer la Spirale cherchée, comme dans cet article, imaginons qu'elle passe par les extremités *L* des ordonnées correspondantes *EL* de la Courbe *LLS*, que nous appellerons *seconde génératrice*, pour la distinguer de celle (*HHV*) dont nous nous sommes servis jusqu'ici, laquelle pour cet effet s'appellera *premiere génératrice*.

Il est visible que la Spirale *OLZLK*, qui en résultera, sera aussi très-universelle, & ce d'autant plus que sa seconde génératrice générale *LLS* se peut diversifier en autant de particulieres que sa premiere *HHV*, & avoir sur la Regle *CP* des positions aussi variables par rapport au centre *C*, que celles de *HHV* le sont sur *CX* par rapport à ce même point *C*.

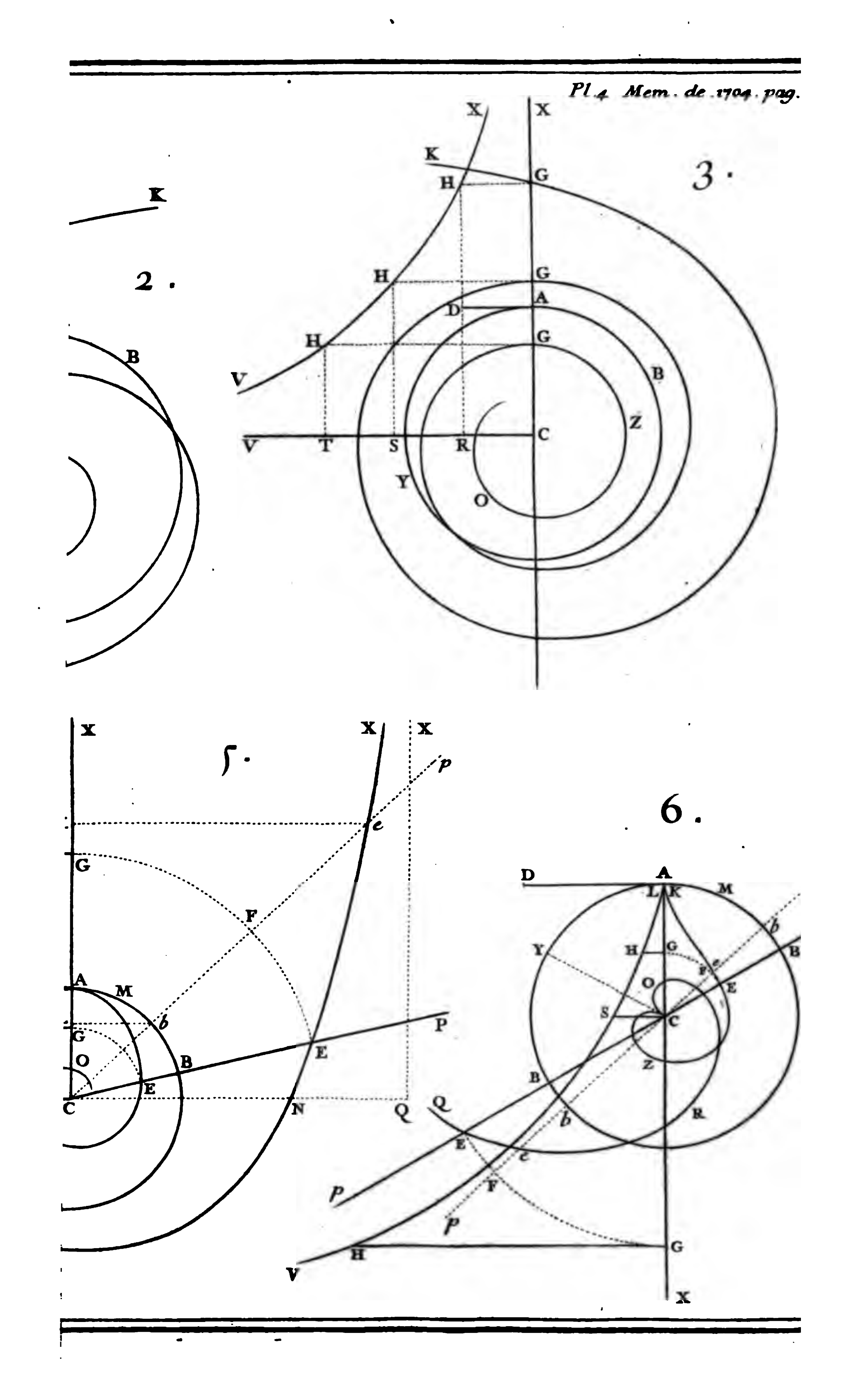
Maniere de trouver les équations des Spirales formées de cette troisiéme façon.

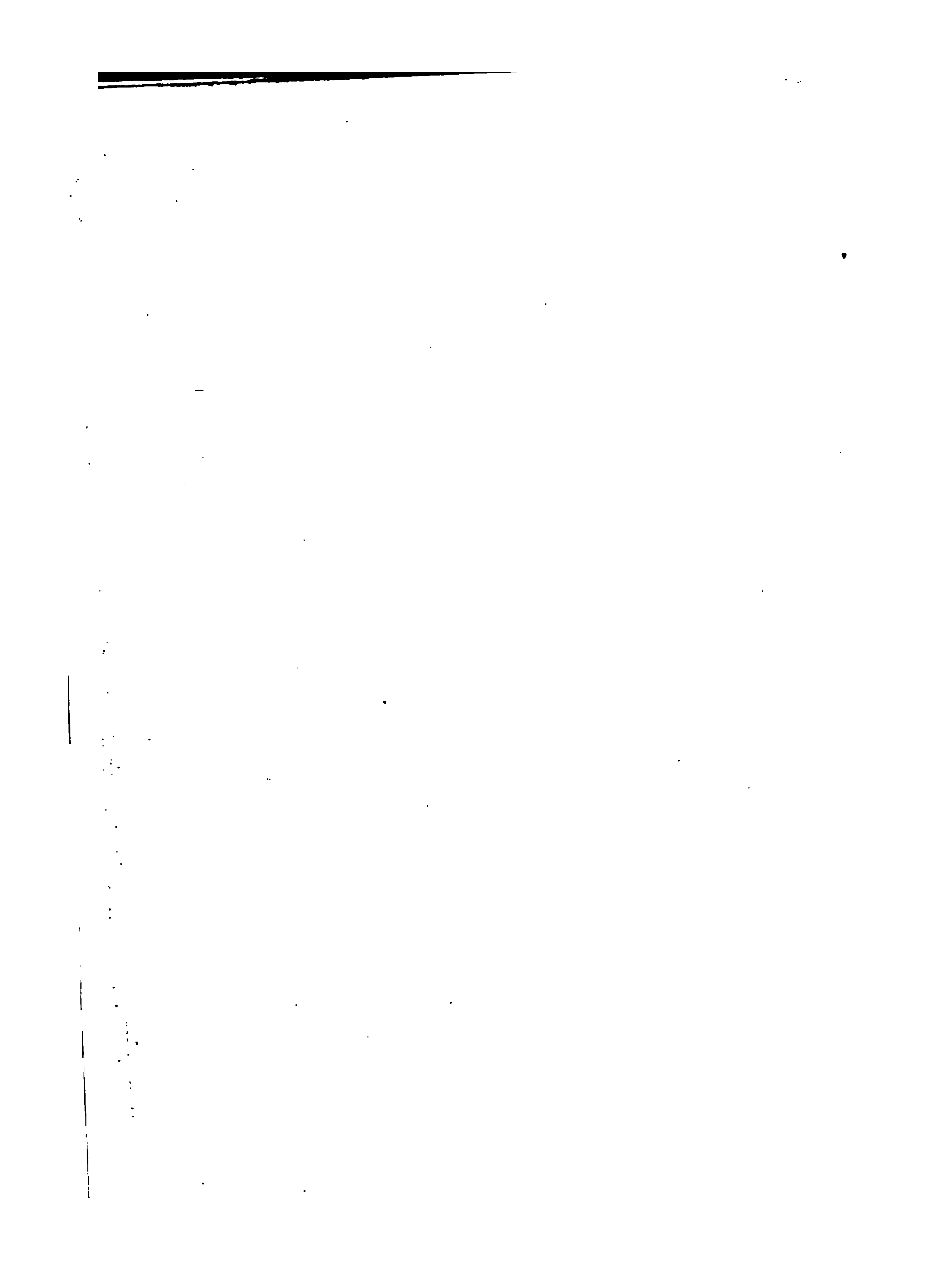
LXXIV. Les noms demeurant aussi les mêmes que dans l'art. 2. soient de plus les ordonnées $EL = v$. Il est encore manifeste que l'équation générale $zc = bx$ de l'art. 3. ou celle $zc^n = bx^n$ de l'art. 71. doit entrer dans celle de la Spirale $OLZLK$ dont il s'agit ici; puisque cette équation sert à trouver les points E.

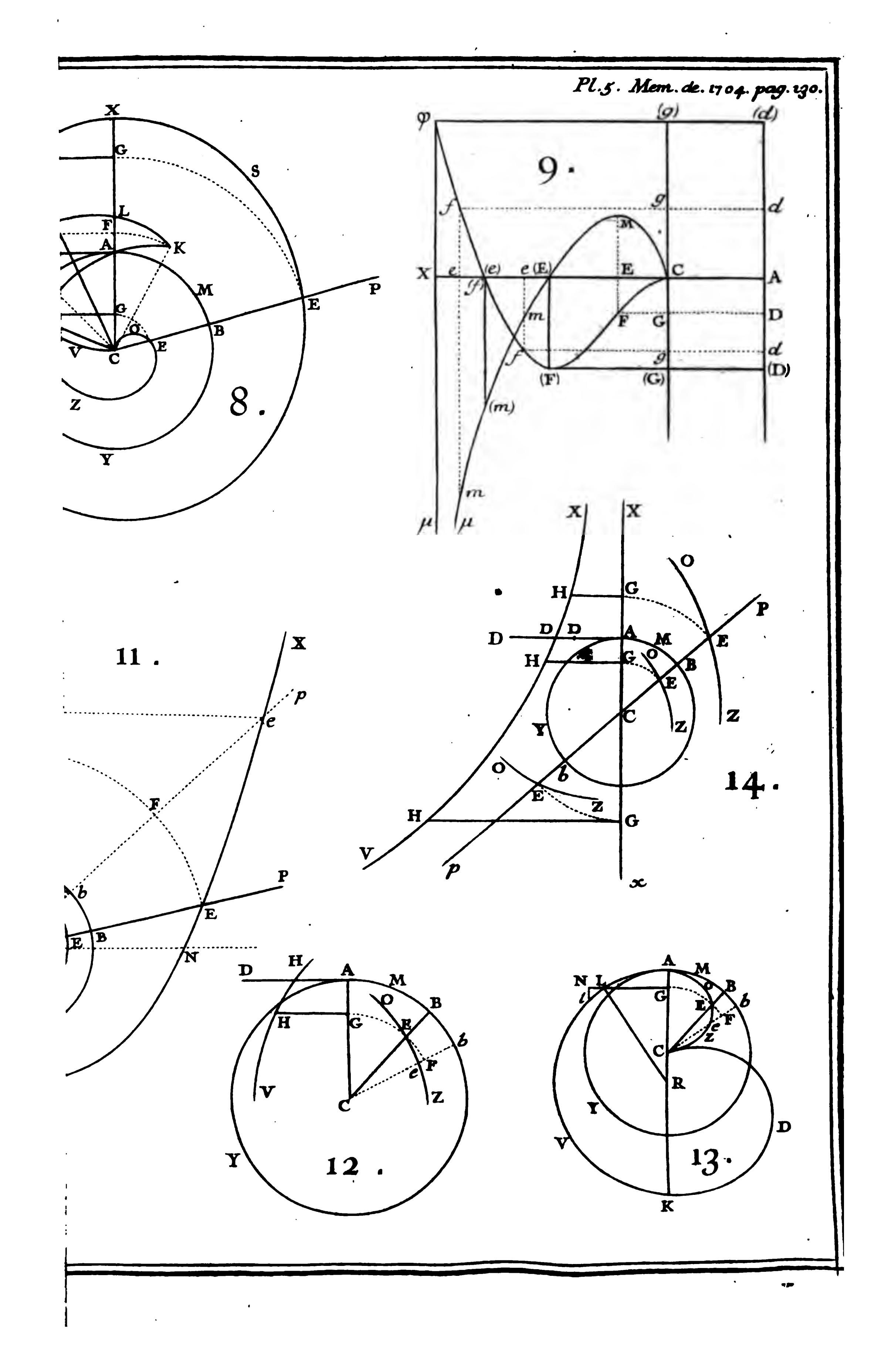
1°. Il en faut chasser z par la substitution de sa valeur en y & en constantes, laquelle valeur de z se tirera de l'équation donnée de la premiere Courbe génératrice HHV, comme l'on a fait cy-dessus pour trouver les équations particulieres des Spirales qu'on y a examinées. Ce qui donnera l'équation de celles qui passeroient par E à la maniere de l'art. 1. laquelle équation ne sera faite que de x, de y, & de constantes.

2°. Après cela l'équation donnée de la seconde génératrice LLS, donnant aussi y en v & en constantes, la substitution de cette valeur de y dans la derniere équation trouvée (*n.* 1) pour celle des Spirales qui passeroient par E, se changera enfin en celle des Spirales qui doivent passer par L, & avoir leurs raïons $CL = \sqrt{yy + vv}$. *Ce qu'il faloit trouver.*

Exemple. Soit encore $z = \frac{y^m}{a^{m-1}}$ le lieu parabolique général de la premiere Courbe génératrice HHV, comme dans l'art. 13. & le circulaire $y = r \pm \sqrt{rr - vv}$ pour celui de la seconde LLS. La substitution de cette valeur de z dans l'équation $zc = bx$ de l'art. 3. la changera en $\frac{cy^m}{a^{m-1}} = bx$ qui est celle de la Spirale de l'art. 13. de laquelle résulte $y = \frac{\overline{bxa^{m-1}}^{\frac{1}{m}}}{c^{\frac{1}{m}}}$, que la substitution de la valeur de y, donnée par l'équation de la seconde Courbe génératrice LLS, changera en $r \pm \sqrt{rr - vv}$ $= \frac{\overline{bxa^{m-1}}^{\frac{1}{m}}}{c^{\frac{1}{m}}}$, ou $rc^{\frac{1}{m}} \pm c^{\frac{1}{m}} \sqrt{rr - vv} = \overline{bxa^{m-1}}^{\frac{1}{m}}$,


2.
3.
ſ.
6.





8.
9.
11.
12.
13.
14.

qui est l'équation cherchée de la Spirale $OLZLK$. Et ainsi des autres.

J'aurois encore bien des choses à dire sur cette derniere génération de Spirales : ce sera pour un autre Mémoire, celui-ci n'étant déja que trop long.

OBSERVATION D'UNE NOUVELLE TACHE DANS LE SOLEIL.

PAR M. MARALDI.

OUtre les trois differentes Taches qui ont paru au mois de Janvier & de Fevrier de cette année 1704, il en a paru une autre au mois de Mars. Nous commençâmes de la voir le 19 de Mars à 8 heures du matin proche du bord Oriental du Soleil. Nous déterminâmes aussi tôt sa situation dans le Soleil par les fils qui se croisent au foyer de la Lunette, & qui font entr'eux des angles de 45 degrez. La difference d'ascension droite entre le bord Oriental & la Tache étoit de 15 secondes de temps, & la difference de déclinaison entre la Tache & le bord Septentrional étoit de 50 des mêmes parties. 1704. 5. Avril.

La Tache vûë avec une Lunette de 18 pieds étoit composée de deux Taches obscures un peu distantes l'une de l'autre, & envelopées dans la même nebulosité. Le 20. à 10 heures le Soleil s'étant découvert, la difference d'ascension droite entre le bord Orientale & la Tache fut de 27 secondes, & la difference de déclinaison fut de 53" ½. Le 21 à 8 heures & demi la difference d'ascension droite entre le bord Oriental & la Tache fut de 38", & la differencle de declinaison entre le bord Septentrional & la Tache de 57". La figure de la Tache étoit à peu près com-

me les jours precedens, excepté qu'on voyoit une petite Tache adherante à la nebulosité qui n'avoit point paru le jour precedent. Le 22 & le 23 Mars le Ciel fut couvert. Le 24 la Tache étoit diminuée. A 2 heures ¼ la difference d'ascension droite entre le bord Oriental & la Tache fut 1′ 20″, & la difference de declinaison entre le bord Meridional & la Tache de 52″ de temps. Par cette observation on trouve que la Tache passa par le milieu du Soleil le matin du 23 fort près de son centre apparent. Les jours suivans on ne pût plus voir la Tache, à cause qu'elle étoit diminuée, & que le Ciel ne fut pas bien clair. Cette Tache étoit dans l'émisphere Meridional du Soleil où se trouvent presque toutes les Taches qui ont paru depuis trente ans : elle avoit aussi une latitude Meridionale de 10 degrez, comme la plûpart des Taches qui paroissent depuis plusieurs années.

COMPARAISON

Des Observations de M. Manfredi avec les nôtres.

PAR M. MARALDI.

1704. 5. Avril. MOnsieur Manfredi nous a envoyé les observations des Taches du Soleil qu'il a faites à Bologne les mois precedens, & ayant comparé ces observations avec celles que nous avons faites à l'Observatoire, on trouve qu'une Tache que M. Manfredi observa le 21 Decembre 1703, & qui ne pût être observée à Paris à cause que le Ciel fut couvert depuis le 17 jusqu'au 25 Decembre, est la même Tache que nous observâmes proche du bord Oriental du Soleil le 7 de Janvier ; car si l'on compare la situation qu'avoit la moyenne des trois Taches qu'il observa proche du bord Occidental du Soleil, en supposant la révolution des Taches de 27 jours & demi, on trouve

que cette Tache après avoir parcouru l'émisphere superieur du Soleil, devoit se trouver à l'endroit où nous observâmes celle qui parût près du bord Oriental du Soleil le 7 Janvier. M. Manfredi trouva à la Tache du 21 Decembre une latitude Meridionale de 10 à 11 degrez, qui est celle que nous trouvâmes à la Tache du 7 Janvier. C'est pourquoy ces deux déterminations étant les mêmes, il n'y a pas lieu de douter qu'elle ne soit la même Tache qui est retournée. C'est aussi ce que M. Manfredi supposa lorsqu'il la vit le 12 de Janvier fort près du milieu du Soleil, ne l'ayant pas pû voir auparavant à cause des nuages. Ayant continué les observations de cette Tache autant que le tems le permit, il cessa de la voir fort proche du bord Occidental du Soleil le 12 de Janvier, qui fut aussi le dernier jour que nous l'observâmes, étant passée le jour suivant dans l'émisphere superieur du Soleil. Cette Tache retourna quatorze jours après au bord Oriental du Soleil; mais elle étoit si fort diminuée qu'elle ne pût être observée à Paris & à Bologne avec des Lunettes ordinaires, que lorsqu'elle étoit éloignée du bord du Soleil, & approchoit du milieu de son disque. Elle fut encore observée à Paris & à Bologne le 9 de Fevrier, ayant passé le milieu du Soleil où elle disparut entierement, ayant fait presque deux révolutions entieres autour du Soleil depuis la premiere observation que M. Manfredi en fit le 21 Decembre 1703.

La Tache que M. Manfredi observa le 25 Janvier près du bord Oriental du Soleil, & que nous ne pûmes voir que le 26 à cause du temps couvert, est celle que nous avions observée le 7 de Janvier proche du bord Occidental. Les observations qu'il a faites jusqu'à sa sortie du Soleil s'accordent avec les nôtres; car par l'observation qu'il fit de la Tache le 31 Janvier à 10 heures du matin, on trouve qu'elle étoit arrivée 9 heures auparavant au milieu du Soleil, comme nous avions trouvé par l'observation du 30. Il donne aussi à la Tache une latitude Meridionale de 11 à 12 degrez, comme nous la déterminâmes par nos observations.

Nous observâmes aussi le 10 Fevrier à midi les nouvelles Taches que nous n'avions point vû le 9, ni le matin du 10, que nous observâmes le Soleil au travers des nuages rares. Le premier jour que ces Taches parurent il n'y en avoit que deux: les jours suivans on en remarqua trois. Nous avons trouvé ces dernieres dans un parallele qui décline de l'équateur du Soleil de 13. degrés vers le midy.

Ces Taches ont été aussi observées à Gennes par M. le Marquis Salvago, à Marseille par le P. de la Val Jesuite & Professeur d'Hydrographie, à Montpellier par M. Plantade Conseiller à la Cour des Aydes & par M de Clapier, & à Lyon par les PP. Fulchiron & Thyoli, qui nous ont envoyé leurs observations.

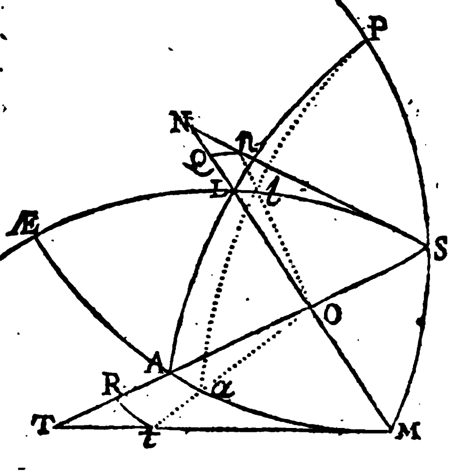
DÉTERMINATION

Du tems auquel le mouvement du Soleil en longitude est égal à son mouvement en ascension droite.

PAR M. PARENT.

1704. 9. Avril.

SOit *P* le pôle de la sphere, *PSM* un quart du colûre des solstices, *ÆLS* un quart de l'écliptique, *ÆAM* un quart de l'équateur, *Æ* l'équinoxe, *S* le solstice. *L* le lieu du Soleil dans l'écliptique au temps de son mouvement médiocre en ascension droite qui est le tems desiré. *PLA* le quart d'un cercle de déclinaison mené du pôle *P* par le Soleil *L* jusques à l'équateur en *A*, *Pla* le quart d'un pareil cer-



cle rencontrant l'écliptique au point l indéfiniment proche de L, & l'équateur en a; soient conçûës aussi les tangentes SN, MT à l'écliptique & à l'équateur au solstice S, & au point M de 90^d de l'équateur, lesquelles rencontrent les rayons Ol, OL, Oa, OA, menés du centre O de la sphere & prolongés indéfiniment aux points n, N, t, T.

Soit nommé a le sinus de l'arc PS complément de l'obliquité SM de l'écliptique; r le rayon OS, OL, OA, OM de la sphere; x la tangente SN; & Nn, dx.

Menant donc encore nQ perpendiculaire à NO, on aura les triangles rectangles semblables nNQ, ONS; ce qui donnera les analogies ($Nn \mid nQ \parallel NO \mid OS$][$nO \mid lO \parallel nQ \mid Ll$). Donc aussi ($Nn \mid Ll \parallel NO^2 = OS^2 + NS^2 \mid OS^2$) ou ($dx \mid Ll \parallel r^2 + x^2 \mid r^2$). D'où l'on tire ($Ll = \frac{dxr^2}{r^2+x^2}$).

Menant de même la perpendiculaire tR sur OT en R, on aura l'analogie ($Tt \mid Aa \parallel TO^2 = OM^2 + TM^2 \mid OM^2$). Or on sçait par les analogies des triangles sphériques rectangles que (le sinus de l'arc $PS = a$, est au sinus total $= r$, comme la tangente de l'arc LS, sçavoir $NS = x$, est à la tangente de l'arc AM, sçavoir TM). Ce qui donne ($TM = \frac{rx}{a}$), & ($Tt = \frac{rdx}{a}$), d'où l'on tire l'analogie ($Tt = \frac{rdx}{a} \mid Aa = Ll$ (par la supposition) $= \frac{dxr^2}{r^2+x^2} \parallel OM^2 + TM^2 = \frac{a^2r^2 + x^2r^2}{a^2} \mid r^2 = OM^2$), qui fournit l'égalité suivante ($ar^2 + ax^2 = a^2r + rx^2$) qui se change en cette autre ($rx^2 - ax^2 = ar^2 - a^2r$), en divisant le tout par ($r - a$) il reste enfin ($ar = x^2$).

D'où l'on conclud que la tangente x ou SN de la distance du solstice S au point L du mouvement mediocre en ascension droite, est moyenne proportionnelle entre le rayon de la sphere, & le sinus du complément de l'obliquité de l'écliptique.

Ajoûtant donc le logarithme du sinus de $66^d\ 31'$ complément de la plus grande déclinaison du Soleil, sçavoir

99624527 au logarithme du sinus total qui est 100000000, & prenant la moitié de la somme de 199624527, sçavoir 99812263½, on aura le logarithme de la tangente d'un arc qui est le complément de 46ᵈ 14'; ce qui fait voir que quand le Soleil a 46ᵈ 14' de longitude, son mouvement sur l'écliptique est alors égal à son mouvement en ascension droite.

Ceci peut donc servir à corriger quelques Tables Astronomiques qui pechent contre ce calcul, mettant le Soleil vers le 44 ou 45 degré de longitude au tems de son mouvement mediocre. Voyés les Tables du Traité de Navigation de M. Bouguer.

DÉMONSTRATION

Du Principe de M. Hugens, touchant le centre de Balancement, & de l'identité de ce centre avec celui de percussion.

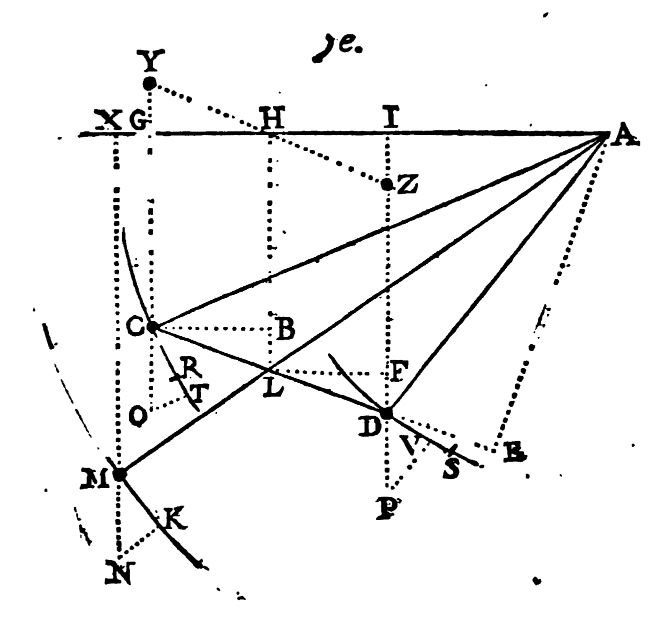
PAR M. BERNOULLI Professeur à Bâle.

Lettre du 3. Avril 1704.

1704. 19. Avril. APrès la démonstration de la doctrine du centre de Balancement que je donnai l'année passée à l'Académie, * par un principe incontestable tiré de la nature du Levier, il me sera presentement facile, en retournant sur mes pas, de démontrer la verité du Principe de M. Hugens, qui peut-être sans cette démonstration seroit plus sujet à être contesté : sçavoir que *le centre commun de gravité des parties d'un Pendule, qui descendent conjointement & remontent ensuite séparément chacune avec sa vitesse acquise, doit remonter précisément à la même hauteur dont il est descendu.*

* *Voyez les Mémoires de 1703 pag. 78.*

Pour



Pour cet effet soit la Figure que voici repetée de mon Mémoire du 13 Mars de l'année passée, presenté à l'Académie le 25 Avril de la même année. Soit, dis-je, encore *A* l'axe horizontal du balancement; *AXM* un plan vertical droit à l'axe; *AM* le diamétre de la figure qui balance, auquel on ait appliqué dans le même plan l'ordonnée *CLD* à angle donné *ALD*, en sorte que *CL* soit égale à *LD*, & dont *C*, *D*, soit deux petites parcelles de la figure, qui décrivent dans leur balancement les arcs *CT*, *DS*; soit aussi *AM* la longueur du pendule simple qui fait ses vibrations dans le même tems que la figure. Soient de plus les verticales *MX*, *CY*, *LH*, *DI*, lesquelles rencontrent l'horizontale *AX* en *X*, *G*, *H*, *I*; & sur lesquelles prolongées de haut en bas, soient prises des parties infiniment petites & égales *MN*, *CO*, *DP*, qui expriment chacune ce que la pesanteur ajoûte d'impulsion à chaque moment à chacun des poids *M*, *C*, *D*. Ensuite après avoir mené les droites *NK*, *OT*, *PV*, perpendiculaires aux arcs *MK*, *CT*, *DV*, soient *CB*, *LF* perpendiculaires sur *LH*, *DI*, & le reste comme on le voit dans la Figure.

Quant aux noms, ſoient encore comme dans le Mémoire du 25 Avril 1703, pag. 83. $MN = CO = DP = a$ ſinus total, le ſinus de l'angle $LAE = g$, $AC = l$, $AD = m$, $AM = t$, $AL = x$, $LC = LD = y$, $C = D = dp$. D'où l'on a trouvé dans ce Mémoire $LE = \frac{gx}{a}$, $ll\,(\overline{AC}^2) = xx + yy + \frac{2gxy}{a}$, $mm\,(\overline{AD}^2) = xx + yy - \frac{2gxy}{a}$, & enfin $t = \frac{\sqrt{xx+yy}\, x\, dp}{\int x\, dp}$.
Outre ces noms ſoient auſſi $NK = c$, & le ſinus de l'angle $LCB = e$.

Cela fait, ſuppoſons que le diamétre de la figure qui balance (ainſi que le pendule ſimple iſochrone) ſoit deſcendu de AX en AM, & que les poids M, C, D, &c. s'étant enſuite détachés enſemble, remontent ſéparément chacun avec ſa vîteſſe acquiſe. Il eſt clair que le poids M du pendule ſimple doit remonter à la même hauteur MX d'où il eſt deſcendu ; mais que les poids C & D remonteront à des hauteurs differentes, comme CY, DZ, leſquelles ſe trouveront de la maniere que voici.

$MN\,(a).\ NK\,(c) :: AL\,(x).\ LH = \frac{cx}{a} :: AM\,(t).\ MX = \frac{ct}{a}$.

$\overline{AM}^2\,(tt).\ \overline{AC}^2\,(ll) :: MX\,(\frac{ct}{a}).\ CY = \frac{cll}{at}$.

$\overline{AM}^2\,(tt).\ \overline{AD}^2\,(mm) :: MX\,(\frac{ct}{a}).\ DZ = \frac{cmm}{at}$.

Sin. tot. (a). ſin. ang. $LCB\,(e) :: LC$ ou $LD\,(y)$. LB ou $DF = \frac{ey}{a}$.

Ce qui donne
$$\begin{cases} CG = LH - LB = \frac{cx - ey}{a}. \\ DI = LH + DF = \frac{cx + ey}{a}. \\ GY = CY - CG = \frac{cll}{at} - \frac{cx + ey}{a}. \\ IZ = DI - DZ = \frac{cx + ex}{a} - \frac{cmm}{at}. \end{cases}$$

Donc le produit du petit poids C ou Y par GY ſera $= \frac{clldp}{at} - \frac{cxdp + eydp}{a}$, & celui du petit poids D ou Z par $IZ = \frac{cxdp + eydp}{a} - \frac{cmmdp}{at}$. Et par conſéquent la

somme de tous les produits de Y par GY (moment de tous les poids Y par rapport à la ligne AX) $= \int \frac{clldp}{at} - \int \frac{cxdp}{a} + \int \frac{cydp}{a} = \frac{c}{at} \int lldp - \frac{c}{a} \int xdp + \frac{c}{a} \int ydp$; Et la somme de tous les produits de Z par IZ (moment de tous les poids Z par rapport à la même ligne AX) $= \int \frac{cxdp}{a} + \int \frac{cydp}{a} - \int \frac{cmmdp}{at} = \frac{c}{a} \int xdp + \frac{c}{a} \int ydp - \frac{c}{at} \int mmdp$.

Or ces deux sommes sont égales entre elles ; ce qui se prouve par mon Mémoire du 25 Avril de l'année passée, en ce que j'y démontray $t = \frac{\int \overline{xx + yy} \times dp}{\int xdp}$: Car si l'on multiplie les deux parties de cette équation par $\frac{2c}{at} \int xdp$, l'on aura $\frac{2c}{a} \times \int xdp = \frac{2c}{at} \times \int \overline{xx + yy} \times dp$ (à cause de $ll + mm = 2xx + 2yy$) $= \frac{c}{at} \times \int \overline{ll + mm} \times dp = \frac{c}{at} \int lldp + \frac{c}{at} \times \int mmdp$; & en ôtant de part & d'autre $\frac{c}{a} \times \int xdp - \frac{c}{a} \times \int ydp + \frac{c}{at} \times \int mmdp$, on trouvera (comme j'ay dit) $\frac{c}{a} \times \int xdp + \frac{c}{a} \times \int ydp - \frac{c}{at} \times \int mmdp = \frac{c}{at} \times \int lldp - \frac{c}{a} \times \int xdp + \frac{c}{a} \times \int ydp$: c'est-à-dire, que le moment de tous les Z est égal au moment de tous les Y par rapport à la ligne AX. Donc le centre commun de gravité de tous ces poids se trouve dans la même ligne AX ; Et par conséquent il est remonté aussi haut qu'il étoit descendu. *Ce qu'il faloit premiérement démontrer.*

La même chose se peut encore prouver d'une autre maniere plus succincte, en faisant voir que la somme des produits de Y par GY (en comprenant aussi sous Y les Z de l'autre côté) est égale à zero ; ce qui est facile : on n'a qu'à substituer simplement $xx + yy$ au lieu de ll, & effacer entiérement $\frac{c}{a} \times \int ydp$; parce que toutes les ydp positives d'une part sont détruites par autant de ydp de l'au-

tre : de cette maniere l'on aura $\frac{c}{at} \times \int \overline{xx + yy} \times \overline{dp} - \frac{c}{a} \times \int xdp$ pour la somme de ces produits, c'est-à-dire (en mettant $\frac{\int \overline{xx + yy} \times dp}{\int x dp}$ au lieu de t) $\frac{c}{a} \times \int x dp - \frac{c}{a} \times \int x dp = 0$. Car de là il suit encore que le centre commun de gravité de toutes les parties du pendule se trouve dans la ligne AX.

Identité des Centres d'oscillation & de percussion.

Pour démontrer l'identité des Centres d'oscillation & de percussion, soient conçuës trois verges AC, AD, AT, infléxibles, sans pésanteur, & liées ensemble en un angle invariable CAD dans la seconde Figure ; que les deux premieres de ces verges soient chargées à leurs extrémités de poids égaux C, D, & que la troisiéme passe par L centre commun de gravité de ces poids. Il s'agit de trouver le centre de percussion M, qui doit être tel qu'ayant mû l'angle CAD autour du point A, les choqs ou les *momens* de percussion à l'égard du point M comme de l'apuy, soient égaux de part & d'autre. Pour cela soient menées CT, DS, perpendiculaires à AC, AD ; & MR, MS, perpendiculaires à CT, DS. Les droites CT, DS, seront les lignes de direction des poids, lorsque dans leur mouvement circulaire ils arriveront en C & en D : ainsi le produit du poids C par la vîtesse AC & par la distance MR, & celui du poids D par la vîtesse AD & par la distance MS, marqueront les choqs de ces poids, ou leurs *momens* de percussion par rapport à l'apuy M. Ayant donc marqué les quantités homologues à celles du Memoire du 25 Avril de l'année passée par les mêmes lettres repetées au commencement de cet Ecrit-ci, nous trouverons ce qui suit.

$AC\,(l).\ LC\,(y)$ :: sin. ang. $ALC\,(\sqrt{aa-gg})$. sin. ang. $LAC = \sqrt{\frac{aayy-ggyy}{ll}}$. Et $AD\,(m).\ LD\,(y)$ :: sin. ang. $ALD\,(\sqrt{aa-gg})$. sin. ang. $LAD = \sqrt{\frac{aayy-ggyy}{mm}}$. Donc sin. ang. $ATC = \sqrt{aa - \frac{aayy+ggyy}{ll}} = \sqrt{\frac{aall-aayy+ggyy}{l}}$, & sin. ang. $AVD = \sqrt{aa - \frac{aayy+ggyy}{mm}} = \sqrt{\frac{aamm-aayy+ggyy}{m}}$: c'est-à-dire (en mettant au lieu de ll & mm leurs valeurs) sin. ang. $ATC = \frac{\sqrt{aaxx+2agxy+ggyy}}{l} = \frac{ax+gy}{l}$, & sin. ang. $AVD = \frac{\sqrt{aaxx-2agxy+ggyy}}{m} = \frac{ax-gy}{m}$. Après cela on trouve sin. ang. $ATC\,(\frac{ax+gy}{l})$. sin. tot. (a) :: $AC\,(l)$. $AT = \frac{all}{ax+gy}$. Et sin. ang. $AVD\,(\frac{ax-gy}{m})$. sin. tot. (a) :: $AD\,(m)$. $AV = \frac{amm}{ax-gy}$. Donc $TM = AT - AM = \frac{all}{ax+gy} - t$, & $MV = AM - AV = t - \frac{amm}{ax-gy}$.

De plus sin. tot. (a). sin. ang. $ATC\,(\frac{ax+gy}{l})$ :: $TM\,(\frac{all}{ax+gy} - t)$. $MR = \frac{all-axt-gyt}{al}$. Et sin. tot. (a). sin. ang. MVS ou $AVD\,(\frac{ax-gy}{m})$ :: $MV\,(t - \frac{amm}{ax-gy})$. $MS = \frac{axt-gyt-amm}{am}$. Donc $C \times AC \times MR = dp \times l \times \frac{all-axt-gyt}{al} = \frac{all-axt-gyt}{a} \times dp$ (en mettant pour ll sa valeur) $= \frac{axx+ayy+2gxy-axt-gyt}{a} \times dp$, & $D \times AD \times MS = dp \times m \times \frac{axt-gyt-amm}{am} = \frac{axt-gyt-amm}{a} \times dp$ (en mettant pour mm sa valeur) $= \frac{axt-gyt-axx-ayy+2gxy}{a} \times dp$ Donc aussi puisque la somme de tous les produits $C \times AC \times MR$ doit être égale à la somme de tous les produits $D \times AD \times MS$, l'on aura $\int xx\,dp + \int yy\,dp + \frac{2}{a} \times \int gxy\,dp - t \times \int x\,dp - \frac{t}{a} \times \int gy\,dp = t \times \int x\,dp - \frac{t}{a} \times \int gy\,dp - \int xx\,dp - \int yy\,dp$

$+ \frac{2}{a} \times \int gxydp$; ce qui nous fournit $t = \frac{\int xxdp + \int yydp}{\int xdp} = \frac{\int \overline{xx+yy}\, x\, dp}{\int xdp}$. On trouvera encore la même chose en ne considérant qu'une seule des deux sommes précédentes, en effaçant tous les termes où y n'a qu'une dimension, & en égalant le reste à zero : on trouvera, dis-je, encore de cette maniere $t = \frac{\int \overline{xx+yy}\, x\, dp}{\int xdp}$, qui est la même quantité que nous avons trouvée pour le centre d'oscillation dans le Mémoire du 25 Avril de l'année passée. Donc le centre d'oscillation & de percussion ne sont toûjours qu'un seul & même point. *Ce qui est la seconde chose qu'il faloit ici démontrer.*

REFLEXIONS

Sur des Memoires touchant la Correction Gregorienne, communiqués par M. Bianchini à M. Cassini.

1704. 9. May. MOnsieur Bianchini Camerier d'honneur du Pape, a trouvé dans la Bibliotheque Vaticane des Memoires de ce qui s'est passé dans les Congregations tenuës sur le Calendrier sous le Pape Gregoire XIII.

Il témoigne que l'abregé du Calendrier de Lylius, envoyé par le Pape l'an 1577 aux Princes & aux Academies principales, fut reçû avec de grandes loüanges, & qu'il jugea de l'avis presque de tous qu'il devoit être preferé aux autres.

Cependant on ne laissa pas de tenir encore des Congregations sur le Calendrier l'an 1580. Le Cardinal Sirlet, le Patriarche d'Antioche, l'Evêque de Mont-Royal, M. Olivieri Auditeur de Rote, le Pere Clavius, Pierre Ciacconi, Antoine Lylius frere de Loüis Auteur du Calendrier, & le Pere Ignace Dantes y arrêterent des hypotheses, parmi lesquelles il y en a de nouvelles, qui n'ont pas été suivies ni dans le Calendrier de Lylius, ni

dans celui de Clavius qui est en usage presentement, & d'autres qui sont dans l'usage commun.

Par la premiere hypothese, suivant l'usage de l'Eglise, le jour commence à minuit, & dure 24 heures.

Par la seconde hypothese, si la pleine Lune arrive aux six dernieres heures du jour, elle s'entend être du jour suivant.

Dans la troisiéme, on attribuë au Concile de Nicée le Decret de celebrer la Pâque le Dimanche qui suit immediatement le quatorziéme du premier mois, que l'on reconnoît être celui dont le quatorziéme arrive dans l'Equinoxe du Printemps, ou le suit de plus près; on suppose que le quatorziéme précede immédiatement la Lune pleine, qu'on dit être le quinziéme de la Lune.

Dans la quatriéme, on reconnoît que cet Equinoxe, par les observations, arrive tantôt au 20, tantôt au 21 de Mars, & l'on veut que quand le quatorziéme de la Lune arrive au 20 Mars, il appartienne au premier mois, quoique la Pâque ne doive jamais être celebrée avant le 22 de Mars.

Dans la cinquiéme, que la faute que l'on feroit en celebrant la Pâque au second mois, ne seroit pas si grande que si on la celebroit au douziéme mois.

La sixiéme est, qu'à cause des heretiques Quartadecimains, il est défendu absolument de celebrer la Pâque le quatorziéme de la Lune.

La septiéme, que s'il y a de l'erreur dans un Cycle, elle est plus grande lorsque le lieu de la conjonction ou de l'opposition du Soleil & de la Lune anticipe, que quand il suit les nouvelles & les pleines Lunes.

La premiere de ces hypotheses est commune & naturelle : le midy divisant le jour composé de 24 heures par la moitié, sa premiere partie commence à minuit précedent, la seconde finit à minuit suivant.

La seconde hypothese qui attribuë au jour suivant la pleine Lune qui arrive aux six dernieres heures du jour, ne paroît pas conforme à la premiere, qui ne finit le jour qu'à minuit suivant.

Pour ce qui est de la troisiéme, nous avons reconnu que la celebration de la Pâque fut autorisée immédiatement par le Concile de Nicée; & nous avons attribué aux Alexandrins, deputez par le Concile de Nicée, la regle de la celebrer le Dimanche qui suit immédiatement le quatorziéme de la Lune; d'autant que même après le Concile de Nicée les Latins soûtenoient encore leur regle ancienne, de ne pas la celebrer que le Dimanche qui suit le quinziéme, comme ils avoient pratiqué auparavant, jusqu'à ce que S. Leon Pape eut acquiescé à la détermination des Alexandrins.

Touchant le rapport du quatorziéme de la Lune avec la Lune pleine, nous avons remarqué que le plein de la Lune arrivoit tantôt le 14, tantôt le 15 & tantôt le 16 du mois lunaire Ecclesiastique, & que cela est conforme à la pratique du Concile de Nicée.

La quatriéme hypothese: Que le quatorziéme de la Lune qui arrive au 20 Mars, appartient au premier mois, à cause que l'Equinoxe Astronomique arrive tantôt au 21, tantôt au 20 de Mars, paroît être une hypothese toute nouvelle, diverse de la pratique du Concile de Nicée ou de ses deputez, qui ne pouvoient pas ignorer que l'Equinoxe veritable arrivoit en ce tems-là, tantôt au 21, tantôt au 20 de Mars. Et néanmoins ils prenoient toûjours pour Equinoxe Ecclesiastique le 21 de Mars, & pour premier mois lunaire celui dont le quatorziéme arrivoit au 21 ou après; ce qui s'est observé même jusqu'à la Correction Gregorienne, quand l'Equinoxe Astronomique arrivoit au dixiéme ou à l'onziéme de Mars, d'où il fut remis au 21; cette hypothese n'est pas non plus conforme à la Correction Gregorienne ni à la pratique d'aujourd'huy, qui tolere la difference d'un ou de deux jours entre l'Equinoxe Ecclesiastique & l'Astronomique, & regle la Pâque à l'Equinoxe Ecclesiastique fixé au 21 de Mars, le tenant autant d'accord avec l'Astronomique qu'il se peut par l'obmission de 3 jours en 400 années.

Il y a apparence que le Pape ne trouva pas bon qu'on se

se conformât à cette hypothese nouvelle, pour ne pas préferer une subtilité plus grande à l'usage ancien des Saints Peres. Ainsi Clavius qui avoit signé cette hypothese, n'y eut point d'égard dans l'execution.

A l'égard de la cinquiéme & de la septiéme hypothese, elles sont conformes à celles des anciens Peres contre l'usage de ceux qui en ce tems-là prenoient pour premier mois un mois d'hyver, & pour premier jour du mois lunaire un jour qu'on voyoit encore la Lune dans son decours. Ils parloient contre ces anticipations extraordinaires qui étoient tolerées de plusieurs, ainsi qu'il paroît par les Prologues de Theophile & de S. Cyrille.

Pour la sixiéme hypothese, qui est qu'à cause des Quartadecimans, il est défendu de celebrer la Pâque au quatorziéme de la Lune. Il nous a paru que cette défense ne regarde point le concours accidentel de nôtre quinziéme, dans lequel nous pouvons celebrer la Pâque avec la quatorziéme des Quartadecimans déterminée par une methode differente de la nôtre, laquelle est la seule que nous devons reconnoître pour quatorziéme legitime, quand elle est conforme à la détermination du Concile de Nicée, & à la Bulle de Gregoire XIII.

Il y a apparence que la raison que les Alexandrins avoient de ne pas celebrer la Pâque qu'après le quatorziéme de la Lune, & celle que les Latins avoient de ne la celebrer qu'après le quinziéme, étoit parce que la Resurrection de Nôtre-Seigneur que nous celebrons le jour de Pâque, n'arriva que le Dimanche après le quatorziéme de la Lune.

M. Bianchini propose une Periode Paschale de 1184 années, qu'il appelle *Clementine*, dont il tire les Epactes par une methode particuliere, & il les compare avec celles qui résultent de la Periode de 11600 ans, que j'ai proposée dans l'Astronomie Indienne, & avec celles que le Pere Bonjour a publiées.

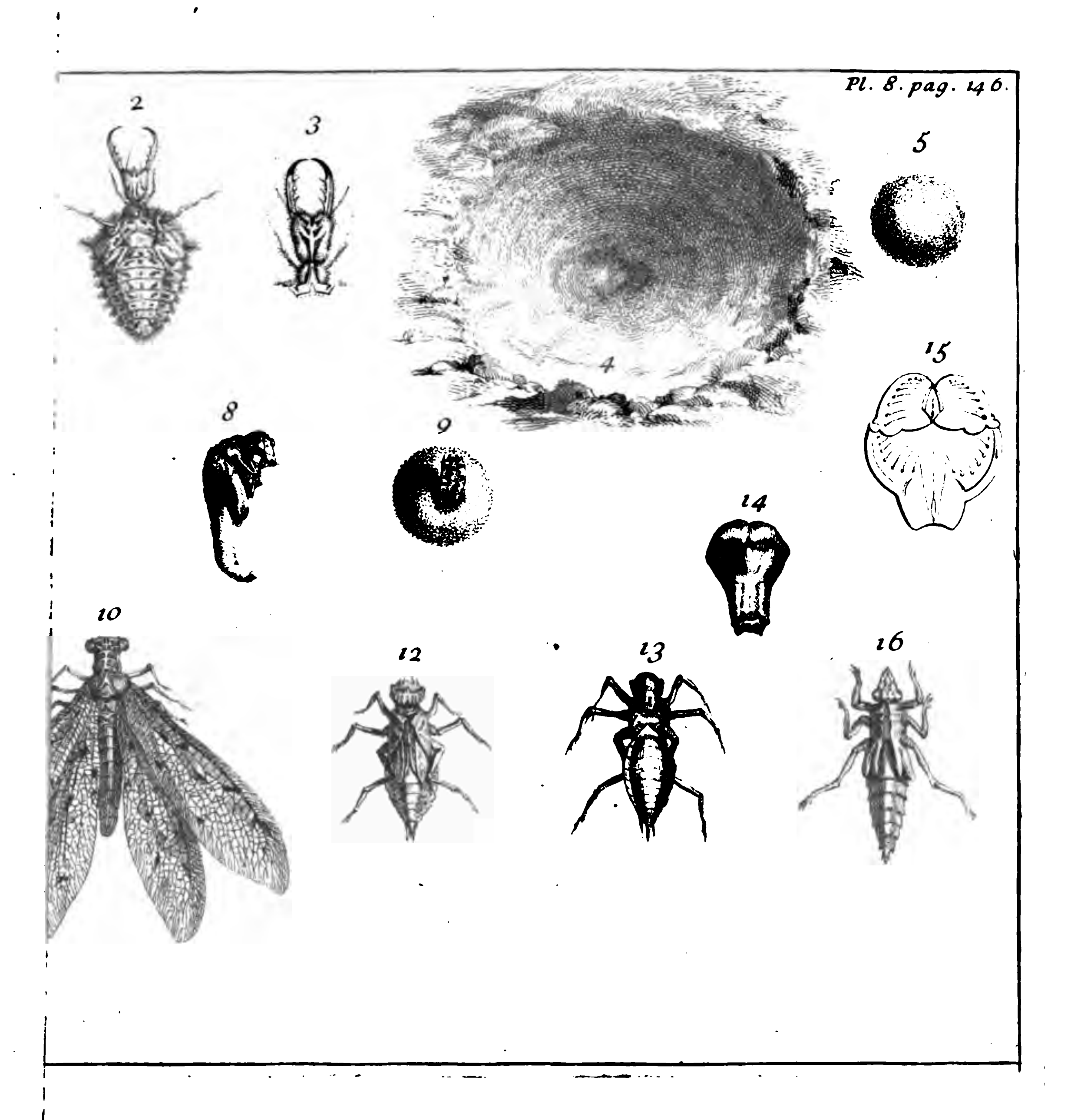
DES EQUATIONS DES MOIS LUNAIRES ET DES ANNÉES SOLAIRES.

PAR M. CASSINI.

1704. 31. May. LEs inventions excellentes du temps passé meritent d'être mises dans leur jour, afin qu'elles ne soient pas negligées faute d'être éclaircies.

Les Equations des mois Lunaires & des années Solaires proposées par les Gregoriens, sont aussi conformes aux Astronomiques qu'on le puisse souhaiter : leurs regles consistent en deux mots. Elles sont très-faciles à pratiquer, & aussi propres pour l'usage populaire, que pour l'Astronomique. Ceux qui auroient dû les employer n'en ont pas profité. Ils ont employé à leur place diverses Tables Astronomiques, qui ne sont pas si d'accord ensemble que ces Equations Gregoriennes le sont avec ces mêmes Tables : car elles sont comme moyennes entre celles qui sont employées indifferemment au même sujet. L'Auteur de l'Explication du Calendrier auroit été plus d'accord avec soi-même, sans s'éloigner de l'Astronomie, s'il se fût attaché uniquement à ces Equations qui lui étoient proposées.

Quoique les Astronomes calculent par leurs Tables les heures, minutes & secondes des nouvelles & des pleines Lunes, & même des Equinoxes, & ne les negligent pas même dans les observations, l'experience continuelle fait connoître que diverses observations ne s'accordent pas toûjours dans les minutes dans les Eclipses de Lune qu'on employe à la construction des Tables Lunaires, ni à un quart-d'heure près dans les observations des Equinoxes que l'on employe à la construction des Tables du Soleil.


Pl. 8. pag. 146.
2
3
4
5
8
9
10
12
13
14
15
16

Dans la derniere Eclipse de Lune totale, dont le temps étoit plus facile à déterminer à cause qu'elle entroit plus directement dans l'ombre que jamais, divers Observateurs très-habiles ne se sont accordez ensemble dans la durée de l'Immersion qu'à deux ou trois minutes près. On peut juger par là de la difference qu'il y aura eu dans les observations des anciens, qui n'avoient pas de Lunettes d'aproche pour distinguer assez bien les termes de l'ombre de la Lune, ni d'horloges assez propres pour mesurer le temps à minutes d'heure.

Les Tables Astronomiques ne sont jamais plus exactes que les observations sur lesquelles elles sont fondées.

Quand les Tables ne different pas plus entr'elles que les observations sur lesquelles elles sont fondées, il n'y a point de raison de préferer les plus difficiles à construire & à pratiquer, aux plus faciles, ou à une methode qui n'ait pas besoin de Tables ni de Livres pour être pratiquée, & qui donne comme le milieu entre les Tables les plus estimées.

Les Equations des mois Lunaires & des années Solaires ont été introduites dans la Correction Gregorienne pour les accorder de temps en temps avec les Astronomiques, quand elle s'en éloigne environ d'un jour. Dans l'usage Civil & Ecclesiastique on tient un milieu entre la facilité populaire, & l'exactitude Astronomique, en composant les mois & les années de jours entiers, & tolerant des excès & des défauts dans les heures & dans les minutes, qui se récompensent partie les uns les autres, & se réduisent enfin à l'égalité avec les Astronomiques par l'addition ou substraction de quelques jours d'extraordinaire.

Au lieu de faire les mois Lunaires de 29 jours 12 heures & 44 minutes comme font les Astronomes, on est obligé de les faire d'abord alternativement de 30 jours, qui excedent les Astronomiques de 11 heures 16 minutes, & de 29 jours qui different des Astronomiques de 12 heures 44 minutes : mais deux de ces mois se récompensent en sorte que leur somme ne differe de deux mois Astronomiques

que d'une heure & 28 minutes, dont on tient compte en certains tems, interrompant cette alternative, & faisant deux mois de suite de 30 jours.

De même au lieu de faire les années Solaires de 365 jours & presque 6 heures comme les Astronomes le supposent, on en fait trois de suite de 365 jours, qui sont les communes, & la quatriéme de 366 jours, qui est la Bissextile; de sorte que la somme de 4 années Civiles est à peu près égale à la somme de 4 années Astronomiques. Celle-ci est l'Equation Julienne des années Civiles, qui les rapproche plus des Astronomiques: mais parce que quatre années Civiles égalées par cette maniere excedent quatre années Astronomiques d'environ 43 minutes 12 secondes, qui en quatre cens ans font trois jours, on en retranche 3 jours en 400 années, qui est l'Equation Gregorienne du Soleil.

En comparant les mois Lunaires avec les années Solaires, on fait ces années de 12 mois Lunaires & onze jours. Ces onze jours sont l'Epacte Lunaire en une année Solaire supposée de 365 jours & un quart; quoique dans l'usage l'on ne fasse point reflexion à cette difference d'un quart de jour, attribuant la même Epacte indifferemment aux années communes & aux Bissextiles.

Une année portant l'autre Epacte Civile & Ecclesiastique excede d'abord l'Astronomique de quelques heures; mais quand les Epactes de plusieurs années excedent 30 jours, on prend ces 30 jours pour un mois Embolismique, au lieu de prendre 29 jours & demi. Cette subtraction excessive rapproche l'Epacte Civile de l'Astronomique, de sorte qu'en 4 années qui en comprennent une Bissextile & une Embolismique, l'Epacte Civile & Ecclesiastique s'égale à l'Astronomique à une ou deux minutes d'heure près, ce qui arrive souvent deux fois de suite. Mais il y a aussi souvent deux Embolismiques en quatre années, qui troublent cette égalité par l'excès d'onze heures 20 minutes.

Les Anciens ont proposé pendant quelque tems, qu'en

quatre années Solaires il y ait 49 mois Solaires & demi, & par consequent 99 mois en 8 années. Mais on n'y a depuis trouvé une difference qui monte à un jour & demi, ce qui a obligé de s'éloigigner de cette hypothese. On s'est plus approché de la précision Astronomique lorsqu'on a supposé que dix-neuf années Solaires Juliennes de 365 jours & un quart contiennent 235 mois Lunaires, & que 76 années Juliennes comprennent 940 mois Lunaires. Le Concile de Nicée se servit de cette hypothese dans la détermination des quatorziémes Paschales.

Mais les observations de 24 Siecles comparées ensemble, ont fait connoître que quatre Cycles de 19 années Solaires Juliennes, qui en font un de 76 années, excedent 940 mois Lunaires de 5 heures 50 minutes, qui est l'Epacte & l'Equation Lunaire qui convient à ces 76 années.

Les Gregoriens ont déterminé cette Equation en raison de huit jours en vingt-cinq Siecles. La partie proportionnelle de cette Equation dûë à un Cycle de 19 années, est d'une heure $27' 33'' 7''' 12''''$; ainsi 235 mois Lunaires s'accomplissent en 6939 jours 16 heures $32' 26'' 52''' 48''''$. Le mois Lunaire qui en résulte est de 29 jours 12 heures $44' 3'' 10''' 41''''$ 34^{6s}. On peut construire sur ce fondement une Table des mois Lunaires, & des Epactes Astronomiques qui serviront pour tous les Siecles.

La regle des Equations Lunaires Gregoriennes attribuë donc des Epactes aux intervalles composés de Cycles de 19 années Juliennes, ausquels les Anciens n'en attribuoient point. Et c'est dans cette Epacte inconnuë aux Anciens, distribuée proportionnellement aux années Solaires Juliennes en raison de 8 jours en 25 Siecles, que consiste l'Equation Gregorienne de la Lune.

Quoique les termes de cette Analogie Gregorienne soient des Siecles entiers & des jours entiers, elle se trouve très-conforme aux mois Lunaires moyens déterminez par des excellens Astronomes à jours, heures, minutes, secondes & tierces; & pour des intervalles encore plus grands que ceux qui sont échûs depuis le commencement du

monde jusqu'à present, elle donne les Epactes qui s'accordent à deux ou trois minutes près avec celles que l'on trouve par les bonnes Tables Astronomiques.

En 7600 années Juliennes qui comprennent 400 Cycles de 19 années, on trouve par cette Analogie pratiquée par la regle Arithmetique des proportions, l'Equation Gregorienne de 24 jours 7 heures 40 minutes & 48 secondes, qui est l'Epacte Gregorienne de ces années Juliennes.

Par les Tables Astronomiques employées par Clavius, auxquelles sont assez conformes les Tables Rudolphines & celles de Riccioli, on trouve l'Epacte de 7600 années, au Chapitre 12 & 28 du Calendrier Gregorien, de 24 jours 7 heures 42' 27" 5''', qui excede la Gregorienne d'une minute 19" 5'''. Au Chapitre 14 du même Livre on la trouve de 24 jours 7 heures 37' 53" 20''' moindre que la Gregorienne de 2' 54" 40'''. Celle qui se trouve par l'Analogie Gregorienne sans Tables, qui est de 24 jours 7 heures 40' 48", est donc moyenne entre celle qui se trouve par ces differentes Tables employées par le même Auteur, qui sont si conformes à celles des autres Astronomes dont nous avons parlé, qu'elles n'en different tout au plus que de trois minutes dans un si grand intervalle, dans lequel cette difference est tout-à-fait insensible.

Cet intervalle excede de trois fois les plus grands intervalles qui se trouvent entre les observations modernes de la Lune & les plus anciennes que nous ayons, qui ne sont pas si précises qu'il n'y ait souvent de l'ambiguité de quelque quart-d'heure, d'autant que les Anciens avoient de la peine à réponde des heures précises de leurs observations. Ainsi la difference de quelque demie-heure qu'il y auroit dans un triple intervalle entre les Epactes trouvées par ces Equations & celles qui se tirent quelques Tables Astronomiques, passeroit pour insensible par rapport à la précision que l'on peut avoir jusqu'à present, en comparant les observations les plus recentes avec les plus anciennes.

L'accord des Epactes trouvées par l'Analogie Gregorienne sans les secours des Tables Astronomiques pour un si grand intervalle, est donc aussi précis que l'Astronomie d'aujourd'huy le puisse avoir avec certitude par la comparaison des observations que nous avons jusqu'à present.

La facilité de trouver ces Epactes par cette Analogie est grande : si l'on se contente de les avoir à heure pour de si grands intervalles, une operation par la regle ordinaire des proportions en très-petits nombres est suffisante.

Dans le cas proposé on fera comme 25 Siecles à huit jours. Ainsi 76 Siecles à 24 jours & $\frac{8}{25}$ qui sont un peu moins de 8 heures, un vingt-cinquiéme de jour ne differe d'une heure que de deux minutes 24". Les vingt-cinquiémes fractions ordinaires dans cette Analogie peuvent donc passer pour des heures dans les calculs, quand on ne cherche point les minutes, dont on n'a pas toûjours de besoin. Si l'on ne veut pas negliger les minutes, on n'a qu'à en ôter autant de fois 2' 24" qu'il y a de vingt-cinquiémes, prenant le reste pour heures & minutes : huit fois 2' 24" font 19' 12", qui ôtées de 8 heures font 7 heures 40' 48"; ainsi l'Equation dûë à 76 Siecles, qui est son Epacte Gregorienne, se trouve de 24 jours 7 heures 40' 48", & celle de 100 ans est de 7 heures 40' 48". Car 7500 années qui est le triple de 2500 demandent 24 jours.

Parmi 4 periodes de 19 années Civiles Juliennes, il y en a toûjours une qui n'a que 4 années Bissextiles; mais les periodes de 76 années qui en comprennent 4 de 19 en ont toûjours 19 Bissextiles, & sont égales entr'elles. Tous les intervalles composés de periodes de 76 années Civiles ont les Epactes égales à leurs Equations; car l'Epacte Lunaire d'une periode d'année Civile est l'excès de ces années sur les mois Lunaires entiers qu'elles comprennent, & cet excès dans le Cycle de 19 années & dans ceux qui en sont composés, est l'Equation Lunaire Gregorienne.

Par l'Analogie Gregorienne on trouvera l'Equation d'une periode de 76 années de 5 heures 50' 12" 28"' 48"",

qui est aussi son Epacte. La Table des Epactes Astronomiques de Clavius inserée au Chapitre 28 du Calendrier, qui parmi celles qu'il employe est la plus conforme à l'Analogie Gregorienne, la donne de 5 heures 50′ 13″ 20‴. Elle n'excede pas ici la Gregorienne d'une seconde entiere, mais seulement de 51‴ 12⁗, qui sont des fractions insensibles, & elles s'accordent aussi dans les secondes avec celle qui est inserée au Chapitre 13, que Clavius donne comme conforme aux Tables calculées par Moletius, par Magini & par Paul de Middelbourg, & à celle qu'il rapporte encore au Chapitre 25 du Calendrier. Mais dans la Table inserée au Chapitre 8 & au Chapitre 14, Clavius calcule cette Epacte de 5 heures 50 minutes 10″ 44‴. Celle qui se trouve par l'Analogie Gregorienne excede cette derniere d'une minute 44‴ 48⁗. Cette plus grande difference ne monte qu'à une minute & trois quarts en 4560 ans. On pourroit refaire ces Tables sur l'Analogie Gregorienne, s'il en valoit la peine. Mais pour l'usage Civil, & même pour l'Astronomique, il est indifferent de quelle de ces Tables l'on se serve. Car la plus fine Astronomie d'aujourd'huy ne sçauroit répondre de cette difference en tout l'intervalle qui est échû depuis le commencement du monde jusqu'à present ; & pour des grands intervalles composés de periodes de 76 années, on a plûtôt fait de trouver les Epactes Astronomiques par le calcul tiré de l'Analogie Gregorienne, que d'avoir recours à un Livre pour les calculer par les Tables mêmes.

C'est une chose digne de remarque que les intervalles composés de 25 années, donnent les Equations Lunaires précises à secondes sans autres fractions, & que les intervalles composés de periodes de 125 années, donnent les Equations précises à minutes. Que ceux qui sont composés de periodes de 625 années, donnent les Equations précises à jours entiers. En 25 années l'Equation Lunaire est d'une heure 55′ 12″, en 125 années elle est de 9 heures 36 minutes, & en 625 années elle est de deux jours entiers ; ce qui facilite le calcul & la construction des Tables

bles des Equations Lunaires Gregoriennes & Astronomiques.

Ayant assigné à 2500 années l'Equation de huit jours, & prenant la moitié de ces nombres, il est aisé de voir qu'elle avoit augmenté de 4 jours entiers en 1250 ans qui étoient échus depuis le Concile de Nicée jusqu'au Pontificat de Gregoire XIII. tant suivant la regle, que suivant les Tables de Clavius, qui dans l'exécution ne les augmenta que de trois jours.

Cette Equation Gregorienne remet les nouvelles Lunes en 3400 années Juliennes au même jour & à la même heure, à une demie minute près sous le même meridien.

Viete reprochoit à Clavius de n'avoir pas fait mention dans son Apologie de cette periode de 3400 années. Clavius pouvoit lui répondre qu'on trouve cette periode marquée dans ses Tables des Epactes inserées dans son Apologie, où il ne donne à 3400 années qu'une minute & 11 secondes d'Epactes; & neanmoins Clavius lui répond qu'il ne sçauroit faire mention de ce qui n'est pas, & qui ne se trouve point écrit d'aucun Auteur de merite, quoiqu'il ne nie point qu'elle n'approche beaucoup de la verité. Une minute & 11″ de difference en 3400 années doit passer pour insensible dans l'Astronomie, & d'autant plus dans l'usage Ecclesiastique. Clavius même a calculé la Table des Fêtes mobiles pour une de ces periodes de 3400 années, qui commence par l'année 1600, & finit par l'année 5000.

Des Epoques Gregoriennes.

Après avoir démontré la conformité de l'Analogie Gregorienne, qui regle les Equations des mois Lunaires & des Epactes avec les Tables Astronomiques les plus celebres, il reste à examiner la conformité des Epoques de ces Equations, qui sont les principales d'où l'on peut tirer toutes les autres.

Les Astronomes prennent pour Epoque de leurs Tables

quelque année & quelque jour memorable, & une heure commode sous quelque meridien celebre. Il n'importe pas quelle année ni quel jour ou heure l'on prenne, pourvû que l'on sçache le rapport qu'elle a avec l'Epoque usuelle. La plus celebre de toutes les Epoques est presentement l'année même de Jesus-Christ suivant l'usage vulgaire, qui dans le rang des années Juliennes est supposée Bissextile & premiere des Cycles de 19 années marquee du nombre d'Or I, suivant l'ordre qui s'observe presentement depuis le Concile de Nicée.

Il y a des Astronomes qui dans leurs Tables prennent pour Epoque des Epactes Astronomiques le midy qui préceda le premier Janvier de cette année de Jesus-Christ, & d'autres qui prennent le minuit qui préceda ce même jour; d'autres qui prennent le midy du même jour. Il y en a d'autres qui prennent le midy du dernier jour de la même année, d'autre le minuit suivant, & d'autres le midy du premier jour de Janvier suivant. Il y a enfin de ceux qui prennent pour Epoque des années Bissextiles le midy du premier Janvier, & des années communes le midy précedent, afin qu'entre les années communes & les Bissextiles, il n'y ait difference qu'en Janvier & Fevrier; au lieu que suivant les autres methodes, il n'y a point de difference entre ces deux mois: mais il y a la difference d'un jour aux autres dix mois de l'année Bissextile. Dans le Calendrier Gregorien on assigne la même Epacte au premier de Janvier & au premier de Mars, tolerant dans l'année Bissextile trois mois Lunaires de suite de 30 jours. Cet excès récompensant le défaut d'autres mois.

Il y auroit de la commodité & plus de justesse à prendre toûjours pour Epoque des Epactes le premier de Mars qui suit toûjours l'intercalation du jour dont le mois de Fevrier est prolongé aux années Bissextiles. C'est aussi le mois où arrive l'Equinoxe du Printemps, que l'on employe à déterminer le premier mois Lunaire dans lequel arrive la Pâque.

L'on voit assez que les Epoques des mois Lunaires Ec-

clesiastiques & de leurs Epactes ne sçauroient s'accorder sans réduction avec les Epoques de divers Astronomes, qui ne s'accordent pas tous dans la même Epoque, ni dans le jour ni dans l'heure, ni dans le meridien, d'autant que le choix en est arbitraire.

Les Epactes annuelles Ecclesiastiques, qui conviennent au nombre d'Or courant pendant un ou deux Siecles, ont particulierement cette sujetion, qu'il faut qu'elles s'accommodent aux Epactes disposées dans le Calendrier à chaque jour des mois, pour marquer la nouvelle Lune au jour du mois où elles sont placées. Si l'on changeoit cette disposition dans le Calendrier, il faudroit aussi changer les Epactes annuelles assignées au même nombre d'Or. dans le Cycle de 19 années. En changeant les Epactes sous les mêmes nombres d'Or sans changer les Epactes dans le Calendrier, on trouveroit les nouvelles Lunes en differens jours du même mois.

L'Epacte d'une année trouvée par le nombre d'Or, peut être differente de l'Epacte de la même année trouvée par les Tables Astronomiques, & s'accorder avec elle en montrant dans le Calendrier la nouvelle Lune au même jour que l'Epacte Astronomique la donne suivant les préceptes des Tables.

Dans la Correction Gregorienne on assigna 7 jours d'Epacte à la premiere année des Cycles des trois premiers Siecles des Jesus-Christ. La Lune eut sept jours accomplis d'Epacte Astronomique le premier jour de Mars de l'année même de Jesus-Christ Bissextile premiere d'un Cycle de 19 années sur le midy à un meridien plus Oriental que Rome d'une heure & 17 minutes, comme est à peu près celui de Nicée.

C'est une Epoque celebre des Epactes Lunaires, qui moyennant le Cycle de 19 annés & les Equations Gregoriennes, sert à trouver aisément toutes les autres Epactes avant & après.

Suivant ces Equations l'Epacte ordinaire augmente d'un jour en 312 ans & demi. Mais pour la commodité popu-

niere qu'elles concouroient au Siecle du Concile de Nicée, avec les differences qui résultent necessairement d'un Cycle à l'autre.

Il n'y a pas aucune regle Ecclesiastique de rapporter les nouvelles Lunes plûtôt à un meridien qu'à l'autre, quoique dans leurs Epoques elles se trouvent assez proche du Meridien de Rome. Elles s'accommodent dans la suite à d'autres meridiens en diverses années du même Cycle aux mêmes années de divers Cycles. Cette variation est naturelle, on n'a pas entrepris de l'éviter dans la Correction Gregorienne, où pendant un ou deux Siecles on attribuë la même Epacte à la même année de differens Cycles, quoique dans cet intervalle les heures des nouvelles Lunes varient beaucoup sous le même meridien, duquel on les rapproche, quand à la fin des Siecles elles s'en sont éloignées d'un jour ou environ.

Suivant le projet Gregorien l'an 1900 l'Equation de la Lune sera 13, & l'Equation du Soleil contraire sera aussi 13, & ainsi l'Epacte Gregorienne sera nulle. Cette année sera donc considerable non seulement pour finir le 19 Siecle, & être la premiere du centiéme Cycle de 19 années après l'Epoque de J. C. qui fut la premiere d'un Cycle; mais aussi principalement pour n'avoir point d'Epacte Gregorienne, & avoir par conséquent la nouvelle Lune Ecclesiastique & l'Astronomique au premier de Janvier & de Mars, où l'Epacte nulle est marquée dans le Calendrier.

Elle sera donc naturellement une nouvelle Epoque des Cycles & des Epactes, qui exemptera la posterité d'avoir recours aux Epoques éloignées. C'est de là qu'on pourra prendre non seulement les Cycles de 19 années, comme on les prend presentement de l'Epoque de J. C. mais aussi les Equations de la Lune & du Soleil.

OBSERVATION

Sur un battement de veines semblable au battement des arteres.

PAR M. HOMBERT.

LE battement des arteres suit à peu près les contractions du cœur, selon les portions du sang qui en sont poussées alternativement & par secousses dans les arteres: mais ce sang étant resorti des arteres par leurs extremités capillaires & pressé ensuite dans les veines, il y coule uniformément & sans secousses, perdant entierement les pulsations dont on s'appercevoit pendant qu'il couloit dans les arteres. Ceci s'observe ordinairement dans tous les animaux, qu'ils soient malades ou en bonne santé. Je ne me souviens pas d'avoir vû aucun Auteur qui ait remarqué un mouvement pareil aux veines que nous remarquons aux arteres, j'ay eu le hazard d'en observer un que je rapporte par la singularité du cas. 1704. 11 Juin.

Une Dame âgée d'environ trente-cinq ans étant malade depuis quinze ou seize ans des poûmons, à ce qu'on croyoit, me pria de l'assister de mes conseils dans le dernier temps de sa vie: ses principaux simptomes étoient un asthme cruel & frequent, un très-grand mal de tête qui ne la quittoit jamais, accompagné d'une insomnie perpetuelle, des douleurs dans la poitrine très-vives & sans relâche, & au moindre effort qu'elle faisoit son asthme la prenoit avec une palpitation du cœur très-violente, qui duroit quelquefois une heure ou une heure & demie, outre beaucoup d'autres accidens très-fâcheux, dont je ne fais point mention, qui changeoient & qui se succedoient les uns aux autres.

Tous ces simptomes redoubloient particulierement son asthme, & mettoient la malade à la mort à chaque fois

que ses ordinaires étoient accoûtumez de paroître, & qui avoient cessez peu de temps avant que je l'aye vû.

Je ne marqueray pas les remedes que plusieurs personnes habiles lui avoient fait devant moy, ni ceux que je lui ay ordonné pendant deux ans que je l'ay traitée avec grand soin, sans la pouvoir guerir, ne faisant rien à l'observation dont il s'agit.

La malade étant morte & ayant été ouverte, l'on a trouvé toutes les parties de la tête dans leur état naturel & sans aucun défaut, quoiqu'elle ait eu un coup violent à la tête à l'âge de douze ans dont elle a pensé mourir, & qu'on a toûjours soupçonné être la premiere cause de sa maladie. Les parties du bas ventre étoient extrêmement flétries, aussi-bien que les poûmons, sans être autrement gâtées. Son estomac étoit très-petit, & ne paroissoit pas pouvoir contenir la valeur d'une chopine. Son cœur étoit une fois plus grand qu'il ne devoit être, & flétri comme une poche de cuir mollasse : les cavitez en étoient fort amples, & les parois fort minces : il y avoit dans chaque tronc des arteres un polype attaché aux parois internes du cœur, dont celui qui bouchoit l'aorte, ayant été arraché, avoit plus de deux pieds de long sans les extremitez qui étoient restées dans les branches de cette artere : le tronc de ce polype étoit d'une chair fibreuse, vermeille & ferme comme de la vraie chair, de la longueur d'environ six ou sept pouces : le reste changeoit insensiblement, prenant la couleur & la consistance du sang caillé.

Dans le temps que cette Dame étoit le plus agitée des palpitations du cœur, qui accompagnoient toûjours ses accès d'asthme, on sentoit aux veines des bras & du col un battement très-sensible, dont la frequence étoit un peu differente de celle des arteres, mais qui suivoit exactement les violentes secousses que l'on sentoit que le cœur se donnoit ; & quand cet accès étoit fini, on ne s'appercevoit plus du battement à ces veines. Ceci arrivoit ordinairement une fois ou deux en vingt-quatre heures, & quelquefois plus souvent. Je me suis imaginé que ce battement

ment de veines ait pû se faire de cette maniere : Le sang couloit sans aucun obstacle dans le cœur, parce qu'il n'y avoit pas de polype dans les veines : ce sang sortoit du cœur avec embarras, parce que les troncs des arteres étoient bouchez par les polypes : le cœur étoit donc continuellement rempli de sang, qui en dilatoit & amminciſsoit les parois : cette dilatation étant douloureuse au cœur en a causé des contractions convulsives, ce qui faisoit sans doute la palpitation du cœur : ces contractions convulsives s'étant jointes aux contractions naturelles du cœur, ont comprimé le sang contenu dans ses cavitez plus violemment que par les seules contractions naturelles : ces violentes contractions ont repoussé par secousses le sang dans les veines, leurs valvules étant forcées par l'effort violent dont le cœur les pressoit : ce sang repoussé par secousses dans les veines les a gonflées par intervalles, en conservant fort sensiblement les impressions de ces secousses, ce qui a imité dans les veines les plus proches du cœur une pulsation approchante de celle que l'on sent aux arteres ; & comme ces pulsations étoient seulement causées par les contractions convulsives du cœur, elles suivoient exactement ces contractions, en quoy elles étoient differentes des pulsations des arteres, qui m'ont toûjours paru avoir des contractions propres & indépendantes du cœur. L'on pourroit comparer ce repoussement surnaturel du sang dans les veines au gonflement & au repoussement des eaux coulantes des Rivieres par les hautes marées.

Le gonflement extraordinaire des veines qui s'observoit toûjours dans cette malade, causé par les arteres bouchées, nous donne occasion d'expliquer facilement tous les simptomes dont elle étoit affligée.

Son asthme n'est provenu que de la trop grande quantité de sang qui occupoit les poûmons, & qui par consequent n'admettoit pas une suffisante quantité d'air dont il avoit besoin.

Les veines du cerveau trop gonflées ont comprimé le

cerveau & en partie dérangé, ce qui a causé son mal de tête continuel; & comme la douleur toûjours reïterée réveille continuellement, elle a souffert une insomnie perpetuelle.

Les douleurs aiguës dans la poitrine qui ne la quittoient jamais, ont été selon toutes les apparences l'effet de la dilatation douloureuse du cœur & des poûmons, produite par la trop grande quantité de sang qu'ils contenoient.

Le volume du sang qui occupoit douloureusement les parties qui étoient inondées, étant augmenté par les fermentations menstruales, redoubloit toutes les incommoditez de la malade dans le temps que ses ordinaires devoient paroître; & cela d'autant plus que ses ordinaires étoient arrêtez, parce que le gonflement de la masse du sang, ordinaire dans cette occasion, se faisant mais non pas assez fort pour forcer les extremitez des arteres, qui devoient en laisser échaper une partie, ne faisoit que presser davantage & augmenter les douleurs, lesquelles n'ont jamais été soulagees que par la saignée; & même la saignée ayant précedé ce gonflement, les douleurs ne se sont pas augmentées.

J'ay observé un fait particulier à cette Dame, qui est qu'elle ne prenoit presque pas de nourriture. Elle a vêcu plusieurs mois sans prendre autre chose qu'environ un demi-septier de boüillon maigre par jour, c'est-à-dire, une décoction simple de quelque herbe potagere dans de l'eau avec un peu de sel, & elle ne bûvoit environ qu'une chopine d'eau cuillerée à cuillerée pendant les vingt-quatre heures.

Il est étonnant qu'avec si peu de nourriture une personne ait pû vivre sans diminuer considerablement. Voici comment je m'imagine que cela ait pû se faire: Nous ne sommes obligez de prendre de la nourriture que pour réparer ce que l'insensible transpiration separe de nôtre substance. La transpiration m'a toûjours paruë se faire plus ou moins, selon que le sang contenu dans les arteres

est poussé avec plus ou moins de force ou de quantité dans les parties qui doivent être nourries ; & que selon cette force la nouvelle matiere nourriciere se plaçant, elle pousse & chasse l'ancienne par tous les vaisseaux excretoires.

Nous avons trouvé dans nôtre malade non seulement les embouchures, mais aussi tous les gros canaux des arteres presque bouchez par des polypes, qui ont premierement admis fort peu de sang dans les arteres: secondement les arteres étant remplies d'un corps solide comme le polype, n'ont pas pû se contracter librement, en sorte qu'il s'y est poussé foiblement fort peu de sang à la fois ; ainsi l'ancienne matiere nourriciere n'étant déplacée que lentement & en petit nombre, il ne s'est presque pas fait de transpiration dans nôtre malade, & par consequent elle n'a pas eu besoin de beaucoup de nourriture, c'est-à-dire de réparer la diminution de sa substance que la transpiration non empêchée auroit pû causer. Nous voyons à peu près arriver la même chose aux Viperes enfermées, qui vivent un an entier sans manger, & à certains animaux dans les païs froids, qui dorment presque tout l'hyver sans prendre de nourriture, & sans diminuer considerablement de substance ; parce que ne faisant aucun exercice, ils ne donnent pas d'occasion à la transpiration, & ils conservent par là la plûpart de la graisse qu'ils avoient au commencement de l'hyver.



QUE TOUS LES BAROMETRES, tant doubles que simples qu'on a construits jusqu'ici, agissent non seulement par le plus ou le moins de poids de l'air, mais encore par son plus ou moins de chaleur; & le moyen de prévenir dorénavant ce défaut dans la construction des Barometres doubles, & d'en corriger l'erreur dans l'usage des Barometres simples.

PAR M. AMONTONS.

1704. 18 Juin. IL est à propos avant toute chose de rapporter le détail de quelques Experiences pour en déduire ensuite, s'il est possible, une construction qui puisse remedier à l'alteration que la chaleur cause dans le poids du mercure dont les Barometres ordinaires sont remplis.

PREMIERE EXPERIENCE.

Les Thermometres dont il est parlé à la fin de la Connoissance des Tems de 1704 étant à 54 poûces 5 lignes, on a empli de mercure un Areometre dans lequel il en est entré 18 onces 7 gros 63 grains pesant. Après avoir vuidé l'Areometre on l'a rempli d'esprit de vin : il y en est entré 1 once 1 gros 28 grains. Le mercure, l'esprit de vin & le Thermometre avoient été un tems considerable, comme de plusieurs jours, dans le même lieu l'un proche de l'autre.

Il suit de cette experience que le poids du mercure est à celui de l'esprit de vin en masse egale environ comme $16\frac{1}{4}$ à 1, lorsque nous n'experimentons ni un grand froid ni un grand chaud.

SECONDE EXPERIENCE.

Les mêmes Thermometres étant à 54 poûces 11 lignes, on a rempli un petit verre de Thermometre ordinaire plein de mercure, il y en est entré en tout 757 grains pesant : la grosseur du tube étoit telle que sur la longueur de 11 lignes il contenoit 18 grains pesant. Sur ce pied un tube de pareille grosseur & de 38 poûces 6 lignes $\frac{1}{2}$ de long auroit contenu les 757 grains pesant de mercure. Les Thermometres étant descendus à 50 poûces 11 lignes, le petit Thermometre à mercure étoit baissé de 2 lignes justes ; d'où l'on doit conclure que du grand chaud au grand froid de nôtre climat communément pris ; c'est-à-dire, dans le tems que mes Thermometres parcourent depuis 50 jusqu'à 58 poûces de leur graduation, le mercure augmente son volume d'environ $\frac{1}{115}$ de celui qu'il avoit dans le grand froid, & qu'en volumes égaux il diminuë de son poids dans le grand chaud aussi de $\frac{1}{115}$ de celui qu'il avoit dans le grand froid.

TROISIE'ME EXPERIENCE.

Les Thermometres étant à 54 poûces, on a mis de l'esprit de vin dans un tube de verre scellé par un bout : il occupoit dans ce tube 32 poûces 4 lignes en long ; on a ensuite scellé l'autre bout du tube, & on l'a laisse en experience. Les Thermometres étant descendus à 50 poûces, l'esprit de vin du tube étoit baissé de 7 lignes $\frac{1}{4}$; d'où il suit que du grand froid au grand chaud de nôtre climat communément pris, l'esprit de vin augmente son volume d'environ $\frac{1}{25}$ de celui qu'il avoit dans le grand froid.

Il suit encore des trois Experiences ci-dessus, que dans le grand froid de nôtre climat le poids du mercure est à celui de l'esprit de vin environ comme 16 à 1.

Ceci établi, si nous supposons que dans le grand froid l'espace entre les surfaces du mercure des deux boëtes du Barometre double est de 28 poûces 8 lignes : un de ces

pouces contrebalancera ou fera équilibre à 16 pouces d'esprit de vin, & le dessus de ces pouces d'esprit de vin marquera pour lors dans son tube en cet endroit, que l'atmosphere égale les 27 pouces 8 lignes restans.

En prenant au dessus & au dessous de ce point des parties égales de 16 lignes, chacune de ces parties seront analogues aux lignes de mercure du Barometre simple, c'est-à-dire, que l'esprit de vin du tube étant à la premiere division au dessous de celle qui marque 27 pouce 8 lignes, marquera que l'air pesera alors 27 pouces 9 lignes, & seulement 27 pouces 7 lignes, lorsque l'esprit de vin sera à la premiere division au dessus de celle qui marque 28 pouces 8 lignes.

Il faut cependant observer que chacune de ces parties de 16 lignes doivent être diminuées de $\frac{1}{18}$ de ligne, si l'ouverture du tube qui contient l'esprit de vin est la moitié de celle d'une ligne, & que le diametre de la boëte soit d'un pouce, dont la raison est que l'esprit de vin qui entre dans ce tube ne sçauroit sortir de la boëte, qu'il ne fasse descendre le vif-argent d'une quantité qui égale $\frac{1}{18}$ de ligne; ce qui fait une difference de $\frac{1}{9}$ de ligne dans la hauteur du mercure pour chaque partie, & qu'il faut $\frac{16}{9}$ d'esprit de vin pour équilibrer $\frac{1}{9}$ de mercure.

Le froid étant supposé toûjours le même, & le Barometre étant ainsi reglé, il est évident qu'il marquera précisément tous les changemens qui arriveront au poids de l'atmosphere, avec cet avantage sur le Barometre simple, qu'il les marquera au moins quatorze fois aussi sensiblement : mais dans les grandes chaleurs de nôtre climat ces 28 pouces 8 lignes de mercure, qui dans le grand froid faisoient équilibre avec le poids de l'atmosphere, peseront $\frac{1}{115}$ moins, & devroient par consequent pour continuer à contre balancer la même pesanteur d'air, être augmentés d'environ 3 lignes, qui sont à peu près le $\frac{1}{115}$ de 28 pouces 8 lignes, sans quoy l'esprit de vin baisseroit dans son tube de 48 lignes moins [illegible] de ligne, c'est-à-dire, d'un peu plus de 3 pouces $\frac{1}{4}$.

Cette augmentation de 3 lignes à la hauteur de la colomne de mercure, ne se sçauroit faire que la surface du mercure de la boëte inferieure ne baisse d'une ligne & demie; car alors cette ligne & demie de mercure étant chassée dans la boëte superieure, fera une hauteur totale de mercure de 28 poûces 11 lignes entre les surfaces du mercure des deux boëtes. Or il faudroit pour empêcher que cet abaissement du mercure dans la boëte inferieure n'apportât aucun changement à la hauteur de l'esprit de vin du tube, que la partie de l'esprit de vin qui est dans la boëte inferieure se dilatât assez pour remplir cet espace d'une ligne & demie que le mercure abandonne; ce qui arrivera necessairement, si on donne à la partie de la boëte qui contient l'esprit de vin, une capacité égale à celle d'un cylindre de même diametre que la boëte, & de 40 lignes $\frac{1}{2}$ de haut, puisque ces 40 lignes $\frac{1}{2}$ contiennent 27 fois 1 ligne & demie, & que l'esprit de vin par la troisiéme Experience ci-devant rapportée augmente son volume de $\frac{1}{27}$ du grand froid au grand chaud.

Il reste maintenant à considerer les changemens que la chaleur peut apporter à l'esprit de vin contenu dans le tube, suivant qu'il s'y trouve à des hauteurs differentes, & que les degrés de chaleur varient.

Premierement, il est maintenant bien certain que tant que le poids de l'atmosphere arrêtera l'esprit de vin au bas du tube qui le contient, quelque changement qui arrive à la chaleur de l'air, l'esprit de vin dans le tube ne changera pas de situation, & que toute l'action de la rarefaction de la liqueur se fera du côté de la boëte superieure.

Il est encore bien évident que dans le grand froid, quelque hauteur qu'ait l'esprit de vin dans le tube qui le contient, il marquera toûjours précisément l'augmentation ou la diminution du poids de l'atmosphere, puisque c'est dans l'etat du grand froid qu'on suppose que le Barometre a été reglé.

Il n'y a donc uniquement que les differentes hauteurs

de l'esprit de vin dans le tube, hors le tems du grand froid, qui peut apporter quelque alteration dans la précision de ce Barometre ; & quoyque cette alteration dans les plus grandes hauteurs de l'esprit de vin dans le tems des plus grandes chaleurs ne puisse aller au plus qu'à environ 14 lignes, & qu'elle est très-peu considerable dans tous les autres tems où la chaleur est moindre, voici cependant de quelle maniere on en pourra faire la correction lorsqu'il s'agira de précision dans les observations.

Si dans le tube qui contient l'esprit de vin il y étoit monté par le peu de pesanteur de l'atmosphere dans le tems des grandes chaleurs à la hauteur de 28 poûces, il y auroit alors sur cette hauteur de 28 poûces un poûce de correction à faire, parce qu'alors ces 28 poûces ne peseroient qu'autant que 27 poûces dans le tems du grand froid. C'est pourquoy si l'on prend ce tube de 28 poûces pour l'une des jambes d'autour l'angle droit d'un triangle rectangle, & qu'à cette hauteur de 28 poûces on tire une ligne d'un poûce perpendiculaire au tube qui fasse l'autre jambe de l'angle droit dudit triangle ; cette derniere jambe étant divisée en autant de parties égales que le Thermometre contient de degrés de l'Hyver à l'Eté, & numerotés de même, par exemple, en 8 avec les mêmes chiffres, & que de chacune de ces parties on mene des lignes droites à l'extremité de l'autre jambe, en sorte qu'elles partagent le triangle en huit triangles égaux, il n'y aura plus que de toutes les divisions de cette premiere jambe mener des lignes paralleles à la seconde jambe : ces paralleles seront divisées chacune en autant de parties qu'elle par les lignes menées de ses divisions à l'extremité de la premiere jambe, & toutes ces divisions seront analogiques aux degrés du Thermometre, & indiqueront la correction qu'on doit faire à la liqueur ; c'est-à-dire, combien on doit retrancher de sa hauteur.

EXEMPLE.

Le Thermometre étant à 56 poûces, la liqueur du Barometre à 27, on retranchera de la hauteur de la liqueur

une

une quantité égale à la partie de la parallele 27 comprise entre les lignes 50 *A* & 56 *A*, & ainsi des autres.

Pour ce qui est du Barometre simple, comme toute l'étenduë de la marche est bornée en un trop petit espace pour qu'une échelle semblable à la précédente pût servir utilement à faire la correction necessaire, on peut se servir de la Table suivante, qui marque de combien une colomne de mercure de 28 pouces 9 lignes s'allongeroit ou diminueroit à tous les degrés de chaleur indiqués par mon Thermometre.

Cette augmentation ou diminution est exprimée dans cette Table par des $\frac{1}{32}$ de ligne. Ainsi, par exemple, vis-à-vis 55 pouces 5 lignes, on trouve 65, ce qui veut dire que dans le tems que mes Thermometres marquent 55 pouces 5 lignes, il faut diminuer la hauteur du mercure du Barometre simple d'une quantité égale à 2 lignes $\frac{1}{32}$ de ligne.

Il est encore bon d'avertir icy, que quoique 28 pouces 9 lignes ne soient pas la hauteur moyenne du Barometre simple, cette hauteur étant le plus ordinairement de 27 pouces 6 lignes, on peut neanmoins se servir utilement de cette Table, sans craindre de tomber dans aucune erreur sensible.

TABLE DES HAUTEURS DE MERCURE qu'il faut ajouter ou ôter de celle du Barometre simple, suivant les differens degrés de chaleurs indiquées par mon Thermometre.

Degrés du Thermometre.			Hauteurs à corriger.
49 pouc.	0 lign.	ajoûtez	12 32e de ligne.
49 —	1		11
49 —	2		10
49 —	3		9
49 —	4		8 ou $\frac{1}{4}$ de ligne.
49 —	5		7
49 —	6		6
49 —	7		5
49 —	8		4

Degrés du Thermometre.		Hauteurs à corriger.
49 pouc. 9 lign.	ajoûtez	3 3e de ligne.
49 — 10		2
49 — 11		1
50 — 0		0
50 — 1	ôtez	1
50 — 2		2
50 — 3		3
50 — 4		4
50 — 5		5
50 — 6		6
50 — 7		7
50 — 8		8 ou ¼ de ligne.
50 — 9		9
50 — 10		10
50 — 11		11
51 — 0		12
51 — 1		13
51 — 2		14
51 — 3		15
51 — 4		16 ou ½ de ligne.
51 — 5		17
51 — 6		18
51 — 7		19
51 — 8		20
51 — 9		21
51 — 10		22
51 — 11		23
52 — 0		24 ou ¾ de ligne.
52 — 1		25
52 — 2		26
52 — 3		27
52 — 4		28
52 — 5		29
52 — 6		30
52 — 7		31
52 — 8		32 ou 1 ligne.
52 — 9		33
52 — 10		34
52 — 11		35
53 — 0		36
53 — 1		37
53 — 2		38

Degrés du Thermometre.			Hauteurs à corriger.
53 pouc.	3 lig.	ôtez	39 32e de ligne.
53	4		40 ou 1 ligne $\frac{1}{4}$.
53	5		41
53	6		42
53	7		43
53	8		44
53	9		45
53	10		46
53	11		47
54	0		48 ou 1 ligne $\frac{1}{2}$.
54	1		49
54	2		50
54	3		51
54	4		52
54	5		53
54	6		54
54	7		55
54	8		56 ou 1 ligne $\frac{3}{4}$.
54	9		57
54	10		58
54	11		59
55	0		60
55	1		61
55	2		62
55	3		63
55	4		64 ou 2 lignes.
55	5		65
55	6		66
55	7		67
55	8		68
55	9		69
55	10		70
55	11		71
56	0		72 ou 2 lignes $\frac{1}{4}$.
56	1		73
56	2		74
56	3		75
56	4		76
56	5		77
56	6		78
56	7		79
56	8		80 ou 2 lignes $\frac{1}{2}$.

Degrés du Thermometre.			Hauteurs à corriger.
56 pouc. 9 lign.	———————	ôtez	81 32e de ligne.
56 — 10	———————		82
56 — 11	———————		83
57 — 0	———————		84
57 — 1	———————		85
57 — 2	———————		86
57 — 3	———————		87
57 — 4	———————		88 ou 2 lignes $\frac{3}{4}$.
57 — 5	———————		89
57 — 6	———————		90
57 — 7	———————		91
57 — 8	———————		92
57 — 9	———————		93
57 — 10	———————		94
57 — 11	———————		95
58 — 0	———————		96 ou 3 lignes.
58 — 1	———————		97
58 — 2	———————		98
58 — 3	———————		99
58 — 4	———————		100
58 — 5	———————		101
58 — 6	———————		102
58 — 7	———————		103
58 — 8	———————		104 ou 3 lignes $\frac{1}{4}$.
58 — 9	———————		105
58 — 10	———————		106
58 — 11	———————		107
59 — 0	———————		108 ou 3 lignes $\frac{3}{8}$.



NOUVELLE STATIQUE AVEC FROTEMENS ET SANS FROTEMENS, OU

Regles pour calculer les Frotemens des machines dans l'état de l'équilibre.

PREMIER MEMOIRE,

Qui contient tout ce qui se fait sur des plans inclinés.

PAR M. PARENT.

De l'angle que doit faire une ligne avec un plan pour glisser dessus.

1°. SOit un plan rude *FG* contre lequel une puissance *A* pousse la verge solide *AB* sous l'inclinaison *ABG*; si l'on prend sur *AB* la partie *CB* pour exprimer la puissance *A*, & qu'ayant mené la parallele *CE* & la perpendiculaire *CD* à *FG*, on divise l'effort fait selon *CB* dans les 2 *CE*, *CD*; ce dernier marquera la quantité d'effort dont la puissance *A* presse le plan *FG*, lequel effort cause le frotement en *B*, & *CE* exprimera en même-tems la quantité d'effort dont la puissance *A* agit parallelement à *FG* pour vaincre ce frotement. De sorte qu'on peut envisager si l'on veut l'effort *CD* comme un poids qui pese en *B*, & l'effort *CE* comme une force qui tirant ce poids vers *F* le tient tout prêt à partir, en supposant l'angle *ABG* tel, que *AB* soit toute prête à glisser. Cela étant, il est évident que la tangente *CD* de l'inclinaison de la verge *AB* sur le plan *FG*, doit être au sinus total *BD* ou *CE*, comme le poids de la verge *AB* couchée sur *FG* à la

1704. 25. Juin. FIGURE I.

force qu'il faudroit pour commencer à vaincre son frotement sur le plan *FG*, si on la tiroit parallelement à ce plan. De sorte que si l'on fait l'angle *ABG* un peu plus grand, la verge ne pourra glisser, quelque effort que l'on fasse. Et si au contraire on fait cet angle *ABG* moindre, la verge *AB* ne pourra s'arrêter, quelque peu d'effort qu'on employe. On appellera dorénavant *ABC l'angle d'equilibre.*

On peut dire si l'on veut pour le rapport du frotement de *AB* sur *FG* à sa pesanteur celui de 7 à 20, que nous avons démontré dans cette Assemblée le 9 Janvier 1700, ou prendre tout d'un coup (pour abreger) celui de 1 à 3, à cause que les frotemens ne sont pas précisément les mêmes pour tous les corps, & que ce rapport est à peu près un milieu entre les plus grands & les moindres, puisqu'il convient au fer, au cuivre, au plomb & au bois enduits d'oing, & combinés entr'eux.

De l'angle que doit faire un plan avec l'horizon, afin qu'un corps posé dessus commence à glisser.

FIG. II. 2°. De même lorsqu'on aura un corps *DHE* sur un plan incliné *AB*, ayant pris sur la direction *PE* de son centre de gravité *P* la partie arbitraire *PE* pour marquer son poids, mené la parallele *PG* & la perpendiculaire *PF* à *AB*, & divisé l'effort *PE* dans les 2 *PG*, *PF*, ce dernier marquera la quantité dont le poids *DHE* presse ce plan, & *PG* l'effort qu'il fait pour glisser & vaincre le frotement causé par l'effort *PF*. De sorte qu'il est constant que quand l'angle *ABC* est tel que ce corps est prêt à glisser, l'effort *PG* doit être à l'effort *PF*, comme le frotement de ce corps sur *AB* supposé horizontal est à sa pesanteur, en le supposant tiré parallelement à *AC*. Or à cause des paralleles *PE*, *AC*, les angles *PEF*, *BAC* étant égaux, & les angles *PFE*, *ACB* droits, les triangles *PFE*, *ACB* sont semblables. Donc $PF \mid FE = PG \parallel BC \mid CA$; c'est-à-dire, que pourque le corps *DHE* soit prêt à glisser,

il faut que le sinus total *BC* soit à la tangente *CA* de l'élevation du plan *AB* sur l'horizon *BC*, comme *PF* à *PE* ou *PG*, ou comme le poids de ce corps à son frotement sur *AB* supposé horizontal.

De sorte que pour peu que *AB* soit plus élevé, le corps *DHE* glissera aussi-tôt; & pour peu qu'il le soit moins, le corps *DHE* y demeurera en repos, comme sur un plan horizontal.

Nous appellerons le plan *AB* qui tient le corps prêt à glisser *plan d'équilibre*, & l'angle *ABC* *l'élevation d'équilibre*.

Il est évident que si l'angle *ABC* étant moindre que *l'élevation d'équilibre*, la direction *PE* du corps *DHE* sortoit hors de sa base du côté de *E*, il tomberoit en roulant seulement vers *B*; mais si cette élevation étoit plus grande, la direction *PE* tombant sur la base *HE* du corps, il glisseroit seulement en bas. Enfin si la direction *PE* tomboit hors la base *HE*, le plan *AC* étant au-dessus de *l'élevation d'équilibre*; alors le corps *DHE* rouleroit, & glisseroit en même-tems vers le bas du plan.

De la Force necessaire pour tirer selon quelque direction que ce soit un corps situé sur un plan qui soit incliné à souhait.

5°. Si l'on a un corps pesant *GDE* à tirer sur un plan *AC* incliné sous un angle quelconque *ACB*, ayant pris sur sa direction *DF* pour marquer son poids, & divisé cet effort dans une parallele *DG* & dans une perpendiculaire *DE* au plan, comme dans les deux articles précédens, on prendra encore sur la direction *DM* de la force motrice *M* la partie *DI* pour marquer cette force; on menera la parallele *IL* à *AC* sur *DE* en *L*, & la perpendiculaire *IH* sur *DG* prolongée, & divisant l'effort *DI* dans les 2 *IL*, *IH*; *DL* = *IH* marquera la quantité de force dont *M* presse le plan *AC*, & *DH* celle avec laquelle elle fait effort pour vaincre la force opposée *DG* du poids *GDE*, & le frotement qui naît des pressions *DE*, *DL*. FIG. III.

Appellant donc DF, p; DI, f; CB, b; AB, h; & supposant que DM coupe AC en M, on aura DE pour la tangente de l'angle donné DME, & ME pour le sinus total; & l'on nommera DE, t, & EM, s. Or à cause des paralleles LI, EM, on aura ($DL \mid LI \mid DI \parallel DE \mid EM \mid DM$.) D'où l'on tirera les Analogies $AC = \sqrt{b^2+h^2} \mid CB = b \parallel DF = p \mid (GI = \frac{pb}{\sqrt{b^2+h^2}} = DE.)$ Et $AC = \sqrt{b^2+h^2} \mid AB = h \parallel DF = p \mid (DG = \frac{ph}{\sqrt{b^2+h^2}} = EF)$:

Et $DM = \sqrt{s^2+t^2} \mid ME = s \parallel DI = f \mid LI = \frac{fs}{\sqrt{s^2+t^2}} = DH.$

Et enfin $DM = \sqrt{s^2+t^2} \mid DE = t \parallel DI = f \mid \left(DL = \frac{ft}{\sqrt{s^2+t^2}}\right)$.

Faisant donc encore comme le poids π du corps GDE, est à son frotement φ sur le plan AC supposé horizontal; ainsi les deux pressions ensemble DE, $DL = \frac{pb}{\sqrt{b^2+h^2}} + \frac{ft}{\sqrt{s^2+t^2}}$ à un quatriéme terme $\left(\frac{pb\varphi}{\pi\sqrt{b^2+h^2}} + \frac{ft\varphi}{\pi\sqrt{s^2+t^2}}\right)$, on aura la force necessaire pour vaincre le frotement qui naît des pressions DL, DE, en tirant parallelement à AC; mais il faut outre cela vaincre la force DG. Il faut donc 1°. Que le seul effort DH soit égal à ce frotement total, & à DG ensemble, ce qui donne l'égalité suivante: $\left(\frac{pb\varphi}{\pi\sqrt{b^2+h^2}} + \frac{ft\varphi}{\pi\sqrt{s^2+t^2}} + \frac{ph}{\sqrt{b^2+h^2}} = \frac{fs}{\sqrt{s^2+t^2}}\right)$. D'où l'on tire en transposant cet autre $\left(\frac{\frac{pb\varphi}{\pi} + ph}{\sqrt{b^2+h^2}} = \frac{fs - \frac{\varphi}{\pi}ft}{\sqrt{s^2+t^2}}\right)$; & enfin $\left(f = \frac{\overline{\frac{b\varphi}{\pi} + h}\,\sqrt{s^2+t^2}}{\sqrt{b^2+h^2} \times \overline{s - \frac{\varphi t}{\pi}}} \times p\right) = \left(p \times \frac{h}{\sqrt{b^2+h^2}} \times \frac{\sqrt{s^2+t^2}}{s}\right)$; lorsque ($\varphi = 0$).

2°. Si l'on suppose que DM passe entre DH, & EDN au dessus de DH; alors $DL = \frac{ft}{\sqrt{s^2+t^2}}$ auroit le signe $-$ dans l'égalité précédente; ce qui donneroit dans ce cas ($f =$

$\left(f = \frac{\overline{\frac{b\varphi}{\pi} + h}\,\sqrt{s^2+t^2}}{\sqrt{b^2+h^2 \times s + \frac{\varphi}{\pi}}} \times p\right)$. Ce qui eſt aiſé à voir.

3°. Si DM paſſoit entre DE & DG au-deſſous de DE, la force DH s'uniſſant alors à la force DG, on auroit l'égalité $\left(\frac{pb\varphi + ft\varphi}{\pi\sqrt{b^2+h^2}\ \pi\sqrt{s^2+t^2}} = \frac{fs}{\sqrt{s^2+t^2}} + \frac{ph}{\sqrt{b^2+h^2}}\right)$ au lieu de celle du premier cas ; d'où l'on tireroit $\left(\frac{\frac{\varphi}{\pi}pb - ph}{\sqrt{b^2+h^2}} = \frac{fs - \frac{\varphi}{\pi}ft}{\sqrt{s^2+t^2}}\right)$ qui donneroit $\left(f = \frac{\overline{\pm\frac{\varphi}{\pi}b \pm h}\,\sqrt{s^2+t^2}}{\sqrt{b^2+h^2} \times \overline{\pm s \mp \frac{\varphi}{\pi}t}} \times p\right)$.

4°. Si DM paſſoit entre DG & DN au deſſous de DN en DP, le ſecond terme de l'égalité précédente $\left(\frac{ft\varphi}{\pi\sqrt{s^2+t^2}}\right)$ auroit le ſigne ($-$) ce qui donneroit alors $\left(f = \frac{\overline{+\frac{\varphi}{\pi}b - h} \times \sqrt{s^2+t^2}}{\sqrt{b^2+h^2} \times s - \frac{\varphi}{\pi}t} \times p\right)$.

5°. Si dans le ſecond cas cy-deſſus DM tomboit ſur DF prolongée en deſſus en DO, prenant t pour ſinus total & s pour tangente, les rapports $\left(\frac{\frac{\varphi}{\pi}b + h}{\sqrt{b^2+h^2}}\right)$ & $\left(\frac{\frac{\varphi}{\pi}t + s}{\sqrt{s^2+t^2}}\right)$ ſeroient alors les mêmes ; ce qui donneroit ſeulement ($f = p$) comme on le ſçait.

6°. Mais ſi DM tomboit ſur DF vers le bas, on auroit dans le troiſiéme cas encore $f = p$, c'eſt-à-dire f arbitraire comme p, parce qu'alors les rapports $\left(\frac{\pm\frac{\varphi}{\pi}b \mp h}{\sqrt{b^2+h^2}}\right)$ & $\left(\frac{\pm s \mp \frac{\varphi}{\pi}t}{\sqrt{s^2+t^2}}\right)$, prenant t & s comme dans le cas précédent, $b\frac{\varphi}{\pi}$, devant dans celui-ci être $= h$, ($\frac{\varphi}{\pi}t = s$).

7°. Si dans le premier cas DM étoit parallele à CB, les angles DMF, ACB, étant égaux, on auroit l'Analo-

gie : $b \mid h \parallel s \mid t$. Ce qui donneroit $\left(f = \frac{\overline{\frac{\varphi}{\pi}b + h}}{b - \frac{\varphi}{\pi}h} \times p\right)$ & $\left(= \frac{h}{b} \times p\right)$, quand $\varphi = o$.

8°. Mais dans le quatriéme cas où la puissance tire selon DP, on auroit $\left(f = \frac{\overline{\pm \frac{\varphi}{\pi}b \mp h}}{b + \frac{\varphi}{\pi}h} \times p\right)$.

9°. Si dans le premier & second cas DM est parallele au plan AC tirant selon DH, $t = DE$ sera $= o$ par rapport à $EM = S$; ce qui donnera simplement . . . . . . $\left(f = \frac{\overline{\frac{\varphi}{\pi}b + h}}{\sqrt{b^2 + h^2}} \times p\right)$ & $\left(= \frac{h}{\sqrt{b^2 + h^2}} \times p\right)$, quand $(\varphi = o)$. Soit $b = 30$, $h = 1$, $\varphi = 5$, $\pi = 7$, & $p = 3000$ livres, on aura avec frotement $f = 2243$ livres, au lieu de 700 livres, comme on le trouve dans les Memoires de l'Academie des Sciences en 1699, page 207.

10°. Mais si dans le troisiéme & quatriéme cas DM est parallele à AC tirant vers le bas selon DG, on aura $\left(f = \frac{\overline{\mp \frac{\varphi}{\pi}b \mp h}}{\sqrt{b^2 + h^2}} \times p\right)$.

11°. Si DM dans le troisiéme cas tomboit sur DE tirant vers E, on auroit alors $(s = o)$ & t infinie; ce qui donneroit $\left(f = \frac{\overline{h - \frac{\varphi}{\pi}b}}{\sqrt{b^2 + h^2}} \times \frac{\pi}{\varphi}p\right)$ $(=$ l'infini$)$ lorsque $(\varphi = o)$.

12°. Si dans le quatriéme cas DM tombe sur DN tirant vers N, on aura toûjours $(s = o)$, & t infinie; ce qui donneroit $\left(f = \frac{\overline{-h + \frac{\varphi}{\pi}b}}{\sqrt{b^2 + h^2}} \times \frac{\pi}{\varphi}p\right)$.

13°. Si $h = o$, ou si le plan AC est l'horizon DM tirant en bas entre DH & DE comme dans le premier cas, on aura $\left(f = \frac{\varphi\sqrt{s^2 + t^2}}{\pi s - \varphi t} \times p\right)$ $(= o$, lorsque $\varphi = o$.

14°. Si AC étant horizontal, DM passe au-dessus de

DH, comme dans le ſecond cas, on aura $\left(f = \frac{\varphi p \sqrt{s^2 + t^2}}{\pi s + \varphi t}\right)$ $(= o$, lorſque $\varphi = o)$.

15°. Si AC etant toûjours horizontal, DM tombe ſur DH, S etant alors infinie, on aura ſeulement $\left(f = \frac{p\varphi}{\pi}\right)$ comme on l'a ſuppoſé.

16°. Si AC eſt vertical, on aura dans le premier cas $b = CB = o$; ce qui donnera auſſi $\left(f = \frac{\pi \sqrt{s^2 + t^2}}{\pi s - \varphi t} \times p\right)$ $\left(= \frac{\sqrt{s^2 + t^2}}{s} \times p\right.$, lorſque $\left.\varphi = o\right)$.

17°. Si AC étant toûjours vertical, DM tire en bas comme dans le troiſieme cas, on aura encore $(b = o)$, ce qui donnera $\left(f = \frac{\pi p \sqrt{s^2 + t^2}}{\varphi t - \pi s}\right)$.

18°. Enfin ſi AC étant toûjours vertical, DM tombe ſur DE, on aura $s = o$, ce qui donnera $f = \frac{\pi p}{\varphi}$, & f infinie quand $\varphi = o$.

Une verge étant poſée dans un angle, trouver le point où il faut ſuſpendre un corps, pour commencer à la faire gliſſer d'un côté ou d'autre.

4°. Soient encore deux plans rudes inclinés CA, BA, ſur leſquels on ait poſé la verge ſolide & rude GF, à laquelle il faut ſuſpendre le poids N en H; en ſorte que cette verge ſoit prête à gliſſer d'un côté ou d'un autre, & cela ſans avoir égard à ſon poids. Pour trouver le poids H, on le partagera par penſée en deux autres I & L, que l'on concevra ſuſpendus en G & F, & qui ſoient entre eux réciproquement comme les diſtances FH, GH; on prendra ſur les directions FL, GI les parties FQ, GVV qui expriment ces poids; on menera les perpendiculaires FT, GAE, aux plans CA, BA, & ſur ces plans & ſur leurs perpendiculaires les perpendiculaires QS, QT, VVK, $VVAE$, afin de diviſer les efforts FQ, GVV, dans les efforts FT, FS; GAE, GK. On prendra auſſi ſur GF prolongée, ſi l'on veut, les parties FP, GX égales entr'elles, pour marquer FIG. IV.

l'effort que cette ligne fait selon sa longueur vers F & vers G; & menant les perpendiculaires PO, PV; XY, XZ, sur les plans & sur leurs perpendiculaires, on divisera les efforts FP, GX, dans les efforts FO, FV; GY, GZ, & on considerera que quand le point H est tel que FG doive glisser vers B, demeurant cependant en equilibre, l'effort que G fait selon GY doit vaincre l'effort opposé de I selon GK plus le frotement qui naît des pressions GZ, GAE; & l'effort de L selon FS doit vaincre l'effort contraire de FG selon FO plus le frotement qui naît des pressions FV, ET, d'où nous tirerons l'inconnuë GH.

Mais quand le point h est tel que G doive glisser vers A, alors l'effort GK de I doit vaincre l'effort contraire GY, plus le frotement qui vient des pressions GZ, GAE; & l'effort FO de GF doit en même-tems vaincre l'effort contraire FS de L plus le frotement produit par les charges FV, FT du plan AC.

Soit donc appellée la base AD du plan AB, b; sa hauteur BD, h; le rapport du poids de FG à son frotement, en la tirant directement sur AB supposé horizontal, $(=\frac{\pi}{\varphi})$ la base AE du plan AC, B; sa hauteur CE, H; le rapport du poids de FG à son frotement sur AC pris comme cy-dessus $(=\frac{P}{F})$. Soient aussi les longueurs arbitraires AC, AB, $=c$, menés les perpendiculaires FR, GM sur BA, CA, appellés GM, T; FM, S; GR, s; FR, t; GF, q; la force dans GF, f; GH, x, & le poids N, a; on aura $HF=q-x$; ce qui donnera l'Analogie : $GF=q$ | $HF=q-x$ || $a=N$ | $I=(\frac{aq-ax}{q})$, d'où l'on tirera $(L=N-I=\frac{ax}{q})$. On aura aussi à cause des triangles rectangles semblables & des paralleles : $GF=q$ est à $FM=S$, comme la force $FP=f$, est à l'effort $(FO=\frac{fS}{q})$; & $GF=q$, est à $GM=T$, comme la force $FP=f$, est à l'effort $(FV=\frac{fT}{q})$. On aura aussi, comme $AC=c$,

est à $CE = H$; ainsi la force $FQ = \frac{ax}{q}$, à l'effort $FS = \frac{Hax}{cq}$; & comme $AC = c$, est à $AE = B$, ainsi la force $FQ = \frac{ax}{q}$, à l'effort $(FT = \frac{Bax}{cq})$. Faisant encore comme P est à F, ainsi l'effort $FV + FT = \frac{fT}{q} + \frac{Bax}{cq}$, à un quatriéme terme, on aura $(\frac{FTf}{qP} + \frac{BaxF}{cqP})$ pour tout le frotement en F. Ce qui donnera dans le premier cas l'effort FS égal à tout ce frotement plus l'effort FO, ou $(\frac{Hax}{cq} = \frac{FTf}{qP} + \frac{BFax}{cqP} + \frac{fs}{q})$, d'où l'on tire $(\frac{\overline{PH - FB}}{\overline{SP + TF}} \times \frac{ax}{c} = f)$.

Faisant de même comme $GF = q$ est à $GR = s$, ainsi la force $GX = f$ à l'effort $GY = \frac{fs}{q}$; & comme $GF = q$ est à $FR = t$, ainsi la force $GX = f$ à l'effort $GZ = \frac{ft}{q}$; & comme $BA = c$ est à $BD = b$, ainsi la force $GVV = \frac{aq - ax}{q}$ à $(GK = \frac{baq - bax}{cq})$; & comme $AB = c$ est à $AD = b$, ainsi $GVV = \frac{aq - ax}{q}$ à $(GAE = \frac{baq - bax}{cq})$; & enfin comme π est à φ, ainsi les deux pressions ensemble $GZ + GAE = \frac{ft}{q} + \frac{baq - bax}{cq}$ à un quatriéme terme $(\frac{ft\varphi}{\pi q} + \frac{baq\varphi - bax\varphi}{\pi cq})$, on aura tout le frotement en G. Egalant donc dans le premier cas l'effort GY à ce frotement total, & à GK, on aura l'égalité $(\frac{fs}{q} = \frac{ft\varphi}{\pi q} + \frac{baq\varphi - bax\varphi}{\pi cq} + \frac{baq - bax}{cq})$; d'où l'on tire $(f = \frac{\pm baq\pi \mp bax\pi \pm baq\varphi \mp bax\varphi}{\overline{\pm s\pi \mp t\varphi}\, c})$.

Enfin égalant ces deux valeurs de f, on en tire aussi $(x = \frac{\overline{b\pi + b\varphi} \times \overline{SP + TF} \times q}{\overline{PH - FB} \times \overline{\pm S\pi \mp t\varphi} \times \overline{\pm b\pi \pm b\varphi} \times \overline{SP \pm TF}})$ $(= \frac{Shq}{sH + Sb})$ lorsque φ & F sont $= 0$.

Pour le second cas on a au lieu de la premiere égalité cy-dessus : $(\frac{Sf}{q} = \frac{FBax}{Pcq} + \frac{FTf}{Pq} + \frac{Hax}{cq})$, d'où l'on tire

($s = \overline{HP + FB} \over \overline{SP - ET}$ $\times \frac{xa}{c}$), & au lieu de la 2e ($\frac{baq - bax}{cq} = \frac{baq\varphi - bax\varphi}{\pi cq} + \frac{ft\varphi}{\pi q} + \frac{sf}{q}$), d'où l'on tire ($f = \frac{\pi baq - bax\pi - baq\varphi + bax\varphi}{t\varphi c + s\pi c}$); & comparant ces deux valeurs de f, on en tire la valeur de $Gh = \left(x = \frac{\overline{\pi b - b\varphi} \times \overline{SP - FT} \times q}{\overline{HP + FB} \times \overline{t\varphi + s\pi} + \overline{SP - FT} \times \overline{b\pi - S\varphi}}\right) \left(= \frac{Sbq}{Hs + bo}\right)$; lorsque φ & F sont $= o$, comme cy-dessus.

Il est évident que si l'on veut avoir la partie Hh (qu'on pourroit appeller *Aquinétique*, puisqu'un corps suspendu dans toute son étenduë y demeure en repos), on n'a qu'à prendre les differences des deux valeurs GH, Gh, ou des deux x cy-dessus, qui sera $= o$, lorsque φ & F sont $= o$.

Lorsque AB est un plan horizontal, & AC un plan vertical, les lignes BD, AE étant alors $= o$, $AE = AD = AC = CE$; $GR = S = GM = T$, & $FR = t = FM = S$, la premiere valeur de x se change en celle-cy; $\left(x = \frac{\overline{PS + TF}}{T} \times \frac{\varphi}{P\pi + F\varphi} \times q\right) = HG = o$, lorsque φ & F sont $= o$; & toute cette partie GH est *Aquinétique* & $= o$, lorsque φ & F sont $= o$.

Trouver l'élevation d'une échelle, afin qu'un homme étant tout au haut, elle soit prête à glisser dans un plan vertical.

FIG. V. Si l'on suppose que GF soit une échelle appuyée contre un mur vertical CM, N le poids du corps d'un homme situé tout au haut en F, & qu'on veuille que cette échelle demeure stable dans la situation la plus droite qu'il se puisse; on supposera que cet homme étant en F, le centre de gravité tant de l'homme que de l'échelle soit en H. Ainsi prenant sur GF le centre de gravité & de l'échelle, nommant $G\&$, a, & $F\&$, $q - a$, le poids de l'échelle e, & celui de l'homme h. On aura à cause du centre de gravité commun $e \mid h \parallel FH \mid H\&$, & $e + h \mid h \parallel F\& = q - a \mid \left(\frac{hq - ha}{e + h} = H\&\right)$; ce qui donnera $GH = \frac{ae + ab + qh - ah}{e + h} = \frac{ae + qh}{e + h}$, & cette valeur étant égalée à x cy-dessus, donnera

l'égalité suivante : $\left(\frac{ae+qh}{e+h} = \frac{PS+TF}{T} \times \frac{\phi}{P\pi+F\phi} \times q\right)$ Dans laquelle substituant la valeur de $T = GM = \sqrt{q^2 - s^2}$, il vient cette autre égalité $\left(\frac{ae+qh}{e+h} - \frac{F\phi q}{P\pi+F\phi} = \frac{P\phi q s}{P\pi+F\phi\sqrt{q^2-s^2}}\right)$ & $\left(\frac{ae+qh}{e+h} \times \overline{P\pi + F\phi} - F\phi p = \frac{P\phi q s}{\sqrt{q^2-s^2}}\right)$ & $\left(\frac{aeP\pi + aeF\phi + qhP\pi - F\phi q e}{e+h} = \frac{P\phi q s}{\sqrt{q^2-s^2}}\right.$, & quarrant le tout, & nommant qb^2 le premier membre de cette équation, on a $\left(q^2 b^4 = \frac{P^2\phi^2 q^2 s^2}{q^2-s^2}\right)$, & $\left(b^4 q^2 = \overline{P^2\phi^2 + b^4} \times s^2\right)$, & enfin $\frac{b^4 q^2}{P^2\phi^2 + b^4} = s^2$, ou $\left(s = \frac{b^2 q}{\sqrt{P^2\phi^2 + b^4}}\right)$ FM desirée, qui est le sinus de l'angle FGM, GF étant prise pour sinus total. On a $FM = FG$ lorsque $\phi = o$, ce qu'on connoît d'ailleurs.

Trouver la situation d'une échelle, dans laquelle elle est prête à glisser, par sa propre pesanteur dans un plan vertical.

Si l'on veut avoir la situation dans laquelle l'échelle est prête à glisser par son seul poids, on supposera le poids N de l'homme $= h = o$; ce qui donnera $(qb^2 = aP\pi + aF\phi - F\phi q)$ dans l'égalité cy-dessus, & dans la valeur de s.

Enfin si l'on suppose en même tems que $a = G$ & $= \frac{1}{2}$ $GF = \frac{q}{2}$, & toûjours $h = o$, on aura $\left(qb^2 = \frac{qP\pi}{2} - \frac{qF\phi}{2}\right)$ & $\left(b^2 = \frac{P\pi - F\phi}{2}\right)$ & $\left(b^4 = \frac{\overline{P\pi - F\phi}^2}{4}\right)$; ce qui changera la valeur de s cy-dessus en cette autre $\left(s = \frac{q \times \overline{P\pi - F\phi}}{\sqrt{4P\phi + \overline{P\pi - F\phi}^2}}\right)$ qui donne $(s = \frac{4}{5}q)$, en supposant $(\pi \mid \phi \parallel P \mid F \parallel 3 \mid 1)$. On a encore $(s = q)$ ou $FM = FG$ lorsque $\phi = o$.

Trouver la situation d'une échelle ou d'une prisme posée de travers contre un mur dans laquelle il est prêt à tomber.

5°. Soit encore AB une verge solide fixe par un de ses bouts sur le sol en B, & s'appuyant de l'autre A contre un FIG. VI.

mur vertical *CEAF*. Soit *BC* une perpendiculaire au mur menée du point *B* dans le plan horizontal, & *CE* une verticale menée sur le plan vertical. Je suppose de plus que la droite solide *AB* soit mobile autour de *CB*, comme axe, & qu'elle soit tellement panchée à l'égard de la verticale *CE*, qu'elle soit prête à glisser de *E* vers *A*, & à tomber ; & je demande quelle est son obliquaire dans cet état à l'égard de *CE*.

Pour cet effet je décris du point *C* comme centre avec l'intervale *CA* un arc de cercle qui rencontre *CE* en *E* ; je mene la perpendiculaire *AD* sur *CE*, & je cherche quelle est la valeur de l'arc *AE* en degrés, ou quel est son sinus *AD*. Et afin d'y parvenir je considere que quelque poids *O* qu'on suspende à la verge *AB*, & en quelque endroit *Q* qu'on l'attache, il n'y apportera aucun changement ; & lorsqu'elle sera une fois prête à tomber, elle le sera toûjours, quoiqu'on y ajoûte. Car en quelque endroit *Q* qu'on attache ce poids, il fera la même chose que s'il étoit partagé en deux autres *F*, *P* suspendus en *A* & *B*, qui fussent entr'eux dans le rapport réciproque de *BQ* à *QA*, puisqu'alors *Q* seroit le centre de la gravité de ces deux poids *P* & *F*. Or l'effort du poids *P* seroit entierement aneanti par la résistance du point *B*. Donc en quelque endroit qu'on suppose *Q*, il ne fera pas un autre effet, que si on le suspendoit en *A*, à l'égard du renversement de *AB*. Supposant donc une partie du poids de la verge, ou du poids de cette verge & du poids *O* considerés comme un seul *F* suspenduë en *A*, menant le rayon *CA* & la tangente *AI* à l'arc *EA*, prenant sur *AF* la partie *AG* pour exprimer ce poids, menant sur *AC*, *AI* les perpendiculaires *GH*, *GI*, je divise l'effort *AG* dans les efforts *AH*, *AI* ; & élevant encore la prpendiculaire *HM* au plan *CEA* qui rencontrera *BA* comme en *M*, & divisant la résistance de la verge *BA* ou du point fixe *B* selon *BA* dans les deux efforts *MH*, *HA*, je considere que l'effort *MH* fait tout le frotement en *A* qui doit être vaincu par l'effort *AI* du poids *F*, puisque *AI* est la route du point *A*.

A l'égard

A l'égard de l'effort AH du poids F, il est égal & par conséquent aneanti par l'effort contraire HA de la résistance B, puisqu'on suppose que le point B est immobile.

Nommant donc F ou AG, p; AB, l; CB, d; CE ou AC, r; AD, x; on aura $CD = \sqrt{r^2 - x^2}$; & $AC = r = \sqrt{l^2 - d^2}$, à cause des angles droits ADC, ACB. De plus les angles alternes ACD, CAF, dans les triangles rectangles ACD, CAF, donneront l'Analogie: $r = AC | CD = \sqrt{r^2 - x^2} \| AG = p | \left(\frac{p\sqrt{r^2 - x^2}}{r} = AH\right)$: & $AC = r | AD = x \| AG = p | GH = \left(AI = \frac{px}{r}\right)$. De plus les triangles rectangles AHM, ACD, semblables à cause de l'angle commun A, donneront l'Analogie: $AC = r | CB = d \| AH = \frac{p\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \Big| \left(HM = \frac{pd\sqrt{r^2 - x^2}}{r^2}\right)$.

Enfin supposant que le poids de AB est à son frotement sur le plan AEC supposé horizontal en la tirant parallelement à ce plan, comme π est à φ, on multipliera la valeur de HM cy-dessus par le rapport $\left(\frac{\varphi}{\pi}\right)$, ce qui donnera $\left(\frac{pd\varphi}{\pi r^2}\sqrt{r^2 - x^2}\right)$ pour le frotement en A, qu'il faut égaler à l'effort AI du poids F; ce qui donne l'égalité $\left(\frac{pd\varphi\sqrt{r^2 - x^2}}{\pi r^2} = \frac{px}{r}\right)$, d'où l'on tire $(d\varphi\sqrt{r^2 - x^2} = \pi r x)$, & quarrant chaque membre on a $(d^2\varphi^2 r^2 - d^2\varphi^2 x^2 = \pi^2 r^2 x^2)$; & $\left(\frac{d^2\varphi^2 r^2}{\pi^2 r^2 + \varphi^2 d^2} = x^2\right)$, & enfin $\left(\frac{d\varphi r}{\sqrt{\pi^2 r^2 + \varphi^2 d^2}} = x\right)$ desirée; dans laquelle valeur substituant, si l'on veut, la valeur de $r = \sqrt{l^2 - d^2}$, on trouve $\left(x = \frac{d\varphi\sqrt{l^2 - d^2}}{\sqrt{\pi^2 l^2 - \pi^2 d^2 + \varphi^2 d^2}}\right)$ $(= o$, lorsque $\varphi = o)$, comme on le sçait d'ailleurs.

Si l'on suppose $\frac{\varphi}{\pi} = \frac{1}{1}$, on aura $(-\pi^2 d^2 + \varphi^2 d^2 = -2\pi^2 d^2)$, ce qui donnera $\left(x = \frac{d\sqrt{l^2 - d^2}}{\sqrt{3l^2 - 2d^2}}\right)$, & $AC | AD \| \sqrt{l^2 - d^2} | \frac{d\sqrt{l^2 - d^2}}{\sqrt{3l^2 - 2d^2}} \| \sqrt{3l^2 - 2d^2} | d$, & $\left(AD = \frac{d \times AC}{\sqrt{3l^2 - 2d^2}}\right)$.

On voit que la valeur du poids $F = p$ n'entre point dans la composition de x; ce qui confirme ce qu'on a avancé au commencement de cette Analyse, que tel que fût le poids F l'arc AE seroit toûjours le même, tandis que BC, BA, demeureroient les mêmes.

Si l'angle ABC étoit de 45^d, on auroit $(\sqrt{l^2 - d^2} = d)$ & $(2d^2 = l^2)$, ce qui donneroit $\left(x = \frac{d^2}{\sqrt{2l^2}} = \frac{d^2}{\sqrt{4d^2}} = \frac{d^2}{2d} = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}AC = AD\right)$, ce qui donneroit l'arc AE de 30^d.

Si l'angle ABC est de 60^d, & BAC de 30, on aura $(BC = \frac{1}{2}AB)$ & $(BC^2 = d^2 = \frac{1}{4}AB^2 = \frac{1}{4}l^2)$, ce qui donnera $(\sqrt{l^2 - d^2} = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = \frac{l}{2}\sqrt{3})$, & $(\sqrt{3l^2 - 2d^2} = \sqrt{\frac{10}{4}l^2} = \frac{l}{2}\sqrt{10})$; ce qui donneroit $\left(x = \frac{d\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{10}d\sqrt{30}\right) \frac{AC}{\sqrt{10}} = AD$, & l'arc AE de 18^d 27 minutes.

Enfin si l'angle ABC est de 30^d ou BAC de 60, on aura $(BC = d, \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}l^2} = \sqrt{\frac{1}{4}l^2})$, & $(2d^2 = \frac{1}{2}l^2)$ & $(\sqrt{3l^2 - 2d^2} = \sqrt{\frac{5}{2}l^2})$, & enfin $\left(x = AC \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{AC}{\sqrt{2}}\right)$: & $(\sqrt{2} \mid 1 \parallel AC \mid AD = x)$ ou $(2 \mid 1 \parallel AC^2 \mid AD^2)$. Donc l'arc AE seroit alors de 45^d.

On peut remarquer que si $d = CB = 0$, $AD = 0$; & que si $d = CB = l = AB$, alors $(AD = AC$, c'est-à-dire que le point A seroit alors sur la ligne horizontale CR.

SECOND MEMOIRE.

Trouver la force avec laquelle il faut pousser un coin, pour separer un corps ou directement, ou sur un point fixe, ou sur deux.

1704. 2. Juillet. 1°. SI au lieu de concevoir que la puissance M (1. Fig.) tient le poids D en équilibre sur le plan incliné AC en tirant horizontalement, tandis qu'une autre puissance N arrête le plan incliné en le repoussant selon l'horizon-

tale NO, comme dans le premier Memoire ; on ſuppoſe que la puiſſance M retient ſeulement le poids D, tandis que la puiſſance N pouſſe le plan incliné ACB ſous ce poids ; le plan incliné ACB s'appellera alors un coin re-ctangle. Or il eſt évident que les deux puiſſances M & N étant oppoſees doivent être égales, puiſqu'elles ſont en équilibre entr'elles. Donc les mêmes dénominations ſub-ſiſtant, comme dans l'article 3. du premier Memoire, on aura la puiſſance $\left(N = \frac{\varphi b + \pi b}{\pi b - \varphi b} = f\right)$ comme dans le 7ᵉ cas de cet article 3. A quoy il faudra ajoûter le frote-ment cauſé par le poids D, & même par le plan ACB ſur le plan horizontal PQ $\left(= \frac{\overline{D + ACB} \times \varphi}{\pi}\right)$.

2°. Si l'on joint enſemble deux coins égaux ſemblables au précédent dans la droite BC pour en compoſer le coin ſcalene ACa (2. *Fig.*), que l'on introduiſe ce coin dans la fente TOt, d'un corps $TQPt$, dont on veut écarter les deux portions $TQÆ$, $tPÆ$, en les faiſant gliſſer ſur le plan horizontal QP ; on cherchera premierement la ré-ſiſtance que ces deux parties font à être ſeparées direc-tement dans leur partie commune $OÆ$ ſelon la droite YXy perpendiculairement à $OÆ$; à quoy on ajoûtera la réſiſtance qui vient du frotement de la partie $TQÆ$ ſur le plan QP, lorſqu'elle s'écarte de la partie $tPÆ$, ſçavoir $\left(\frac{\varphi}{\pi} \times TQÆ\right)$, & on appellera ces deux réſiſtances enſem-ble p, parce qu'elles ſont le même effet ici que le poids D du cas précédent. On partagera enſuite la force motrice M ou f en deux égales, qu'on appliquera à chaque moi-tié du coin ABC, aBC ; alors ce cas deviendra tout ſem-blable au précédent, en regardant la ſurface dans la-quelle les deux coins s'appuyent l'un ſur l'autre comme le plan horizontal PQ du cas précédent ; ce qui donnera pour chaque force qui doit être appliquée aux moitiés ABC, aBC, du coin $\left(\frac{\varphi b + \pi b}{\pi b - \varphi b} \times p\right)$. Donc la force totale M ou f deſirée $\left(= 2p \times \frac{\overline{\varphi b + \pi b}}{\pi b - \varphi b}\right)$, ce qui donne auſſi

$(p = \frac{f}{2} \times \overline{\frac{\pi b - \varphi b}{\varphi b + \pi b}})$. On a auſſi $(f = \frac{2pb}{b})$ & $(p = \frac{fb}{2b})$, lorſque $\varphi = 0$.

3°. Mais lorſqu'il faut ſeparer les parties *TQÆ*, *tPÆ* (3. *Fig.*) ſur un point fixe *Æ*, l'effort *M* eſt très-different du précédent ; & pour le trouver je le ſuppoſe partagé en deux parties égales, & chaque moitié appliquée à chaque demi-coin *ABC*, *aBC*, comme cy-deſſus agiſſante ſelon les directions verticales *ND*, *nd*, qui paſſent par les centres de gravité *D*, *d*, des faces *TI*, *ti*, du coin. Je prends ſur ces verticales les parties arbitraires *ND*, *nd*, qui marquent ces deux forces ou $\frac{1}{2}f$. Je mene les perpendiculaires *HDL*, *hdl*, à ces faces, & je diviſe chacun des efforts *ND*, *nd*, dans les perpendiculaires & paralleles *NT*, *NH*, *nt*, *nh*, aux faces *AC*, *ac* : je mene encore les perpendiculaires *DE*, *de*, à l'axe du coin *BC*, & je prends deſſus les parties *DE*, *de*, qui expriment les reſiſtances que ces deux coins rectangles ſe font l'un ſur l'autre dans leur baſe commune *BC*. Je diviſe de même les efforts *ED*, *ed*, dans les paralleles & perpendiculaires *EG*, *EF*, *eg*, *ef*, aux faces du coin, & je conſidere que les efforts *HD*, *GD*, *hd*, *gd*, font tout le frotement en *D*, *d*, & que les efforts *NH*, *nh*, de *M* doivent vaincre ces frotemens, & outre cela les efforts contraires *EG*, *eg*, de la réſiſtance *BC*.

Je réduis enſuite par penſée toutes les réſiſtances des parties de *OÆ* dans leur centre *X* agiſſantes ſelon la perpendiculaire *YXy* à *OÆ*, en ſuppoſant que ces parties ſont au moins un peu extenſibles (puiſque l'experience nous apprend qu'il n'y a point de corps qui n'ait du reſſort, & que les filets de verre même ſont fort ſenſiblement extenſibles) ; & prolongeant les directions *HGDL*, *hgdl*, & *TD*, *td*, je mene deſſus les perpendiculaires *ÆL*, *Æl*, *ÆR*, *Ær* ; & je conſidere que l'effort *NH* diminué de l'effort contraire *EG*, & multiplié par ſon levier *ÆR* ſe joint à l'effort de *OÆ* ſelon *YXy* multiplié par ſon levier *ÆX* pour équilibrer l'effort *HD* plus l'effort *GD* mul-

tiplié par leur levier commun $ÆL$, les premiers agiſſant autour de $Æ$ du ſens contraire des derniers, & de même pour l'autre face aC du coin.

Ceci étant établi, j'appelle p la réſiſtance en YXy multiplié par $ÆX$; $ÆL$, a; $ÆR$, d; AM, h; MC, b; AC, c; $ND = nd$, $\frac{1}{2}f$; & DE, x. Or les triangles rectangles NDT, ACM, DEF, ſemblables en ce ſens, donnent les Analogies: $AC = c \,|\, CM = b \,||\, ND = \frac{1}{2}f \,|\, \frac{fb}{2c} = DT = NH$, & $AC = c \,|\, AM = h \,||\, ND = \frac{f}{2} \,|\, NT = DH = \frac{hf}{2}$. On aura auſſi: $AC = c \,|\, AM = h \,||\, DE = x \,|\, DF = \frac{hx}{c} = EG$, & $AC = c \,|\, CM = b \,||\, DE = x \,|\, EF = DG = \frac{bx}{c}$, ſuppoſant auſſi que π eſt à φ, comme le poids du coin AC à ſon frotement ſur la face TO du corps à fendre ſuppoſée horizontale, en tirant parallelement à cette face, on aura l'Analogie, comme π eſt à φ, ainſi les preſſions DH plus DG enſemble $(= \frac{bf}{2c} + \frac{bx}{c})$ à un 4ᵉ terme $(\frac{bf\varphi}{2c\pi} + \frac{bx\varphi}{c\pi})$ qui ſera la valeur du frotement cauſé en D par les preſſions DH, DG.

Egalant donc maintenant l'effort NH aux deux frotemens DH, DG, & à l'effort contraire EG, on a l'égalité $(\frac{\pi fb}{2c\pi} = \frac{bf\varphi + 2bx\varphi + 2hx\pi}{2c\pi})$. D'où l'on tire $(\frac{\pi fb - bf\varphi}{2b\varphi + 2h\pi} = x)$.

On aura auſſi l'équilibre $(\overline{HD + GD} \times ÆL = \overline{NH - EG} \times ÆR + p)$; c'eſt-à-dire $(\frac{ahf + 2abx}{2c} = \frac{fbd - 2hxd + 2cp}{2c})$. D'où l'on tire $(2abx + 2hdx = fbd + 2cp - ahf)$, & $(x = \frac{fbd + 2cp - ahf}{2ab + 2hd})$.

Enfin égalant le premier x avec le ſecond, on aura l'égalité $(\frac{\pi fb - hf\varphi}{b\varphi + h\pi} = \frac{fbd + 2cp - ahf}{ab + hd})$, & $(2cpb\varphi + 2cph\pi = \overline{abh\pi + ab^2\pi - cb^2\varphi - db^2\varphi} \times f)$, & enfin $\left(f = \frac{2cp \times \overline{b\varphi + h\pi}}{\overline{a\pi c^2 - cb^2 - db^2} \times \varphi}\right)$ & $\left(f = \frac{2p \times \overline{b\varphi + h\pi}}{\overline{a\pi - c\varphi} \times c}\right)$ en ſuppoſant $AC = ÆR$, ce qui eſt libre.

On auroit donc auſſi ($p = \frac{fc}{2} \times \frac{a\pi - c\varphi}{b\varphi + h\pi}$), ce qui ſe réduit à ($f = \frac{2ph}{ac}$) & ($\frac{fac}{2b} = p$) lorſque $\varphi = o$).

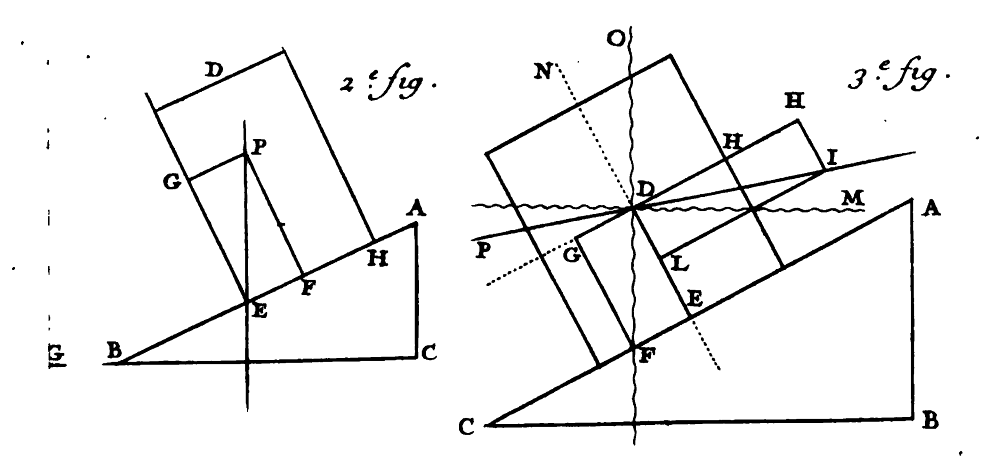
4°. Si au lieu d'un point fixe *P*, on ſuppoſoit que le corps à fendre fût ſitué ſur le plan horizontal *Qq* (4. *Fig.*) ſans pouvoir gliſſer, en ſorte que ſes deux moitiés dûſſent s'écarter l'une de l'autre en tournant ſur leurs extremités *Q*, *q*, comme points fixes; ayant prolongé les directions *HD*, *hd*, des faces du coin, on meneroit deſſus les perpendiculaires *QÆ*, *qæ*, & ayant multiplié la réſiſtance en *X* par la diſtance perpendiculaire *QY*, *qy*, des points *Q*, *q*, à ſa direction *YXy*, on meneroit encore les perpendiculaires *QV*, *qu*, aux faces du coin prolongées, & ayant nommé *QÆ*, *a*; *QV*, *d*, & le produit de la réſiſtance *X* par *QY*, *r*, & le reſte demeurant comme cy-deſſus, on auroit encore *f* & *p* des mêmes valeurs, comme il eſt évident.

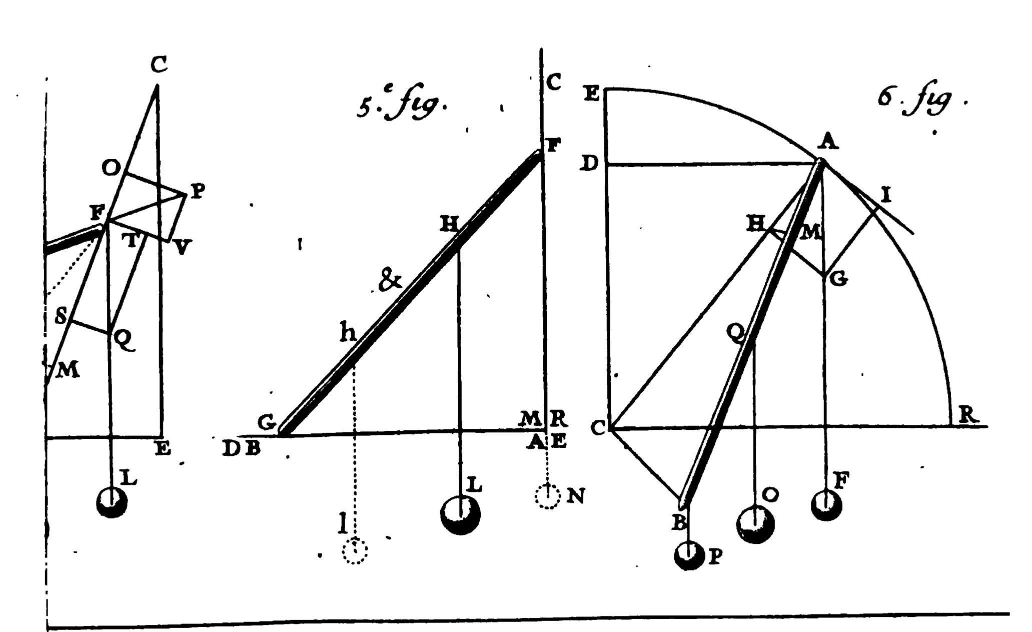
SUITE DU SECOND MEMOIRE,

Qui comprend ce qui ſe fait ordinairement avec la vis ancienne ou à écrou, & la vis-ſans-fin.

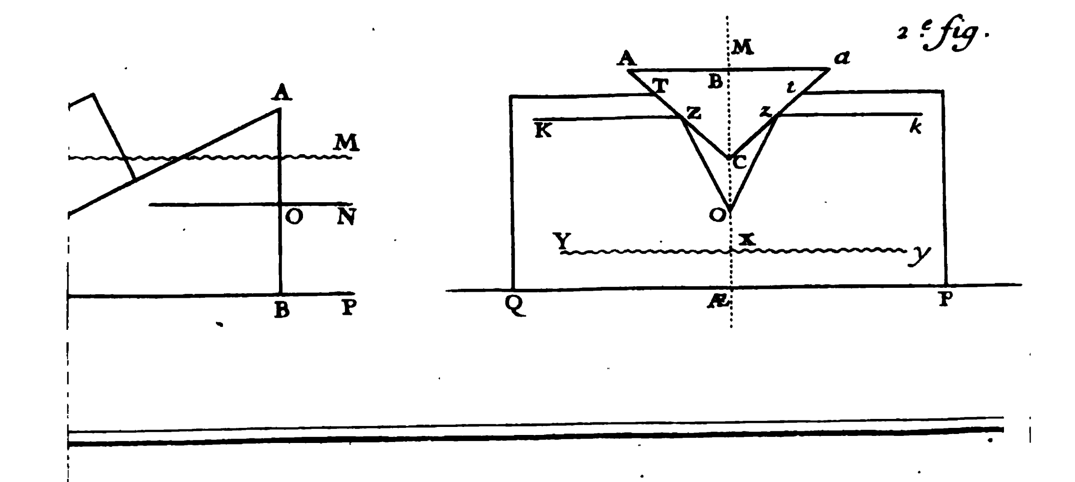
De la Force de la vis ancienne, y compris les frotemens contre ſon écrou, & contre ſa baſe.

5°. Soit encore un plan incliné (5. & 6. *Fig.*) dont *AB* ſoit la hauteur, & *CB* la baſe, & *DCA* un autre plan incliné tout ſemblable & égal au précédent, dont *AD* ſoit la baſe, & *CD* la hauteur, qui ſoit poſé ſur le premier en ſens renverſé, en ſorte que leurs hypothenuſes *AC* ſe couvrent. Si l'on met ſur le plan *ADC* un poids *E*, on pourra le concevoir diſtribué à tous les points du plan *AC*; & ſi l'on ſuppoſe qu'une puiſſance *F* pouſſe le plan incliné *ACB* ſelon la droite *EG* parallele à la baſe *CB*, tandis qu'une autre puiſſance *G* égale à la premiere retient le plan incliné *ACB* ſelon la même *GF*; alors *ACB* ſera ſeulement





Second memoire



regardé comme un plan incliné, & *ADC* comme un poids. Mais si l'on conçoit *G* poussante, & *F* seulement résistante, *ACB* sera alors regardé comme un coin. Et de même s'il s'agit de presser des corps *E* ou *I*, qui soient de côté ou d'autre des bases des plans inclinés *AD*, *CB*, alors ces plans sont simplement regardés comme des coins; les plans inclinés ne se disant qu'à l'égard des poids à élever, & non pas à l'égard de toutes sortes de pressions.

Si l'on tourne maintenant le rectangle *ADCB* (5. *Fig.*) sur un cylindre droit, en sorte que ses côtés *CB*, *AD*, soient paralleles aux circuits de ses bases, la droite *AC* sera changée dans une veritable hélice ou vis; de sorte que si *CB* est égale en longueur au circuit d'une des bases developée, *AC* formera la longueur d'un des pas de l'hélice, & *AB* sa hauteur; ou si *AB* est égale à toute la hauteur du cylindre, telle qu'elle soit, *AC* sera égale à la longueur de l'hélice entiere, & *CB* au circuit de sa base pris autant de fois qu'il y a de pas dans la vis.

Supposant donc que la puissance *F* ou *G* agisse toûjours selon une tangente à la surface du cylindre laquelle soit parallele à sa base, la force sera la même ou pour faire monter le plan incliné *ADC* sur *ACB*, ou pour introduire le coin *ACB* sous le plan incliné *ADC*, que si ces deux plans étoient encore sur un même plan. De sorte que si la pression *E* ou *I* qu'il faut produire selon *EI*, c'est-à-dire selon l'axe de la vis, est donnée $= p$, & qu'on veüille trouver la force *f* necessaire pour pousser le plan incliné *ADC*, ou le coin *ACB*, c'est-à-dire pour faire tourner ou la vis ou l'écrou, on aura selon le septiéme cas de l'article 3. du premier Memoire ($f = \frac{\overline{\varphi b + \pi h}}{\pi b - \varphi h} \times p$). Ou si *f* est donnée, & qu'on veüille connoître l'effort *p*, qu'elle est capable de produire selon la longueur du cylindre de la vis, on aura ($p = f \times \frac{\overline{\pi b - \varphi h}}{\varphi b + \pi h}$). Ou *h* signifie ou la hauteur d'un des pas, & *b* le centre de la base; ou *h* la hauteur entiere de la vis, & *b* le cercle de la base multiplié

par le nombre des pas ; ou enfin h la tangente de l'élevation de la vis sur le cercle de sa base, & b le sinus total ; π & φ marquant toûjours le rapport du poids de l'écrou à son frotement sur le plan incliné de la vis supposé horizontal. On aura $(\frac{hp}{b} = f)$ & $(\frac{bf}{h} = p)$ lorsque $\varphi = o$.

Où il faut remarquer que nous n'avons point égard au frotement causé par les résistances E ou I contre un des colets de l'écrou ou de la vis, selon que l'un des deux est mobile.

Et pour avoir égard à ce frotement, on considerera que le frotement du colet CB de la vis (par exemple) contre la sole GH ne se fait pas également dans tous ses points, comme si l'on tiroit ce colet en ligne droite sur GH ; mais chaque point de ce colet résiste plus ou moins, selon qu'il est plus ou moins éloigné de l'axe de la vis, & cela à l'égard de la force motrice qu'on suppose toûjours appliquée au centre de gravité de la face de la vis ou de l'écrou. On pourroit penser aussi que les points de ce colet devroient resister encore à proportion de leurs vîtesses particulieres autour de l'axe. Mais on verra par les experiences suivantes que dans le commencement du frotement, ces vîtesses n'ont nul effet. Il reste donc que le centre du frotement du colet soit le même que son centre de gravité g, en supposant ce colet dévelopé sur sa tangente ce en $bcde$ (*Fig.* 7. & 8.)

Appellant donc d la distance du milieu de la face d'un des pas de la vis à son axe AB ; e la distance ag du même axe au centre de frotement, & $(\frac{F}{P})$ le rapport du frotement de ce colet sur GH à sa pesanteur, on aura pour son frotement comparé à la force motrice supposée au centre des pas $(\frac{peF}{dP})$, ce qui donnera enfin $(f = \overline{\frac{\varphi b + \pi h}{\pi b - \varphi h} + \frac{Fe}{Pd}} \times p)$ & $(p = \frac{dfP \times \overline{\pi b - \varphi h}}{dP \times \overline{\varphi b + \pi h} + Fe \times \overline{\pi b - \varphi h}})$, & $(f = \frac{hp}{b})$ ou $(p = \frac{bf}{h})$ lorsque φ & F sont $= o$, comme cy-dessus.

De la

De la force de la vis-sans-fin, y compris les frotemens contre la dent de la roue, contre son colet, & contre celui de la vis.

6°. Supposant encore que *D* (*Fig.* 9. & 10.) soit une dent de la roue d'une vis sans-fin, qui est obligée de se mouvoir selon la droite *DG* tangente au cercle de cette roue, par la pression que lui fait la partie *AC* de la vis. Soit *CB* (*Fig* 9) une portion du circuit de la vis sans-fin qui répond à *AC*, & *AB* une parallele à son axe; ensorte que *ACB* est un triangle rectangle dont *AC* est l'hypothenuse, & *CB* la base. Si l'on conçoit la force motrice appliquée au circuit de la vis sans fin, la vis deviendra un coin *ABC* rectangle en *B*, poussé par une puissance selon sa base *BC*, ou selon sa parallele *OE*, entre la dent *D* qui tient lieu de poids, & le colet de son arbre, dont la résistance contre son pallier est marquée par le corps solide *QP*, le long duquel on suppose le coin *ABC* glisser. De même la dent *D* ne sçauroit qu'avancer selon *DG*, étant retenuë par la pression du colet de sa rouë contre son pallier, que je represente par le corps solide *EF* contre lequel elle est obligée de glisser. De sorte que la puissance *N* a non-seulement le poids *D* à faire avancer selon *DG*, mais encore les frotemens en *AC*, en *BC*, & en *EF* à vaincre. C'est pourquoy on ne se trompe pas lorsqu'on croit communement que cette machine est une de celles où les frotemens sont les plus grands.

Nommant donc toûjours le sinu- total *BC*, *b*; la tangente *AB* de l'angle *ACB* de la vis & de sa base *h*; l'effort avec lequel la dent est portée contre le coin *ACB* selon *GD* par le poids à vaincre *p*; $\frac{\pi}{\varphi}$ le rapport du poids de cette dent à son frotement sur *AC* supposé horizontal, & la force *Nf* le rapport du poids du plan *ACB* à son frotement contre $QB = \frac{P}{F}$, & enfin $\frac{p}{F}$ le rapport du poids de la dent à son frotement contre *EF*; *c* le rayon de ce frotement pris comme *ag* dans l'article précedent, & *g*

celui de la rouë DHI; x le frotement en CB multiplié par e, & divisé par d, comme dans la vis précédente.

Pour avoir en D le frotement contre EF, il est évident qu'il faudra prendre tout l'effort contre $EF = f - x$, & le multiplier par le rapport $\left(\frac{Fc}{Pg}\right)$; & comme ce frotement est conçû résister selon GD, ou dans le même sens que la dent D, il faudra l'ajoûter à l'effort de cette dent; sçavoir à p, afin d'avoir toute la pression contre $QP = \overline{f - x} \times \frac{cF}{gP} + p = \left(\frac{fFc - xcF + pgP}{Pg}\right)$. Multipliant donc cette pression contre QP par le rapport $\left(\frac{Fe}{Pd}\right)$, on aura le frotement contre CB ou à la circonférence de la vis $= \left(x = \frac{\overline{fFc - xcF + pgP}}{PgPd} \times Fe\right)$. D'où l'on tirera l'égalité $\left(PPx\,dg = \overline{Ffc - Fxc + Ppg} \times Fe\right)$, qui donne $\left(x = \frac{\overline{Ffc + Pgp}}{PPdg + FFce} \times Fe\right)$.

Or l'effort N ayant à vaincre le frotement en $CB = x$, & le poids D plus son frotement sur AC, avec son frotement en EF; si on retranche de l'effort f le frotement x, & qu'on regarde le poids D, & son frotement en EF, comme un seul poids agissant selon GD, l'effort $f - x$ dévra être le même que le premier effort f de l'article précédent; sçavoir $\left(\frac{\overline{\varphi b + \pi b}}{\pi b - \varphi b} \times p\right)$, en substituant au lieu de p la valeur $\left(f - \frac{xcF}{Pg} + p\right)$, c'est-à-dire le poids D plus son frotement sur EF, ce qui donnera l'égalité $\left(f - x = \frac{\overline{\varphi b + \pi h}}{\pi b - \varphi b} \times \frac{\overline{Fcf - Fcx + Ppg}}{Pg}\right)$. D'où l'on tire $\left(Pgf \times \overline{\pi b - \varphi b} = \overline{\varphi b + \pi h} \times \overline{Fcf + Ppg} + \overline{\pi b - \varphi h} \times Pg - \overline{\varphi b - \pi h} \times Fc \times \frac{\overline{Fcf + Ppg} \times Fc}{PPdg + FFce}\right)$, en substituant la valeur de x cy dessus.

Or on tire de là cette autre égalité $\left(Pgf \times \overline{\pi b - \varphi b} \times \overline{PPdg + FFce} - \overline{\varphi b - \pi h} \times \overline{PPdg + FFce} \times Fcf - \overline{\pi b + \varphi b} \times PFFfceg + \overline{\varphi b + \pi h} \times F^2Fc^2fe = \overline{\varphi b + \pi h} \times \overline{PPdg + FFce} \times Ppg + \overline{\pi b - \varphi h} \times Pg - \overline{\varphi b - \pi h} \times Fc \times PFpeg\right)$.

D'où l'on tire en réduisant ($F^2Pg^2df \times \overline{\pi b - \phi h} - PPFcdgf \times \overline{\phi b + \pi h} = \overline{\phi b + \pi h} \times P^2Ppg^2d + \overline{\pi b - \phi h} \times P^2Fpg^2e$), qui donne enfin divisant $\left(f = \frac{\overline{\phi b + \pi h} \times Pd + \overline{\pi b - \pi b} \times Fe}{Pg \times \overline{\pi b - \phi b} - Fc \times \overline{\phi b + \pi h}} \times \frac{Ppg}{Pd}\right)$ qui se réduit à $\left(\frac{\overline{\phi b + \pi b}}{\varpi b - \phi b} + \frac{Fe}{Pd} \times p\right)$ quand $F = o$, comme dans l'article precedent.

On aura aussi $\left(p = \frac{Pfd}{Pg} \times \frac{Pg \times \overline{\varpi b - \phi b} - Fe \times \overline{\phi b + \varpi h}}{Pd \times \overline{\phi b + \varpi b} + Fe \times \overline{\varpi b - \phi b}}\right)$, lorsque f sera donnée.

SUITE DU SECOND MEMOIRE.

Experiences pour les frotemens des corps dont les parties se meuvent avec differentes vitesses, lûës le 7. Juillet 1703.

7°. J'ai pris 2 planches *ABCD*, *FGHI*, (*Fig.* 11) de 4 pouces en quarré, & tirées d'une même piece, que j'ai fait raboter tout du long avant de la couper.

1°. Chacune de ces pieces étant chargée d'un poids de 6 livres *NL*, & tirée avec un ressort *MP* sur un tapis fort uni, resistoit de 11 quarterons, la table qui portoit le tapis étant fort horizontale; & lorsqu'on mettoit les deux ais l'un sur l'autre, comme en *X*, & les 2 poids par dessus, il falloit 22 quarterons de force pour commencer à les mouvoir sur le même tapis en tirant de même.

2°. Lorsqu'on mettoit les 2 ais à côté l'un de l'autre, ensorte qu'ils se touchoient, avec un des poids *N* dessus, comme en *Y*, il falloit 13 quarterons pour les mouvoir sur un plan incliné en tirant parallelement à ce plan, & en les mettant l'un sur l'autre, & le même poids *N* par dessus, comme en *Z*, il ne falloit précisément que le même poids de 13 quarterons. Ce qui prouve que le grandeur de la surface qui frote ne change pas le frotement, mais seulement le poids dont elle est chargée.

3°. J'ai appliqué les 2 mêmes ais contre un levier *AB*, *EG*, soutenu contre le point fixe *E*, & ayant posé sur

chacun les mêmes poids *N* & *L* de 6 livres, j'ai tourné une fisselle *OM* autour d'un des ais, que j'ai tirée avec le même ressort *MP* toûjours parallelement à la table qui étoit alors horizontale & couverte du même tapis. De plus les milieux *O* & *Q* de *AB*, & *FG* étoient d'abord également éloignés de l'apui *E*, & j'ai trouvé que pour commencer à mouvoir ces 2 poids, il falloit encore precisément 22 quarterons, comme quand les ais étoient l'un sur l'autre, ou l'un à côté de l'autre, & les 2 poids par dessus.

4°. Ayant ensuite divisé la distance *QO* du levier en 3 parties égales, j'en ai donné 2 à *QE*, & une à *EO*, afin que les vîtesses de ces 2 ais fussent entr'elles comme 2 à 1, & j'ai trouvé qu'il falloit 34 quarterons pour commencer à les mouvoir. au lieu de 33 qu'il auroit fallu trouver, en prenant 11 pour *N*, & 22 pour *L*, selon la proportion de leurs distances à *E*; ce qui étoit presque insensible avec le ressort dont je me servois.

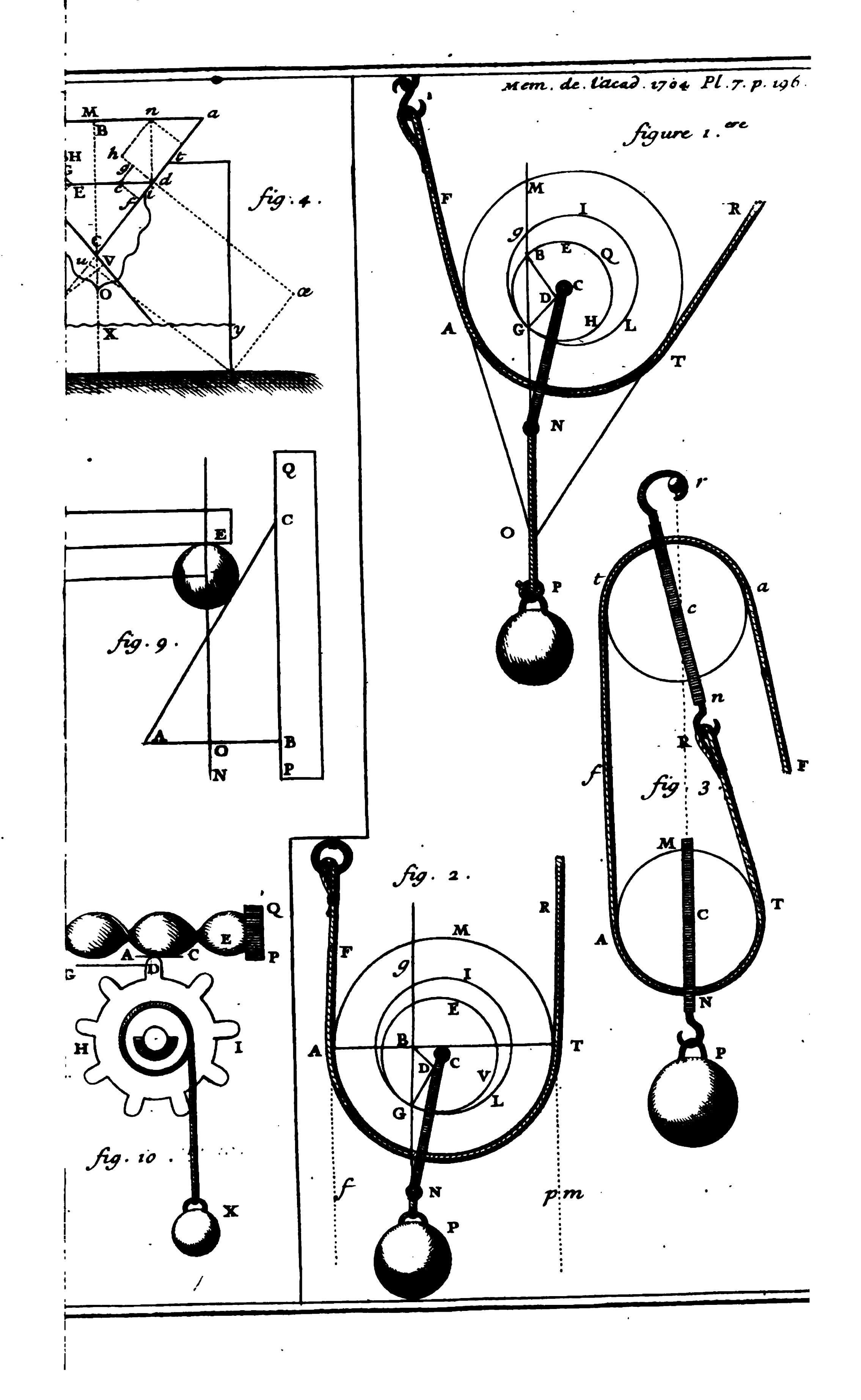
Et ayant ensuite donné 2 parties à *EO*, & une seulement à *EQ*, il a fallu 16 quarterons pour commencer à les mouvoir, au lieu de 16 $\frac{1}{2}$, en prenant toûjours 11 pour *N*, & 5 $\frac{1}{2}$ pour *L*, selon le rapport des distances au point fixe *E*.

5°. J'ai ensuite divisé *OQ* en 4 parties égales, & en ayant donné 3 à *QE*, & 1 à *EO*, il a fallu 46 quarterons pour les mouvoir, au lieu de 44, en prenant toûjours 11 pour *N*, & 33 pour *L*, selon la proportion des parties *QE*, *EO*.

Et ayant donné une seule partie à *QE*, & 3 à *EO*, j'ai trouvé qu'il falloit 14 quarterons $\frac{1}{2}$, au lieu de 14 $\frac{2}{3}$, prenant toûjours 11 pour *N*, & 3 $\frac{2}{3}$ pour *L*, selon la proportion de 3 à 1, ou de *EO* à *EQ*.

6°. Enfin j'ai divisé *QO* en 5 parties, & en ayant donné 3 à *QE*, & les 2 autres à *EO*, il a fallu 27 quarterons pour commencer à faire le mouvement, au lieu de 2 $\frac{1}{2}$, donnant 11 quarterons à *N*, & 16 $\frac{1}{2}$ à *L*, selon le rapport $\frac{2}{3}$.

Et ayant donné au contraire 2 parties à *QE*, & 3 à *EO*, il a fallu 18 quarterons pour commencer à les mouvoir, au lieu de 18 $\frac{1}{3}$, en donnant 11 à *N*, & 7 $\frac{1}{3}$ à *L*, selon le rapport de *EO* à *EQ*, ou de 3 à 2.



Mem. de l'acad. 1704. Pl. 7. p. 196.
figure 1.ere
fig. 4.
fig. 9.
fig. 2.
fig. 3.
fig. 10.

Or toutes ces experiences font voir que les differentes vîtesses insensibles n'alterent point le rapport des distances.

OBSERVATIONS
DE LA
DERNIERE ECLIPSE DE LUNE.

PAR M. CASSINI.

LA derniere Eclipse de Lune qui est arrivée le 17 de Juin de cette année 1704, n'a pas été observée à Paris, parce que l'horizon étoit couvert de nuages à l'endroit ou la Lune se leva, lorsqu'elle étoit prête de sortir entierement de l'ombre. 1704. 5. Juillet.

Nous en avons deux observations, une qui a été faite à Modene par le Pere Fontana Theatin très-versé dans les Observations Astronomiques. Les nuages ne lui permirent pas de l'observer aussi-tôt que la Lune fut levée. Il la vit entre les nuages à heures 3 minutes pendant un très-petit espace de temps lorsqu'elle recouvroit sa lumiere, & qu'il y restoit environ 9 doits d'Eclipse. Il la vit vers la fin de l'Eclipse, lorsqu'il étoit difficile de distinguer l'ombre de la penombre; & autant que cette difficulté le lui permit, il jugea que la fin arriva à $8^h\ 53'$. Il lui resta encore quelque scrupule sur l'horloge dont il se servoit, qu'il ne verifia point après l'observation.

L'autre observation de cette Eclipse a été faite par Messieurs de Plantade, Bon, & de Clapies à Montpellier.

Elle s'accorde avec celle de Modene dans la grande difficulté qu'il y avoit à distinguer l'ombre de la penombre; ce qui empêcha de determiner la grandeur des phases.

Autant qu'il fut permis par les nuages qui interrom-

poient l'obſervation, on la vit pendant 29 minutes & demie; au lieu qu'à Modene on la vit pendant 50 minutes.

La fin à Montpellier fut marquée à 8ʰ 15′ 6″. La fin de la penombre à 8ʰ 18′ 40″.

Il ſeroit inutile de comparer enſemble ces temps des Obſervateurs, puiſque le Pere Fontana ne donne pas la ſienne pour aſſeurée, tant par la difficulté de diſtinguer le terme de l'ombre, que pour n'avoir pas rectifié l'horloge par la hauteur d'une étoile fixe.

On peut plus compter ſur celle de Montpellier, où l'horloge avoit été reglée par les obſervations correſpondantes du Soleil, & rectifiée deux fois après l'Eclipſe par les hauteurs de la Lire, qui donnoit l'heure dans la même ſeconde que la pendule.

Cette derniere Eclipſe de Lune eſt arrivée ſix mois & demi après la derniere Eclipſe du Soleil, dont nous obſervâmes le commencement à l'Obſervatoire Royal le 8 Decembre 1703 à 4 heures préciſes du ſoir. Les autres circonſtances de cette obſervation ont été rapportées diſtinctement dans le Livre de la Connoiſſance des Temps de l'année 1704.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

DE M. MANFREDI,

Sur une Eclipſe de Venus par la Lune obſervée à Bologne le 30 Juin 1704, & rapportée par M. Maraldi.

1704. 19. Juillet. HIer le 30 Juin après midy, je finis une obſervation aſſez ſingulière de l'occultation de Venus par la Lune en plein jour, & dans une diſtance du Soleil d'environ 17 degrez. La Lune la toucha ſelon mon obſervation avec une Lunette de 10 pieds à 4 heures 30′ 15″, & elle

la couvrit toute entiere à 4 heures 30′ 33″. Mais suivant l'observation de M. Stancari, le centre de Venus fut caché par la Lune à $4^h 30' 18''$, & toute Venus fut couverte à $4^h 30' 33''$ avec une Lunette de 8 pieds. Comme l'on ne voyoit point la Lune même par des Lunettes qu'avec une grande peine, & par rapport à Venus qu'on sçavoit lui être fort voisine; aussi-tôt que Venus fut cachée l'on ne vit plus la Lune, aussi il ne fut pas possible d'en observer l'Emersion.

OBSERVATION

De l'Eclipse de Lune faite à Bologne le 17 Juin 1704, par Messieurs Manfredi & Stancari, & rapportée par M. Maraldi.

LEs observations des Taches ont été faites avec une excellente Lunette de 10 pieds. Le temps est marque à l'heure vraie après midy. 1704. 19. Juillet.

8	40	47	La Lune commence à sortir des nuages, & Proclus est sorti de l'ombre.
8	41	2	Mare Crisium commence à sortir de l'ombre.
8	42	0	L'ombre à la moitié de Mare Crisium.
8	42	22	Hermes se découvre.
8	43	0	Messale se découvre.
8	43	42	Cleomedes se découvre.
8	44	31	Mare Crisium se découvre entierement.
8	47	15	La fin de l'Eclipse.

Observations des doits avec une Lunette de 12 pieds, qui avoit un Micrometre à son foyer.

8h	2′	20″	La Lune est éclipsée de 8 doits 35′, & la Lune se cache aussi-tôt.
8	39	57	La partie éclipsée de la Lune est de 1 doit 45′
8	41	17	. . . . elle est de 1 17

8^h 42′ 17″ . . . . 1 doit 9′
8 43 42 . . . . 0 50
8 47 ¼ Fin de l'Eclipse.
9^h 0 Le diametre de la Lune passa par un cercle horaire en 2′ 33″.

Occultation de l'Etoile β dans le Scorpion faite par la Lune le 15 Juin 1704, & observée par M. Stancari.

9 19 0 Temps vrai après midy, le diametre de la Lune étoit de 32′ 53″.
9 49 42. L'étoile est cachée par la Lune.
10 59 2. L'étoile sort du bord de la Lune en ligne droite avec Prostarchus & la partie superieure de Langrenus.

REPONSE DE M. DE LAGNY AUX REMARQUES DE M. CHAZELLES

Sur son Memoire Hydrographique.

1704. 1. Août. LEs Remarques de M. Chazelles ayant été imprimées dans les Memoires de l'Academie de 1702, & mon Memoire ne l'ayant été qu'avec ceux de 1703 en mon absence & sans ma participation, je n'ai pû y répondre plutôt.

Voicy par où il commence.

1°. *La supposition de la rondeur de la terre dans la construction des Cartes & dans l'usage de la Navigation que M. de Lagny veut abandonner, fondé sur les observations de sa mesure faite par Snellius, par Riccioli, & par M. Picart, me paroît suffisamment prouvée par l'apparence de son ombre dans les éclipses de Lune, & par la figure spherique de toutes les Planetes.* Ce sont les propres termes de M. Chazelles.

Je

Je réponds premierement que dans la construction des Cartes réduites & dans l'usage de la Navigation, j'ai supposé la rondeur de la Terre. Cela est évident par le Theorême géométrique sur la construction de ces Cartes rapporté dans les Memoires de 1703, pages 99 & 100. Car j'y suppose pour meridien un cercle & non pas une ellipse. Ce Theorême est la seule chose essentielle de mon Memoire, & c'est la seule dont il n'a point parlé. Comment M. Chazelles peut-il donc supposer que j'abandonne l'hypothese de la rondeur de la Terre? J'ai seulement touché en passant les raisons qui paroissent prouver sa spheroïdité.

Je réponds en second lieu, que l'*apparence de son ombre dans les Eclipses de Lune* prouve plutôt pour que contre la figure elliptique. Hevelius dans sa Selenographie a remarqué qu'un diametre de l'ombre étoit beaucoup plus petit qu'il n'auroit dû l'être suivant l'hypothese ordinaire. Et dans les Journaux de Leipsik de 1686, page 51, & de 1687, page 157, on rapporte des observations sur cette ombre qui prouvent au contraire la spheroïdité de la Terre.

Enfin *la figure spherique de toutes les Planetes* n'est qu'un simple préjugé pour la sphericité de la Terre, & cela seulement dans l'hypothese de Copernic, où la Terre est elle-même une Planete. C'est une Analogie, une pure vraisemblance qui ne peut rien prouver contre des observations exactes qui établiroient le contraire. D'ailleurs nous ne sommes assurés qu'à peu près de la sphericité des Planetes: elles sont si éloignées & nous paroissent si petites, qu'elles pourroient être elliptiques & nous paroître spheriques, parce que les deux angles sous lesquels nous verrions leur grand & leur petit axe ne differeroient pas sensiblement.

2°. M. Chazelles prétend qu'on peut aisément accorder Snellius & le P. Riccioli, quoique la différence de leurs observations aille à neuf milles Italiques par degré. *Il n'y a*, dit-il, *pour cela qu'à faire quelques petites corrections tant dans leurs mesures actuelles que dans les operations Tri-*

gonometriques & Astronomiques, telles que l'inégalité du terrain, & la petitesse ou le défaut des instrumens peuvent laisser supposer. Le P. Riccioli a pris la peine de le faire par le moyen de quelques suppositions & corrections qu'on n'a pas de peine à lui accorder.

Il faut être bien prévenu pour raisonner de cette maniere. *Il n'y a qu'à faire quelques suppositions, &c.* M. Chazelles peut voir la refutation de cette pretenduë conciliation dans la Dissertation de M. Eisenschmid *De figura telluris Elliptico-spheroïdica*, pag. 27 & 28.

3°. Après avoir tâché de concilier ces deux Auteurs, M. Chazelles veut aussi concilier Riccioli & M Picart. Il rejette la difference qui se trouve entre leurs observations *sur l'erreur que peut avoir causé la refraction dans la hauteur apparente des deux termes*, & sur la *finesse des divisions des instrumens de M. Picart*. Il seroit, je crois, assez difficile à M. Chazelles de prouver que les instrumens de Riccioli n'étoient pas divisés avec autant de *finesse* que ceux de M. Picart. M Chazelles auroit pû dire avec plus de raison que les instrumens de M. Picart avoient un avantage considerable sur ceux de Riccioli, parce que M. Picart avoit ajoûté des Lunettes à ses instrumens. A l'egard de la refraction, c'est une supposition purement arbitraire. Mais à quoy aboutissent toutes ces conjectures sur les erreurs de Snellius & de Riccioli, puisqu'il n'en veut conclure que l'égalité des degrés de latiude, & que suivant les dernieres observations de M Cassini que M. Chazelles approuve, si M. Picart lui-même avoit fait des observations à Boulogne & en Hollande, il auroit dû trouver des grandeurs sensiblement differentes ? M. Chazelles veut-il que ces degrés soient égaux & inégaux tout ensemble ?

4°. Il s'attache ensuite à faire l'éloge des observations de M. Picart, & en cela je suis tout-à-fait de son sentiment. Mais quand il ajoûte : *Tout cela fait sentir que la grandeur trouvée d'un degré de la Terre est à cent toises près la veritable*, il me permettra de lui demander ce qu'il entend par ces mots *tout cela fait sentir*. Ce n'est point par sentiment qu'on

juge de ces sortes de choses, comme on juge d'une piece d'eloquence ou de poësie. Il faudroit par un calcul exact fixer des limites d'erreur fondées sur l'experience des plus habiles observateurs : Par exemple, de tant de secondes sur chaque angle observé, tant de pieds sur tant de toises mesurées actuellement, & prendre ensuite toutes ces erreurs par excès & par defaut, on auroit de cette maniere des limites justes de la certitude des observations. Mais encore une fois la grandeur trouvée d'un degré de latitude terrestre par M. Picart, ne peut être la veritable qu'entre les paralleles où il a observé.

5°. M. Chazelles se repentant en quelque maniere de l'approbation qu'il avoit donné aux observations de M. Cassini, ajoûte qu'*on peut attendre avant que de prendre son parti, que les observations pour le meridien ayent été achevées du côté du Nord, comme elles le sont du côté du Sud.* Si l'on avoit des observations faites en Afrique ou en Amerique proche de l'Equateur, on auroit raison de dire qu'*elles sont achevées du côté du Sud.* C'est là où la difference doit être plus sensible, en comparant ces observations avec celles qu'il faudroit faire proche du pole en Suede ou en Laponie, &c.

6°. *Les secantes augmentent autant les unes sur les autres que les sinus des complémens de latitude.* Si l'on prend ces termes à la rigueur, c'est un paralogisme, & la proposition est évidemment fausse. Il confond la raison & la proportion geometrique avec la raison & la proportion arithmetique. Les secantes augmentent beaucoup plus, & indéfiniment plus les unes sur les autres que les sinus de complémens. Il falloit dire, *les secantes croissent en même raison que les sinus de complémens.*

7°. M. Chazelles se donne beaucoup de peine pour prouver qu'*il faut s'accommoder à la portée des Pilotes : que leurs calculs ne sont pas capables de l'exactitude geometrique : qu'il est inutile de rechercher cette exactitude dans une partie du calcul, lorsque les autres parties ne peuvent pas l'avoir.* Je soûtiens au contraire, & c'est une maxime de la derniere évidence, que lorsqu'on ne peut pas être exact en tout, il

faut l'être du moins dans la *partie qui est susceptible de cette exactitude.* C'est même un motif pour redoubler nôtre attention & nôtre exactitude.

Je conviens avec M. Chazelles de l'incertitude de l'estime, de celle du rhumb de vent, de la dérive, &c. Mais que conclut tout cela contre la plus grande exactitude des Cartes réduites ? Je veux bien supposer avec lui que la construction que je propose passe la portée ordinaire des Pilotes : mais l'usage n'en sera en rien plus difficile pour eux, & c'est uniquement de quoi il s'agit. Mon Theorême en est-il moins vrai, ou moins digne de l'attention de Geometres ? C'est plus en Geometre qu'en Hydrographe que je l'ai propose. Je dis plus, l'erreur des Cartes réduites peut devenir très-sensible proche des poles, parce que la raison des deux sommes du nombre infini de secantes comprises entre chaque deux arcs prochains y differe très-sensiblement de la raison simple des deux secantes de ces mêmes arcs, & l'erreur pourra être du simple au double, au triple & au centuple, & à l'infini.

8°. *L'Arbalestrille est le meilleur instrument qu'on emploie à la mer.* Je ne vois pas pourquoi M. Chazelles, contre le sentiment des plus habiles Hydrographes, préfere l'Arbalestrille au Quartier Anglois.

9°. *Les meilleurs Pilotes abandonnent les Tables des Sinus, les Tables Loxodromiques, &c.* Il devoit dire : *Le commun des Pilotes* ce n'est pas habileté, c'est *ignorance* ou *paresse.*

10°. *L'on seroit trop heureux si toute l'erreur se trouvoit dans la supposition qu'on fait en se servant du Quartier de réduction, que le chemin du Vaisseau est l'hypothenuse d'un triangle rectangle, &c.* Les erreurs du Quartier de réduction sont si considerables, que dans quelques exemples rapportés par certains Auteurs qui sont entre les mains de tous les Pilotes, elles vont à dix ou douze degrés de difference en longitude. Après cela peut-on dire qu'*on seroit trop heureux, &c.*

11°. Ma Remarque sur les sondes de haute comme de basse mer ne paroît praticable à M. Chazelles que dans les Cartes particulieres & Topographiques, & dans les

Cartes generales, on doit, dit-il, se contenter de celles de basse mer. C'est déja quelque chose que ma Remarque puisse être utile pour les Cartes particulieres. Mais peut-on nier que même dans les Cartes generales où l'on marque un si grand nombre de sondes de basse mer, il ne fût très-facile & très-utile d'y marquer une seul fois en chiffre romain dans chaque Port & à l'embouchure des Rivieres la sonde de haute mer ? Où est l'embarras, & l'utilité n'est-elle pas évidente ?

12°. *On peut marquer les courans par des traits.* M. Chazelles remarque que cela ne se peut à l'égard des courans qui ne sont pas reglés. Hé qui en doute ? La comparaison que je fais des vents alisés qui sont marqués de même dans des Cartes Angloises, ne fait-elle pas voir que je n'ai entendu parler que des courans reglés ? On ne sçauroit marquer sur une Carte le cours des vents irréguliers ; on ne peut pas non-plus y marquer ceux des courans qui varient : mais on le pourroit & on le devroit faire à l'égard des courans reglés & sensibles. M. Chazelles ne niera pas qu'il n'y en ait, les uns en tout tems, les autres par rapport à l'heure, à l'âge de la Lune ; & on pourroit les marquer tous, les premiers absolument suivant leur direction, les autres avec des marques respectives au tems où ils arrivent. Ce que M. Chazelles rapporte de l'irrégularité des courans sur la côte de Poitou, ne prouve donc absolument rien contre moy.

Je conclus que mon Theorême sur la construction des Cartes réduites, & toutes mes Remarques sur les Cartes marines en general subsistent en leur entier.

Il faut remarquer par rapport à ce Theorême que dans les pages 99. & 100. des Memoires de 1703. il faut entendre par le mot d'hyperbole équilatere, une hyperbole formée par la somme des secantes du quart de cercle, de même que l'hyperbole ordinaire est formée par les secantes du triangle rectangle. C'est la Courbe *AQRS* &c. qui est l'hyperbole dont j'entends parler, & la Courbe *AKLM* &c. est l'hyperbole ordinaire.

TROISIÉME MEMOIRE.

Des Poulies & de leurs Tourillons.

PAR M. PARENT.

1704. 1. Août. 1°. Soit une poulie *AMT* (*Fig* 1.) soûtenuë sur la corde *FATR*, *GIL* un trou autour du centre de la poulie qui sert du paillier, *GEH* le tourillon fixe avec la chape *CN* dont *G* soit le centre, *P* le poids suspendu à la chape par la corde *PN*, *G* le point d'attouchement du tourrillon & du paillier lorsque la puissance motrice *F* tirant la corde *AF* a mis le tourillon *GEH* en état de commencer à glisser, de sorte que *G* soit le plan d'équilibre du tourrillon ; il est évident que la verticale *PN* étant continuée passera par *G*, puisque *G* est le point de suspension de *P*. On ne doit pas douter non plus qu'ayant prolongé les directions *FA*, *RT*, elles ne se coupent sur *NP* comme en *O*, puisqu'autrement le poids *P* ne seroit pas soûtenu par les puissances *F* & *R*, & ne demeureroit pas en repos, comme on le suppose. L'équilibre étant donc ainsi établi entre *PF* & *R*, & entre *P* & le frotement du plan *G*, il est évident que si l'on prend sur *ON* prolongée la partie *BG* pour marquer le poids *P*, que l'on mene le rayon *CG*, & sur *CG* la perpendiculaire *BD* ; *BD* sera à *DG*, comme le frotement du tourillon sur le paillier *IGL* est à sa pesanteur.

De plus le poids *P* étant soûtenu par les deux puissances *F*, *R*, il est évident que la verticale *GP* est leur direction composée. Puis donc que dans l'état de l'équilibre tout est fixe, si l'on veut regarder le tourillon *GEH* comme immobile & fixe, & la puissance *F* comme vaincante la puissance *R* autour du point fixe *G*, on tombera dans le cas où les deux puissances *F* & *R* appliquées à la circonférence d'une même rouë, font équilibres entr'elles autour d'un tourillon *GEH* immo-

bile, qu'on examinera dans le Memoire ſuivant.

Mais comme en tirant la corde AF pour amener le tourillon GEH ſur le plan d'équilibre G, les directions FA, RT, qui d'abord faiſoient des angles égaux en O avec NP, changent continuellement pour en faire d'inégaux ; cela pourroit apporter quelque difficulté à déterminer la force F, qui ne ſeroit pas récompenſée par le peu de fruit qu'on en retireroit. C'eſt-pourquoy nous ſuppoſerons maintenant les directions AF, RT, toutes deux verticales ou paralleles à GP (*Fig.* 2.) qui eſt le cas le plus d'uſage, réſervant le cas general pour le Memoire ſuivant.

Menant donc la droite AT qui ſera parallele à l'horizon, comme il eſt aiſé de le voir, & prolongeant la verticale PG ſur AT en B, menant BD perpendiculaire à CG, on aura les triangles rectangles ſemblables CGB, BGD, à cauſe de l'angle commun G. C'eſt pourquoy ſuppoſant que BD ſoit à DG, comm f à p ; appellant AC ou CT, a ; CG, b ; F, x ; & P, m ; on aura l'Analogie $BG \mid BD \parallel \sqrt{p^2+f^2} \mid f \parallel CG = b \left(CB = \frac{bf}{\sqrt{p^2+f^2}} \right)$, d'où l'on tirera $\left(BT = \frac{a\sqrt{p^2+f^2}+bf}{\sqrt{p^2+f^2}} \right)$. Mais on a par les principes de Statique l'Analogie : $AT = 2a \mid BT = \frac{a\sqrt{p^2+f^2}+bf}{\sqrt{p^2+f^2}} \parallel P = M \mid \left(\frac{am\sqrt{p^2+f^2}+mbf}{2a\sqrt{p^2+f^2}} = F \right)$, qui devient $\left(F = \frac{m}{2} \right)$ quand $(f = o)$ comme on le voit.

Si l'on veut avoir R, on aura par les mêmes principes de Statique l'Analogie : $AT = 2a \mid AB = \frac{a\sqrt{p^2+f^2}-fb}{\sqrt{p^2+f^2}} \parallel P = M \mid \left(R = \frac{am\sqrt{p^2+f^2}-mfb}{2a\sqrt{p^2+f^2}} \right)$, qui devient $\frac{m}{2}$ lorſque $f = o$.

Donc $F \mid R \parallel a\sqrt{p^2+f^2}+fb \mid a\sqrt{p^2+f^2}-bf$.

On aura donc auſſi $\left(m = \frac{2aF\sqrt{p^2+f^2}}{a\sqrt{p^2+f^2}+bf} \right) = P$, lorſque F ſera connuë, & m inconnuë ; ou $\left(m = \frac{2a\sqrt{p^2+f^2}\,R}{a\sqrt{p^2+f^2}-fb} \right)$.

2°. Si l'on veut ſuppoſer au contraire que la puiſſance f tirant de haut en bas ſoûtienne le poids p ou m au moyen de la corde fMp paſſé par-deſſus la poulie AMI (*Fig.* 3.), on aura $\left(F = \frac{mbf + ma\sqrt{p^2+f^2}}{a\sqrt{p^2+f^2} - fb}\right)$, qui ſe réduit à m lorſque ($f = o$).

Et ſi l'on veut comparer cette valeur avec celle de F du premier cas de cet article, on verra que F dans le premier cas eſt à F dans le ſecond réciproquement, comme ($a\sqrt{p^2+f^2} - fb$) eſt à $2a\sqrt{p^2+f^2}$, c'eſt-à-dire, comme 1 à 2 lorſque $f = o$.

On aura donc auſſi dans ce 2^d cas $\left(\frac{aF\sqrt{p^2+f^2} - fFb}{a\sqrt{p^2+f^2} + bf} = m\right)$ lorſque F ſera connuë, qui donne auſſi $F = m$, quand ($f = o$).

3°. Lorſque le tourillon GEH (*Fig.* 1.) ſera fixe avec la poulie (ce qui réüſſit toûjours mieux dans la pratique), le ſeul changement qui arrivera eſt que l'attouchement g ſera ſur la partie oppoſée du pallier de la chape au point où la direction PN la rencontre, à cauſe que PNG fait des angles égaux en G & g, avec la circonférence du pallier $GgIL$. Donc puiſque les angles des directions FAO, RAO, avec GPO ſeront les mêmes, & P le même que dans le premier cas, il eſt évident que les puiſſances F & R ſeront encore les mêmes.

Au reſte nous avons ſuppoſé le diametre du tourillon à fort peu près égal à celui de ſon pallier comme dans l'uſage ordinaire, laiſſant le reſte aux curieux Geometres.

Des Mouffles ou Poulies compoſées à plaiſir.

4°. Enfin ſi l'on a un poids P (*Fig.* 30.) ſuſpendu à une poulie AMT par ſa chape MCN au moyen de la corde fAT, qui paſſant par deſſous AMT va s'attacher d'un bout R à la chape mtn d'une ſeconde poulie amt ſuſpenduë en r, & qui tournant enſuite par-deſſus amt, eſt tirée par la force F, en telle ſorte que les tourillons C & c de

ces

ces deux poulies soient prêts à glisser; on trouvera la force *F*, en cherchant d'abord celle qu'il faut mettre en *f* pour soûtenir le poids *P* donné, comme dans le premier cas. Regardant ensuite la force connuë *f* comme un poids à soûtenir par la force *F*, par dessus la poulie *amt*, on aura comme dans le second cas la force *F* capable de soûtenir *f*, & par consequent *P*; & ainsi d'un plus grand nombre de poulies tant superieures qu'inferieures.

Au reste il est évident que les tourrillons *Cc* doivent être les moindres qu'il soit possible, puisque si dans quelqu'une des valeurs de *F* cy-dessus on suppose $(b = o)$, les frotemens s'évanoüiront.

Il resteroit d'examiner la résistance causée par la dureté des cordages; mais nous remettrons ceci à un autre Mémoire, comme étant d'une autre nature.

DESCRIPTION D'UN LIEU GEOMETRIQUE,

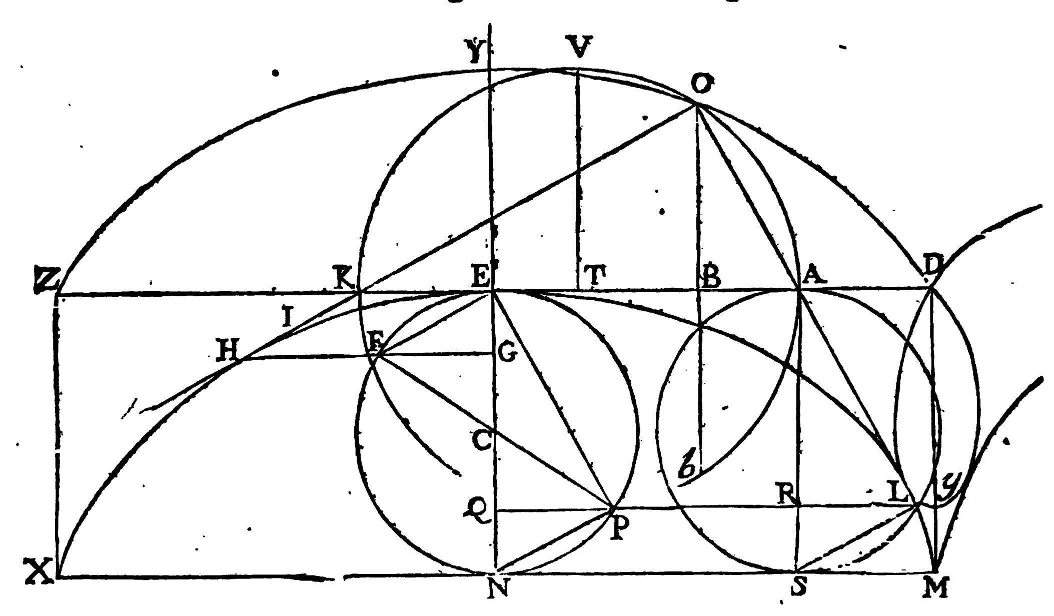
Où sont les sommets des angles égaux formés par deux Touchantes d'une Cycloïde.

PAR M. DE LA HIRE.

SOit une Cycloïde *XELM* dont le cercle generateur est *EPN*; la base *XM*, & l'axe *EN*. Soit achevé le 1704.
rectangle *XD* sur la base *XM*. De quel point *A* on voudra de la ligne *ED* soit mené *AL* touchante de la Cycloïde en *L*; & sur *ED* soit pris *AK* égale à *ED*; & sur *AK* pour diametre soit décrit le cercle *bAOK*. Ayant prolongé *LA* jusqu'au cercle *AOK* en *O*; du point *O* soit abbaissé *OBb* perpendiculaire sur *ED*, & du point *A* soit aussi abbaissé *AS* perpendiculaire sur *NM*. Si l'on décrit sur *AS* le demi-cercle generateur *ALS*, on sçait par les proprietés de la Cycloïde, que ce cercle passera par le

26. Juillet.

point touchant *L*, & que la partie de la base *SM* sera égale à l'arc *SL*, qui sera aussi égale à *AD*. Mais ayant mené *LS* & *LRQ* parallele à *MN*, le triangle *LRS* sera semblable au triangle *ARL* & au triangle *OBA*.



Il s'ensuit donc de là que l'arc *AO* ou *Ab* du cercle *AOK* est semblable à l'arc *SL* du demi-cercle *SLA*; & par consequent il y aura même raison du diametre *AS* au diametre *AK*, que l'arc *SL* ou de la ligne droite *AD*, à l'arc *AO*, ou que de la corde *SL* à la corde *AO*.

La ligne *LRPQ* etant parallele à la base *XM*, rencontrera au point *P* le cercle generateur *EPN* dont le diametre est placé sur l'axe de la Cycloïde, & *EP* sera parallele à *AL*, & *PN* parallele à *LS*.

Mais si par le point *P* du cercle generateur & par son centre *C* on mene le diametre *PCF* qui rencontre le cercle en *F*, & qu'on tire ensuite la corde *EF*; & que par le point *F* on mene la ligne *GFH* parallele à *NM* qui rencontre la Cycloïde en *H*, on sçait que la ligne *HI* parallele à *EF* touchera la Cycloïde en *H*.

Je dis maintenant que cette ligne *HI* étant prolongée

passera par le point *K*, & ensuite par le point *O* du cercle *AOK*.

Par la construction *AK* est égale à *DE*, & par consequent *EK* sera égale à *AD* qui est égale à l'arc *SL* ou *NP* ou *EF*. Mais l'arc *EF* est égal à *FH*; donc *EK* est égale à *HF* : mais *HI* & *FE* sont paralleles; donc *HI* passe en *K* en formant le parallelograme *EFHK*. *HK* doit aussi passer en *O*; car les deux lignes *HIK*, *LAO* sont paralleles aux deux lignes *EP*, *EF* qui forment un angle droit dans le demi-cercle *PEF*, elles formeront donc aussi un angle droit par leur recontre; & comme elles passent par les extremités du diametre *KA* du cercle *AOK*, elles se rencontreront necessairement en *O* sur sa circonference.

Il s'ensuit donc de là que les deux touchantes *OL*, *OH* de la Cycloïde menées du point *O*, feront un angle droit dans ce point *O*.

Je dis maintenant que tous les points comme *O* d'où deux touchantes menées à la Cycloïde contiennent un angle droit, sont dans la courbure d'une Cycloïde *ZYDy*, qui est le lieu de ces angles droits qui sont faits par les touchantes de la Cycloïde proposée.

Je dis de plus que cette Cycloïde a pour cercle generateur le cercle *AOK* dont le diametre *KA* est égal à la circonference du demi-cercle generateur de la Cycloïde proposée; mais que cette Cycloïde est une Cycloïde raccourcie, & qu'il n'y que la portion *DYZ* qui est au-dessus de la ligne *DE*, qui passe par le centre de son cercle generateur, dont tous les point servent à mener deux touchantes à la Cycloïde proposée.

Par la démonstration précedente il est évident que tous les points comme *O* seront tous dans la circonference du même cercle *AOK*; mais dans des differentes positions de son diametre *KA* sur la ligne *DE*.

Nous avons vû que la ligne *AD*, où, l'arc *SL* sera toûjours à l'arc *AO* dans une même raison, qui est celle des diametres *AS* à *AK*, ou *EN* à *NM*, ou *ED*.

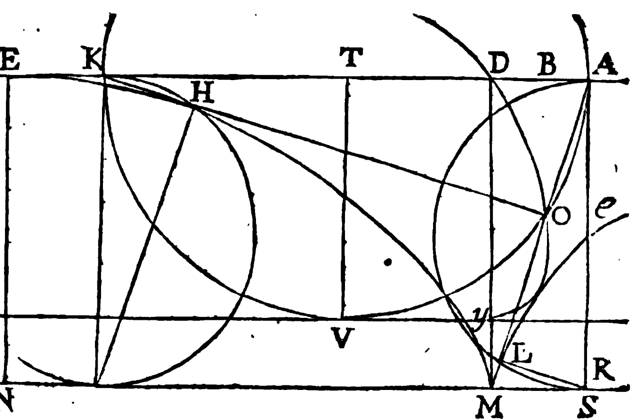
Si l'on place donc le diametre du demi-cercle *AOK* sur

DE, & que le point décrivant *O* étant en *D*, le diametre & le centre se meuvent sur *DE* d'un mouvement égal à celui que le point décrivant de la Cycloïde proposée feroit sur son cercle generateur si elle commençoit en *M* en allant par *L* en *E*, ou égal à celui qui feroit le centre du cercle *ALS*; car dans la Cycloïde de *MLE*, le mouvement du centre du cercle generateur sur une ligne parallele à sa base, est égal à celui du point décrivant, en sorte que quand le point décrivant de la Cycloïde *MLE*, aura parcouru l'arc *SL*, l'extremité de son diametre qui étoit en *M* aura parcouru la partie *MS* de sa base, laquelle est égale à l'arc *SL*, & de même l'extrimité *A* du diametre *AD* du cercle generateur du lieu *DOY* aura parcouru la partie *DA* égale à *SM*; mais le point décrivant *O*, qui étoit d'abord en *D* aura parcouru l'arc *AO* qui aura même raison à *DA* ou à l'arc *SL*, que son diametre *AK* au diametre *EN*; alors la ligne menée du point *O* au point *L* qui passera par *A*, touchera la Cycloïde proposée en *L*, ce qui est évident par ce qui a été démontré cy-devant. Mais si dans le même tems que le demi-cercle generateur s'est mû de *M* en *S*, le demi-cercle generateur *EFN* dont le diametre étoit posé sur l'axe, s'est mû de *E* en *K* sur *EK* égale à *SM*, le point décrivant ayant parcouru l'arc *EF* égal à l'arc *SL*, ou à *SM*, ou à *EK*, ce point décrivant sera sur la Cycloïde en *H*, & la ligne menée du même point *O* au point *H* sera aussi touchante en *H*, & ce sera par-tout de même. Ce qu'il falloit démontrer.

On voit par là que lorsque le point décrivant *O* de la Cycloïde *DOY* sera venu en *Y* sur l'axe *NE* de la Cycloïde proposée; alors le point décrivant *S* & le point décrivant *E* de la Cycloïde proposée chacun sur leur demi-cercle, seront venus dans la ligne parallele à la base, laquelle passe par le centre *C*; & les deux touchantes menées du point *Y* rencontreront la Cycloïde dans ces points, & feront un angle droit en *Y*.

Mais comme la Cycloïde n'est point une ligne terminée, & qu'on peut l'imaginer continuée à l'infini, en sup-

posant que le cercle generateur se meuve toûjours d'un même mouvement, & le point décrivant aussi ; ce qui à la verité ne sera qu'une même Cycloïde repetée, dont l'une recommencera sur la base commune où la précedente finira : aussi si l'on acheve la Cycloïde du lieu, qui est une Cycloïde raccourcie, car elle aura sa demi-base égale à son axe ; ce qui sera en achevant son cercle generateur, & supposant que son diametre *AK* se meuve toûjours sur *ED*, pendant que le point décrivant *O* parcourt le cercle, & l'un & l'autre dans les mêmes raisons qu'auparavant, il arrivera que de tous les points de la partie du lieu qui est au-delà de *MD*, on pourra mener deux touchantes, l'une à une des Cycloïdes, & l'autre à celle qui la suit immediatement, lesquelles touchantes feront un angle droit dans ce point du lieu d'où les touchantes sont menées, ce qui se démontrera comme le cas précedent, & qu'on peut voir dans cette Figure, où l'on a fait le même construction au-delà de la ligne *DM* qu'on avoit fait de l'autre côté, & où le point *y* est le commencement de la Cycloïde du lieu sur sa base : car du point *O* on peut mener la touchante *OH* à la Cyloïde *MHE*,

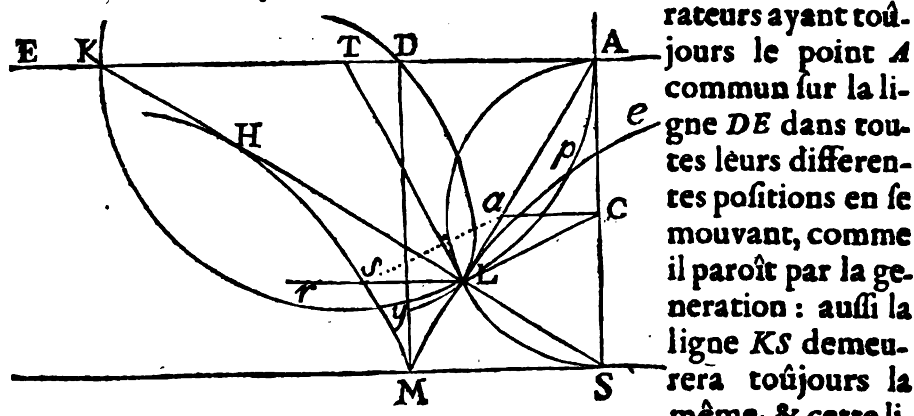


& la touchante *AOL* à l'autre Cycloïde *MLe*.

Mais comme la Cycloïde du lieu peut être continuée ou repetée comme l'autre, il arrivera qu'il y aura toûjours deux points sur le lieu, d'où l'on pourra mener la même touchante à la Cycloïde proposée ; & du point *y*, qui est le commencement de la Cycloïde du lieu sur sa base, on peut mener une touchante à chaque Cycloïde, laquelle sera la même que celle qui est menée du point *Y*,

où le lieu rencontre l'axe de la proposée.

Enfin l'on doit remarquer que la Cycloïde du lieu touchera la Cycloïde proposée ; car les deux cercles generateurs ayant toûjours le point *A* commun sur la ligne *DE* dans toutes leurs differentes positions en se mouvant, comme il paroît par la generation : aussi la ligne *KS* demeurera toûjours la même ; & cette ligne *KS* passant en *L* où deux cercles se coupent, lorsque le point *L* sera sur la Cycloïde proposée, il sera aussi sur celle du lieu ; car les arcs *SL*, *AL* des generateurs seront semblables, & ce sera ce point *L* dans cette position qui formera le point touchant des deux Cycloïdes, & la ligne *AL* les touchera aussi toutes deux dans ce même point ; ce que je démontre comme il suit.



Lorsque le point décrivant de la Cycloïde proposée *MLe* sera arrivé en *L*, c'est-à-dire lorsque l'arc *SL* sera égal à la partie de la base *SM*, & que le cercle generateur sera en *ALS*, & son diametre en *AS*, on sçait que la ligne *AL* touche la Cycloïde *MLe* au point *L*. Mais alors le cercle generateur du lieu *yLD* sera dans la position *ALK* ; si l'on mene donc les rayons *TL*, *CL* au point commun *L*, l'angle *TLC* sera droit, & puisque le point décrivant du lieu étant en *L* se meut d'un mouvement composé des deux autres, l'un par *LC* touchante de son cercle generateur, & l'autre par *Lr* parallele à *KA* ; pendant que le mouvement par *Lr* sera égal à *AD* ou à l'arc *SL* par la generation du lieu, le mouvement par *LC* doit être égal à l'arc *LpA*. Mais l'arc *SL* est à l'arc *LpA* qui lui est s'emblable, comme leurs rayons, ce qui est comme

LC à *LT*, ou comme leurs cordes semblables *SL*, *AL*. Enfin si par le centre *C* on mene *Ca* parallele à *AK* qui rencontre *AL* en *a*, on aura à cause des triangles semblables *ACa*, *ALS*, *aC* ou *sL* son égale sur *Lr*, à *CA* ou *CL* son égale, comme *SL* à *LA*; donc *AaL* est touchante de la Cycloïde du lieu au point *L*.

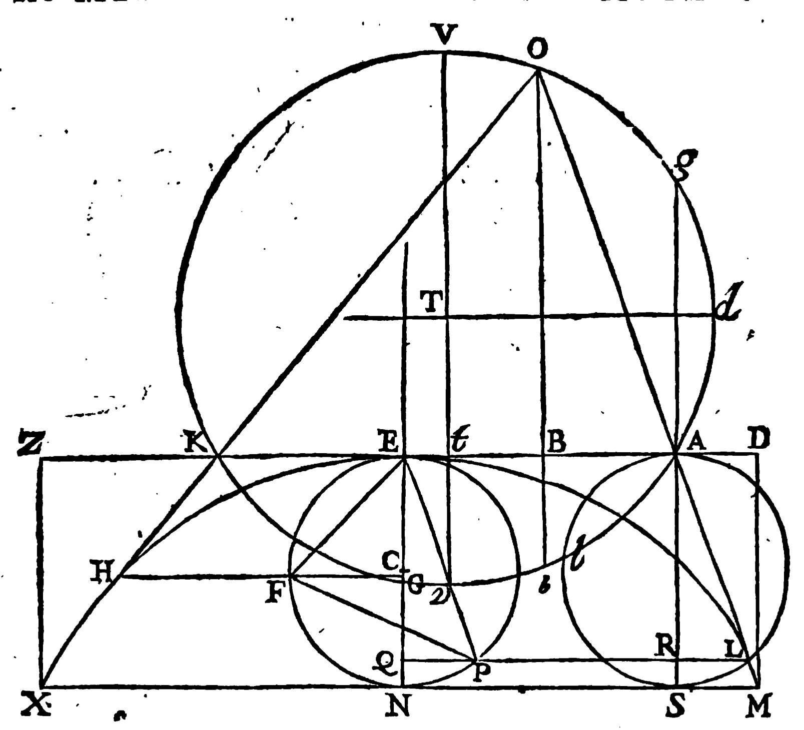
Il me reste maintenant à chercher le lieu du sommet de tous les angles aigus & obtus égaux entr'eux, lesquels sont formés par les touchantes d'une Cycloïde.

La Cycloïde *XEM* étant décrite comme cy-devant par le moyen du cercle generateur *EPNF*, dont le diametre est posé sur l'axe de la Cycloïde *EN*, & le rectangle *DX* étant achevé; si de quel point *L* on voudra de la Cycloïde on mene la ligne *LQ* parallele à la base, laquelle rencontre l'axe en *Q*, & le cercle generateur en *P*; du point *E* ayant mené la corde *EP*, on sçait que la ligne *LAO* parrallele à *EP*, touchera la Cycloïde en *L*. *Voyez la Figure suivante.*

Mais du point *A* ayant abbaissé *AS* perpendiculaire sur la base *NM*, & sur cette ligne ayant décrit le cercle generateur *ALS*, il est évident aussi qu'il rencontrera la Cycloïde en *L*, & que l'arc *SL* ou *NP*, ou bien les lignes *SM* ou *AD* seront d'une même grandeur, & par consequent la ligne *EA* sera égale à l'arc *EP*.

Soit maintenant l'angle *PEF* dans le cercle generateur, lequel soit proposé pour celui que les touchantes de la Cycloïde doivent faire, soit qu'il soit obtus ou aigu, comme il est represente dans la Figure; & soit pris sur *DZ* la grandeur *AK* égale à larc *PEF* du cercle generateur, & sur *AK* soit décrit le cercle *AVKv*, dont l'arc *AVK* reçoive des angles égaux à l'angle proposé *PEF*.

Il est évident que par le point *F* on mene la ligne *FH* parallele à la base *MX* qui rencontre la Cycloïde en *H*, & que par le point *H* on mene *HK* parallele à *PE*, laquelle touchera la Cycloïde en *H*, cette ligne *HK* étant prolongée, rencontrera la touchante *LAO* sur le cercle en *O*; & par consequent ces deux touchantes *HK*, *LA* contiendront un angle *LOH* égal à l'angle proposé



PEF. Car les deux touchantes *HK*, *LA* doivent faire un angle égal à l'angle *PEF*, puiſqu'elles ſont paralleles aux deux lignes *PE*, *FE* qui font ce même angle, & de plus cet angle doit être ſur le cercle en *O*, puiſque les lignes *AO*, *KO* s'appuient ſur la corde d'un arc *AOK* qui doit recevoir cet angle.

On voit donc par là que toutes les touchantes de la Cycloïde qui contiendront un angle égal à langle propoſé, ſeront toutes à la circonference d'un même cercle *AOK*, dont la même cordè *AK* ſera toûjours placée ſur *DZ*; car cette corde ſera toûjours égale à un arc égal à *PEF*, quelque diſpoſition que puiſſent avoir ces touchantes, puiſque langle *PEF*, en quelque endroit qu'il ſoit dans le cercle generateur, ſera toûjours à une circonference égale à *PEF*, ou appuyé ſur une corde égale à *PF*.

Maintenant ſi l'on abaiſſe *OBb* perpendiculaire ſur *AK*, l'arc

l'arc Ab dans le cercle $KOAb$ sera semblable à l'arc PN ou LS du cercle generateur ; c'est pourquoy dans toutes les differentes positions de la corde KA sur ZD, & à proportion que le point A s'approchera de D, le point O descendra sur l'arc OVA, en sorte qu'il y aura toûjours même raison du mouvement du point O sur son cercle KVA, que du mouvement du point décrivant L de la Cycloïde sur son cercle generateur, & les arcs de ces mouvemens seront entr'eux en même raison que les cordes semblables qui soûtiennent ces arcs, comme la corde SL à la corde Ab ou Og, ou bien comme le diametre du cercle generateur EN, au diametre Vu du cercle KOA.

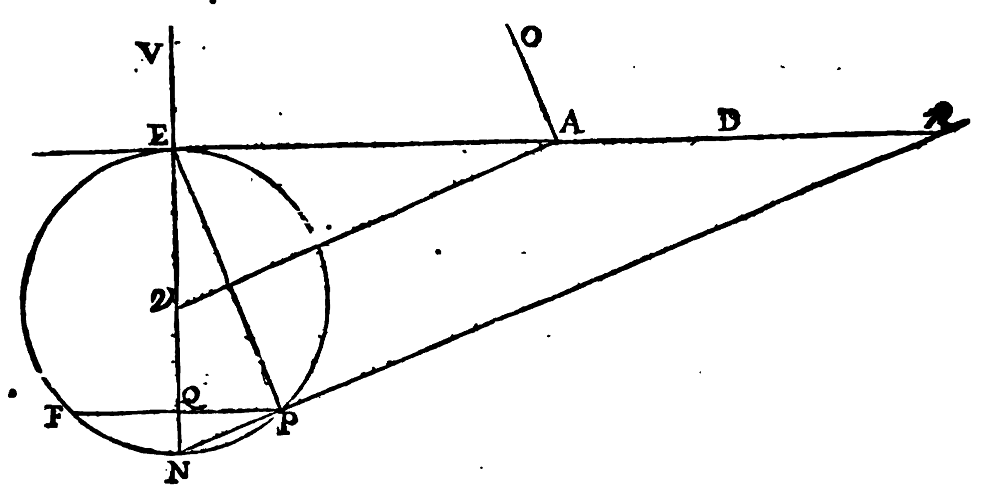
Il s'ensuit donc de là que le point O se meut par la composition des deux mouvemens, l'un par le transport du point A de la corde KA du même cercle KOA sur la ligne ZD prolongée tant qu'on voudra, & l'autre par le mouvement du point O sur la circonference du cercle KOA. Et les mouvemens de ces deux points étant toûjours en même raison ; sçavoir celui du point A comme les arcs SL, & celui du point O comme les arcs semblables Ab, la Courbe que décrit le point O sera une Cycloïde qui est le lieu cherché.

Il est facile à voir par ce qui a été démontré de l'angle droit, & par la generation de cette Cycloïde, qu'elle est toûjours raccourcie, soit que l'angle proposé soit obtus ou aigu ; puisque la corde AK étant égale à l'arc PEF du cercle generateur, elle sera toûjours plus grande que la corde semblable PF qui soûtient l'angle PEF ; & par conséquent le cercle generateur du lieu KOA sera toûjours plus grand que le cercle generateur de la Cycloïde proposée ; & le mouvement du point O sur son cercle par des arcs en même raison que celui du point A sur ZD, qui est celui du point L par des arcs semblables à celui du point O, sera plus grand que celui du point A sur ZD, ou que celui du centre T du cercle KVA sur Td parallele à ZD, ce qui fait la Cycloïde raccourcie ; car dans la simple ces deux mouvemens sont égaux.

On démontrera auſſi que la Cycloïde du lieu doit toucher la Cycloïde propoſée & repetée dans un point qui ſera formé par le point *l*, qui eſt la rencontre des deux cercles generateurs, & où ſe rencontrent les deux points décrivans, & la corde *Al* ſera la touchante commune des deux Cycloïdes, comme pour l'angle droit.

Il ne me reſte plus qu'à démontrer que le cercle generateur du lieu ne rencontrera jamais la baſe *XM* de la Cycloïde propoſée, quelque angle que les touchantes puiſſent faire, & qu'il s'en approchera de plus en plus à proportion que l'angle propoſé ſera plus obtus; car lorſqu'il vient égal à deux droits, la Cycloïde du lieu ſe confond avec la Cycloïde propoſée, & les cercles generateurs ſont les mêmes.

Par la conſtruction on voit que le diametre *Vv* du generateur du lieu, aura même raiſon au diametre *EN* du generateur de la Cycloïde propoſée, que la corde *KA* ou l'arc *PEF* à la corde *FP*, ce qui ſera auſſi comme les rayons des cercles *TV* à *CE*.



Mais ſi le diametre *Vv* du cercle generateur du lieu, eſt poſé ſur l'axe *NE* de la Cycloïde, & ſi la corde *FP* dans le generateur de la Cycloïde ſoûtient en *E* l'angle propoſé, on aura toûjours pour tous les angles la partie

EA égale à l'arc *EP*. Si l'on mene donc *NP* prolongée jusqu'à *ED* en *p*, je dis que *Ep* sera toûjours plus grande que *EA*; ce que j'ai démontré dans le troisieme Lemme de mon Traité des Epicycloïdes page 16, en considerant la ligne *ED* comme un cercle infini; & par consequent la ligne *Av* parallele à *NP* ou perpendiculaire à *AO* qui est parallele à *PE*, donnera toûjours le point *v* sur *EN* non prolongée, pour l'extremité du diametre du cercle *VOAv* generateur du lieu.

Il s'ensuit donc de là que le commencement de la Cycloïde du lieu sera toûjours sur la ligne parallele à *ED*, laquelle passera par le point *v*, & dans le point où elle rencontrera la ligne *DM*; & comme le diametre du generateur du lieu est donné, on pourra décrire ce lieu.

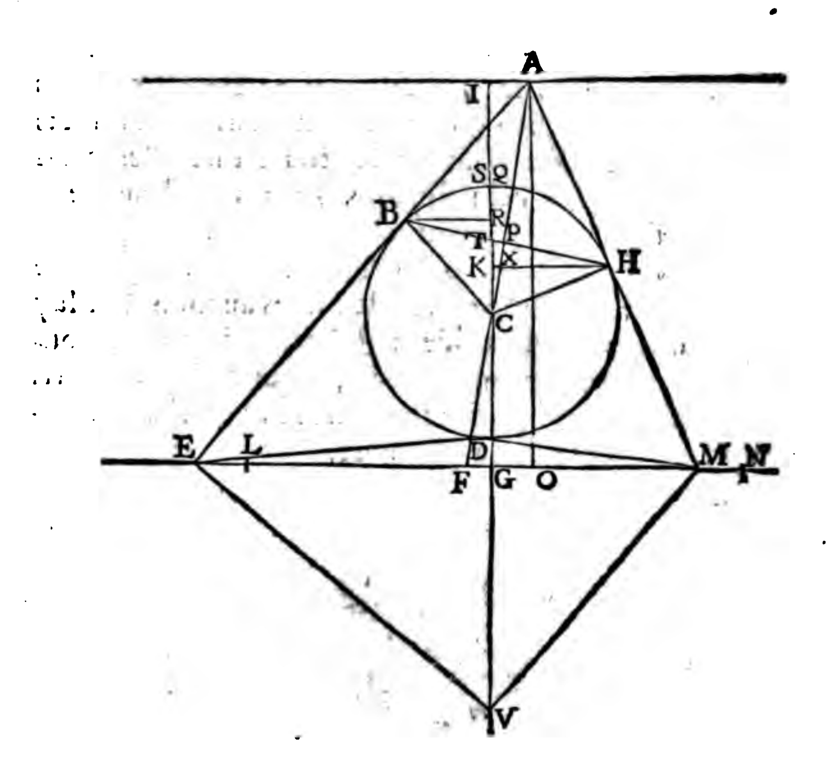
J'ai démontré dans mon Traité des Sections Coniques *in-folio*, quel étoit le lieu qui étoit formé par les sommets des angles droits que faisoient les touchantes des trois Sections Coniques, & celui des angles aigus & obtus de la Parabole; & j'avois seulement averti qu'on trouveroit celui des angles aigus ou obtus de l'Ellipse & de l'hyperbole en se servant de la même methode; mais au mois de May 1694, j'ai lû dans l'Assemblée de l'Academie une démonstration generale de tous ces lieux, laquelle je donne ici à cause qu'elle n'a point été imprimée, & qu'elle est entierement differente de la premiere.



CONSTRUCTION GENERALE

Des lieux où sont les sommets de tous les angles égaux droits, aigus ou obtus, qui sont formés par les Touchantes des Sections Coniques.

PAR M. DE LA HIRE.



1704. 2. Aoust. LE cercle *SBDH* étant donné, & la position de la ligne droite *EFN* par rapport au cercle, & ayant pris deux points *EM* tels qu'on voudra sur cette ligne, d'où l'on mene les touchantes *EBA*, *MHA* au cercle,

lesquelles se rencontrent en A, on cherche la position du point A.

Du point A soit la perpendiculaire AI sur le diametre ICD du cercle donné, & que ce diametre ICD soit perpendiculaire à la ligne donnée EN, laquelle il rencontre en G.

Soit le rayon du cercle CB ou $CS = r$. $CI = y$. $IA = x$. $CG = d$.

A cause des touchantes AB, AH, & du diametre AC & de sa rencontre P avec BH qui joint les points touchants, on aura CP, CQ, CA continuellement proportionnelles; mais $CA = \sqrt{yy + xx}$, donc $CP = \frac{rr}{\sqrt{yy+xx}}$.

On connoît par les propositions du premier Livre de mes Sections Coniques *in-folio*, que toutes les lignes comme BH qui joignent les points touchants des touchantes qui sont menées de chaque point de la ligne AI, passeront par le point T du diametre IC, en sorte que les points $DTSI$ diviseront la ligne ID *harmoniquement*; & par consequent CT, CS, CI seront trois lignes en proportion continuë: c'est-pourquoy $CT = \frac{rr}{y}$.

Maintenant à cause des angles droits CIA, CBA, on aura $AB = \sqrt{yy + xx - rr} = AH$.

On aura aussi $CI \mid IA \parallel CP \mid PT = \frac{xrr}{y\sqrt{yy+xx}}$.

Mais pour abreger soit posé $zz = yy + xx$.

On aura donc le quarré de BP egal au quarré de CB moins le quarré de CP, ce qui est $\sqrt{rr - \frac{r^4}{zz}}$, ou bien $BP = \frac{r}{z}\sqrt{zz - rr}$.

Et par conséquent $BT = \frac{r}{z}\sqrt{zz - rr} - \frac{xrr}{yz}$, ou bien $\frac{r}{z} \times \sqrt{zz - rr} - \frac{rx}{y}$.

A cause des triangles semblables CTP, BTR, on a $CT \mid BT \parallel CP \mid BR$, ce qui est en termes analytiques $\frac{rr}{y} \mid \frac{r}{z} \times \sqrt{zz - rr} - \frac{rx}{y} \parallel \frac{rr}{z} \mid \frac{\frac{r^3}{zz}}{\frac{rr}{y}} \times \sqrt{zz - rr} - \frac{rx}{y} = BR$, ce

qui se réduit à $\frac{ry}{zz}\times\sqrt{zz-rr-\frac{rx}{y}}=BR$.

Mais aussi $CT \mid PT \parallel BT \mid TR$, ce qui est en termes analytiques $\frac{rr}{y}\mid\frac{xrr}{yz}$, ou bien $z\mid x\parallel\frac{r}{z}\times\sqrt{zz-rr-\frac{rx}{y}}\mid\frac{rx}{zz}\times\sqrt{zz-rr-\frac{rx}{y}}=TR$.

De plus à cause des triangles semblables BRC, AOE, on a $BR\mid CR\parallel AO$ ou $IG\mid OE$, ce qui est en termes analytiques $\frac{ry}{zz}\times\sqrt{zz-rr-\frac{rx}{y}}\mid\frac{rr}{y}+\frac{rx}{zz}\times\sqrt{zz-rr-\frac{rx}{y}}\parallel$; ou bien ayant divisé par $\sqrt{zz-rr-\frac{rx}{y}}$, on réduit ce premier rapport à $\frac{ry}{zz}\mid\frac{rr}{y\sqrt{zz-rr-rx}}+\frac{rx}{zz}$; ou bien multipliant par zz, & divisant par ry, on a $1\mid\frac{rzz}{yy\sqrt{zz-rr-rx}}+\frac{x}{y}\parallel y+d\mid\frac{yrzz+drzz}{yy\sqrt{zz-rr-rxy}}+\frac{yx+dx}{y}=OE$, & delà on tirera la valeur de GE $\frac{yrzz+drzz}{yy\sqrt{zz-rr-rxy}}+\frac{xd}{y}=GE$.

Maintenant si du point H on mene HK perpendiculaire à IG & qui coupe CA en X, on aura les triangles semblables HKT, CPT, & par conséquent $CT\mid PT\parallel HT\mid TK$, ce qui est $z\mid x\parallel\frac{r}{x}\times\sqrt{zz-rr+\frac{rx}{y}}\mid\frac{rx}{zz}\times\sqrt{zz-rr+\frac{rx}{y}}=TK$.

Mais aussi on aura $CT\mid CP\parallel HT\mid HK$, ce qui est $\frac{rr}{y}\mid\frac{rr}{z}\parallel$ ou bien $z\mid y\parallel\frac{r}{z}\times\sqrt{zz-rr+\frac{rx}{y}}\mid\frac{ry}{zz}\times\sqrt{zz-rr+\frac{rx}{y}}=HK$.

Et à cause des triangles semblables CHK, MAO, on a $HK\mid CK=CT-TK\parallel AO\mid OM$, ce qui est $\frac{ry}{zz}\times\sqrt{zz-rr+\frac{rx}{y}}\mid\frac{rr}{y}-\frac{rx}{zz}\times\sqrt{zz-rr+\frac{rx}{y}}$, ou bien en divisant ce rapport par $\sqrt{zz-rr+\frac{rx}{y}}$, & le divisant encore par ry, & multipliant ensuite par zz, on aura $1\mid\frac{rzz}{yy\sqrt{zz-rr+rxy}}-\frac{x}{y}\parallel y+d\mid\frac{yrzz+drzz}{yy\sqrt{zz-rr+rxy}}-\frac{yx-dx}{y}=OM$;

& si l'on ajoûte à OM, $GO = x$, on aura $\frac{yrzz + drzz}{yy\sqrt{zz - rr + rxy}} - \frac{dx}{y} = GM$.

On a fait toute l'operation précédente pour trouver les valeurs de GE & de GM : mais il faut remarquer que si la ligne EFN passoit au dedans du cercle, ou si elle le touchoit, il y auroit quelque changement dans les valeurs trouvées & dans les signes, comme aussi suivant les differentes positions des points EM par rapport à IG; mais ces cas differens ne changent pas l'operation ni les dimensions des inconnuës.

Maintenant si l'on fait un produit de GE par GM, & qu'on le pose $= pp$, on aura une équation qui se réduira à $yyrrzz + 2ydrrzz + ddrrzz - 2xxrrdy - xxddrr - xxddyy = ppy^4 - pprryy$.

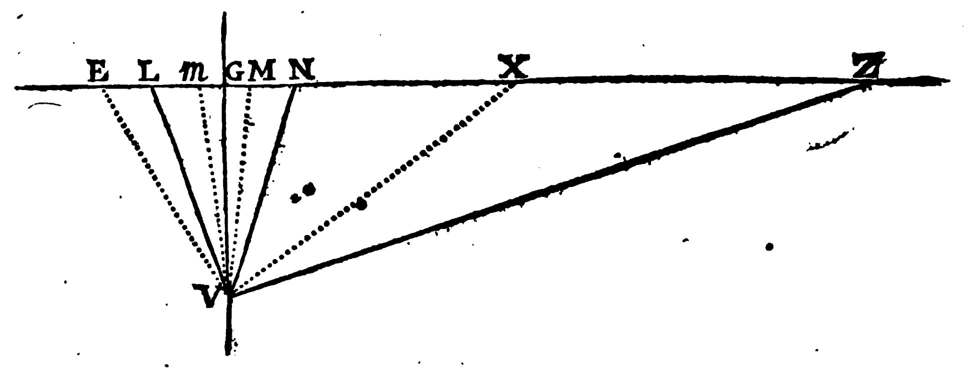
Et si l'on restituë la valeur de $xz = yy + xx$, on aura enfin $\frac{rrxx - ddxx + rryy + 2rrdy + rrdd}{yy - rr} = pp$.

Ce qui fait aussi connoître que le produit de GE par GM est égal à la premiere partie de cette équation ; car pp a été posée égale à ce produit.

On remarquera que l'on peut encore mener des points M & E deux autres touchantes au cercle, lesquelles par leur rencontre donneront un point semblable au point A de l'autre côté du cercle pour lequel on aura la même valeur que celle qu'on vient de trouver, & l'on tirera de ces touchantes & de leurs rencontres, les proprietés qui sont expliquees dans le premier & le second Livre de mes Sections Coniques.

Mais comme on peut trouver sur EN une infinité de points comme EM, en sorte que le produit des GE par GM soit toûjours égal à une même quantité que j'ai appellée pp, & qui sera determinée ; on aura aussi une infinité de points comme A, lesquels formeront un lieu dont l'équation vient d'être trouvée, & ce lieu sera une des Sections Coniques ou une ligne droite, puisque les dimensions des inconnuës n'y surpassent pas le plan.

LEMME.



Soit la ligne droite *EZ* & *GV* qui lui soit perpendiculaire en *G*; soit aussi l'angle *LVN* tel qu'on voudra, dont le sommet est en *V*, & que cet angle soit coupé en deux également par *VG*; & par conséquent *GL* est égale à *GN*.

Du point *V* ayant mené *VZ* perpendiculaire à *VL* qui rencontre *EZ* en *Z*, & soit coupé *LZ* en deux parties égales entr'elles au point *X*.

Soit aussi du point *V* les lignes *VE*, *VM*, qui fassent l'angle *EVM* égal à l'angle *LVN*; si le point *M* tombe au-delà de *G* vers *Z*, on portera la grandeur *GM* en *Gm*, d'où il est évident que l'angle *LVm* sera égal à l'angle *LVE*; & par les propositions du premier Livre de mes Sections Coniques, la ligne *ZE* sera coupée harmoniquement aux points *ELmZ*, & les lignes *Xm*, *XL*, *XE* seront en proportion continuë; d'où il suit que le quarré de *XL* sera égal au rectangle des parties *Xm*, *XE*.

Ce sera la même chose pour tous les angles égaux à l'angle *LVN*, dont les sommets seront en *V*; car le quarré de *XL* demeurera toûjours le même pour toutes les differentes parties *Xm*, *XE*.

Il s'ensuit de là que si l'angle proposé *LVN* étoit droit, le point *Z* tomberoit en *N*, & le point *X* en *G*; en sorte que *XL* seroit égale à *GV*. Mais de quelque grandeur que soit l'angle *LVN* ou aigu ou obtus, *XL* sera toû-

jours.

jours plus grande que *GV*, puisque le point *X* seroit le centre d'un cercle qui passeroit en *V*, & dont le diametre seroit *ZL*, à cause de l'angle droit *ZVL*; mais *XV* égale à *XL*, & qui est l'hypothenuse du triangle rectangle *XGV*, sera toûjours plus grande que le côté *GV*; car dans le cas de l'angle aigu ou obtus, le point *X* sera toûjours hors du point *G*.

Il s'ensuit aussi que le même point *X* servira pour les angles obtus & aigus, dont les uns sont les supplémens des autres. Car *LVG* étant la moitié de l'angle aigu proposé, on aura à cause de l'angle droit *LVZ*, l'angle *GVZ* qui qui sera la moitié de l'angle obtus complément de l'angle *LVG*. C'est-pourquoy *VL* est perpendiculaire au côté *VZ*, comme *VZ* est perpendiculaire au côté *VL*, & la même ligne *ZL* sert pour ces deux angles & par conséquent le point *X* leur sera aussi commun.

On doit remarquer que dans les differentes positions de l'angle proposé autour du point *V*, si l'une de ses jambes est paralleles à la ligne *EZ*, l'autre jambe *VM* tombera au point *X*, & le rectangle de *XM* infiniment petite par *XE* infiniment grande, quoique ce ne soient que des quantités imaginaires, doit être consideré égal au quarré de *XL* qui est une quantité determinée. Ces sortes de cas & d'autres semblables ne changent rien aux démonstrations que nous venons de donner.

Applications aux Sections Coniques.

Que le cercle *SBDH* soit la base d'un cone, & que la ligne *EFN* soit *Directrice* de la section de ce cone, c'est-à-dire, la rencontre du plan de la base avec le plan par le sommet du cone, lequel est parallele au plan de la section. C'est le nom que j'ai donné à cette ligne dans mon Traité des Sections Coniques. Enfin que le sommet du cone droit ou oblique soit placé dans un plan perpendiculaire à la base, lequel il rencontre dans la ligne *ICG*, qui est perpendiculaire à la Directrice, & qui passe par le centre de la

base Soit aussi imaginé que le plan par le sommet du cone *EVN* soit couché sur la base pour s'en servir aux demonstrations suivantes, la directrice demeurant commune à la base & à ce plan, en sorte que le point *V* soit le sommet du cone, & la ligne *GV* la distance du sommet *V* au point *G* de la Directrice.

Mais si le même sommet *V* du cone est aussi le sommet d'une autre espece de cone ou pyramide qui ait pour base le lieu des points *A*, il s'ensuit par ce que j'ai démontré dans mes Sections Coniques que la section de cette pyramide sera une courbe de la même nature que celle de la base, ce qui est facile à démontrer; car la section étant faite sur un plan perpendiculaire au plan par le sommet & par *ICG*, la courbe de la section aura pour axe la rencontre de ce plan aussi bien que la Section Conique, ce qui suit de la position de la Directrice.

J'ai démontré dans mon Traité des Sections Coniques, que l'angle que font deux touchantes de la section, est toûjours égal à celui qui est fait sur le plan par le sommet, par les verticales ou les lignes menées du sommet aux points de la Directrice, où les touchantes du cercle qui forment les touchantes de la section rencontrent la Directrice, comme dans la Figure, les touchantes de la section formées par les touchantes du cercle *EB*, *MH*, feront un angle égal à l'angle *EVM*. Et si tous les points, comme *E* & *M*, sont placés sur la Directrice, en sorte que les angles *EVM* soient toûjours égaux entr'eux; aussi les angles des touchantes de la section formées par les angles *EAM* seront tous égaux entr'eux, & par conséquent la ligne formée sur le plan de la section par le lieu des points *A* de la base, sera le lieu de tous les angles égaux à l'angle *EVM*.

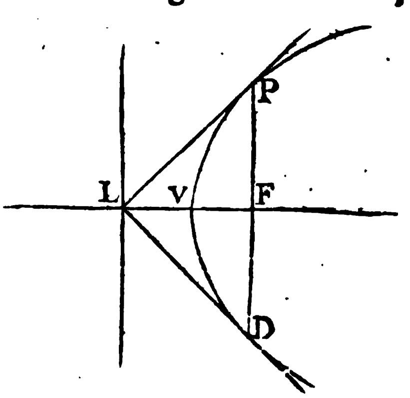
Pour les Angles droits.

Par le Lemme tous les points comme *EM* de la Directrice, qui sont donnés par des angles droits autour du

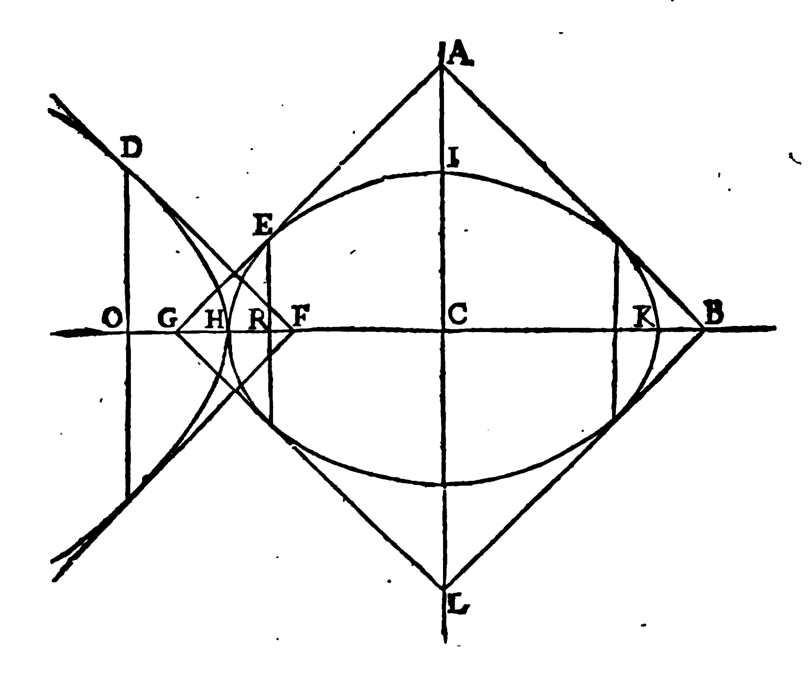
sommet V, feront que les rectangles des GE par les GM, seront chacun égaux au quarré de GV; & par consequent l'équation qu'on a trouvé d'abord servira pour tous les angles droits en posant $p = GV$.

1°. Si la directrice touche le cercle de la base, ce qui donne la parabole sur la section, alors CG sera égale à CD, & dans l'équation en substituant $r = CD$ à la place de d, on la réduit à $rryy + 2r^3y + r^4 = ppyy - pprr$, qui est un lieu à la ligne droite, où les x deviennent infinies. Mais ce lieu sur la base étant perpendiculaire à l'axe IG, il sera aussi sur la section perpendiculaire à l'axe de la parabole, & ce sera le lieu des angles droits faits par les touchantes de la parabole.

Pour ce qui est de la position de cette ligne sur la section, soit l'axe LF de la parabole PVD, & que ses touchantes qui viennent du point L de l'axe, fassent un angle droit PLD dans ce point L, & par conséquent PD qui joint les points touchants PD, sera perpendiculaire à l'axe, & l'angle PLF étant demi-droit, l'angle LPF sera aussi demi-droit; c'est-pourquoy FP & FL seront égales. Mais j'ai démontré dans le Livre des foyers de mes Sections Coniques, que si l'angle PLF que fait une touchante de la parabole avec l'axe est demi-droit, l'ordonnée PF passera par le foyer F; c'est-pourquoy le point L par où passe le lieu, & qui est autant éloigné du sommet V de la parabole, qu'en est le foyer F, en sera éloigné de la quantité du quart de parametre de l'axe.



2°. Puisque dans l'équation du lieu des points A qu'on a trouvé d'abord, on a supposé le produit des GE par les GM toûjours égal au quarré des GV, & que ce lieu est une des Sections Coniques, aussi le lieu qu'il formera sur



le plan de la section par toutes les lignes menées du sommet *V* du cone aux points de ce lieu sur la base, sera une section Conique, suivant ce que j'ai demontré de ces sortes de sections dans mon Traité ; & par consequent les points de ce lieu sur le plan de l'Ellipse comme *B* & *G* sur l'axe *KH* donneront des touchantes comme *GA*, *GL* qui feront un angle droit en *G*, & de l'autre côté les touchantes *BA*, *BL* feront l'angle droit en *B*, & les angles *AGB*, *ABG* seront chacun un demi-droit, & les parties *CB*, *CG* de l'axe seront égales, & enfin la rencontre *A* des deux touchantes *GA*, *BA* sera sur l'autre axe *CI*, & le triangle *GAB* sera isoscelle ; & par consequent l'angle *A* sera aussi droit ; ce que l'on peut aussi conclure de la formation des touchantes. Ce point *A* sera donc un de ceux de lieu, & par conséquent la Section Conique qui est le lieu & qui passe par *GAB* sera un cercle dont le centre sera le point *C* qui est aussi celui de l'Ellipse, puisque l'angle à la section en *A* sur son axe *GB* est un angle droit.

Ce sera la même démonstration pour les touchantes de l'hyperbole ; car l'équation du lieu sur la base devient la même lorsque la directrice coupe le cercle, les signes étant seulement changés.

Il faut maintenant démontrer quelle est la grandeur du diametre de ce cercle, ou quel rapport les points *G* & *B* peuvent avoir avec l'Ellipse ou avec l'Hyperbole.

Dans l'Ellipse dont les demi-axes sont *CH*, *CI*, & la touchante *GE* en *E* qui fait l'angle *GER* demi-droit, l'ordonnée *ER* sera égale à la soûtangente *GR*.

A cause de la touchante *EG* & de l'ordonnée *ER*, on aura *CR*, *CH*, *CG* en proportion continuë.

Mais soit $CH = r$. $CR = y$. $CI = s$; d'où l'on aura $CG = \frac{rr}{y}$.

Mais à cause de l'Ellipse on a $rr | ss || rr - yy | \frac{rrss - yyss}{rr} =$ quarré de *ER*. Et par ce qui a été posé que *GR* est égale à *ER*, on a $\frac{rr}{y} - y$, ou bien $\frac{rr - yy}{y} = \frac{\sqrt{rrss - yyss}}{rr}$; & quarrant $\frac{r^4 - 2rryy + y^4}{yy} = \frac{rrss - yyss}{rr}$, & divisant par $rr - yy$, on aura $\frac{rr - yy}{yy} = \frac{ss}{rr}$, ou bien $\frac{r^4 - rryy}{yy} = ss = CI$ quarré.

Mais le quarré de $CG = \frac{r^4}{yy}$, & le quarré de *CG* moins le quarré de *CH* sera $\frac{r^4}{yy} - rr$, ou bien $\frac{r^4 - rryy}{yy}$, ce qui vient d'être trouvé égal à *CI* quarré ; donc le rectangle *KG*, *GH* étant égal au quarré de *CI*, il s'ensuit que le point *G* est le foyer de l'hyperbole *DH*, qui a les mêmes axes que l'Ellipse *HIK*.

Soit maintenant l'hyperbole *DH*, qui ait les mêmes axes que l'Ellipse *HIK* dont nous venons de parler ; & soit sa touchante *FD*, qui fasse avec son axe *HK* l'angle demi-droit *DFO*, & par conséquent *DO* sera égale à *FO*.

On aura donc de même que dans l'Ellipse *CF*, *CH*, *CO* en proportion continuë, & ayant posé $CO = z$. $CH = r$. $CI = s$, on aura $CF = \frac{rr}{z}$, & à cause de l'hyperbole $rr |$

$ss \parallel zz - rr \left| \frac{sszz - ssrr}{rr} \right. = OD$ quarré. Mais aussi par l'hypothese on a $z - \frac{rr}{z}$, ou bien $\frac{zz - rr}{z} = OD$. Donc $\frac{z^4 - 2zzrr + r^4}{zz} = \frac{sszz - ssrr}{rr}$; & ayant divise par $zz - rr$, on aura $\frac{zz - rr}{zz} = \frac{ss}{rr}$, ou bien $\frac{zzrr - r^4}{zz} = ss = CI$ quarré.

Mais le quarré de CH moins le quarré de $CF = rr - \frac{r^4}{zz}$, ou bien $= \frac{rrzz - r^4}{zz}$; donc le quarré de CH moins le quarré de CF, ce qui est le rectangle KF, HF, sera égal au quarré de CI; & par conséquent le point F sera le foyer de l'Ellipse qui a les mêmes axes CH, CI que l'hyperbole, & le lieu de tous les angles droits qui sont faits par les touchantes de l'hyperbole ou des sections opposées, sera le cercle dont le centre est C & le rayon CF.

Pour les Angles aigus ou obtus.

Par le Lemme tous les angles aigus ou obtus autour du sommet V du cone sur le plan vertical ou par le sommet, & qui donnent les points comme EM sur la directrice, donneront les rectangles XE, XM ou Xm qui seront tous égaux ou quarré de XV: c'est pourquoy les valeurs de GE & de GM qu'on a trouvées d'abord, doivent être augmentées chacune de la quantité de XG, qui est toûjours la même, & que j'appellerai t, qui est donnée par la nature de l'angle donné, & par consequent l'équation qu'on a trouvée d'abord doit être changée par l'augmentation de t dans GE & dans Gm avant que d'en faire le produit, & ce produit sera aussi égalé au quarré de XL ou XV, & si l'on retient pour GL ou GN la valeur p, on aura $XV = p + t$: c'est pourquoy le produit XE par XM ou Xm sera $= pp + 2pt + tt$.

Mais pour abreger le calcul on posera $GE = e$, & $GM = i$, on aura l'équation $tt + ti + te + ie = pp + 2pt + tt$, laquelle se réduira à $ti + te + ie = pp + 2pt$.

Maintenant si à la place de ie on substituë la valeur qu'on a trouvée d'abord $=pp$, & de même pour ii & te, qu'on y mette leur valeur, on aura toute l'équation

$$\frac{ty^3r+tyrxx+tdryy+tdrxx}{yy\sqrt{yy+xx-rr}+rxy}+\frac{try^3+tryxx+tdryy+tdrxx}{yy\sqrt{yy+xx-rr}-rxy}+\frac{rrxx-ddxx+rryy+2rrdy+rrdd}{yy-rr}=pp+2pt.$$

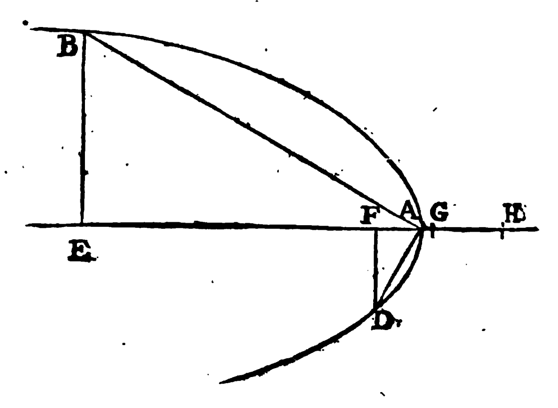
Mais cette équation se réduit à $\sqrt{yy+xx-rr}=\frac{ddxx-rrxx-rryy-2rrdy-rrdd+2tpyy-2tprr+ppyy-pprr}{2trd+2try}$, laquelle étant réduite, en ôtant le signe radical, sera le lieu d'une ligne courbe du second genre ; c'est-pourquoy elle formera aussi sur le plan de la section une ligne du second genre. On la pourra facilement construire sur le plan de la base, en la réduisant & en se servant des touchantes du cercle de la base, lesquelles seront menées des points E & M. Mais dans le cas de la parabole où la directrice touche le cercle de la base, & où les d sont égales aux r, si dans toute cette équation on substituë r à la place de d, l'équation se réduira à la suivante $\sqrt{yy+xx-rr}=-\frac{rryy-2r^3y-r^4+2tpyy-2tprr+ppyy-pprr}{2trr+2try}$; & posant $v-r=y$, & substituant ses valeurs à la place des valeurs de y, on réduira cette équation à $\sqrt{vv-2vr+xx}=-\frac{rvv+2tpv-4tpr+ppv-2ppr}{2tr}$, dont chaque partie étant quarrée donnera un lieu à l'une des Sections Coniques ; c'est-pourquoy cette courbe formera aussi sur le plan de la section, une Section Conique qui sera le lieu des angles aigus ou obtus, dont les uns sont supplément des autres ; ce qui paroît par ce qui a été démontré dans le Lemme.

Mais comme la directrice de la section parabolique est aussi la directrice de la section du cone du lieu, & que cette directrice coupe le lieu sur la base, comme il est facile à voir par la construction du lieu ; car elle touche le cercle base du cone, & par conséquent elle coupe la section conique base du lieu : c'est-pourquoy le lieu sur la section sera les hyperboles opposées, dont l'une sera le lieu

des angles obtus, laquelle est formée par la partie du lieu de la base coupée par la directrice, & laquelle est du côté du cercle base de la section parabolique, & l'autre partie sera celle de l'autre côté qui donne les angles aigus.

Mais si l'on veut déterminer sur l'axe de la parabole, qui est aussi l'axe des hyperboles du lieu, quelle est la grandeur de leur axe, on le pourra faire par le moyen de la base; car le point de rencontre des deux touchantes du lieu sur la base à l'endroit où la directrice la rencontre, formera le centre des sections ou hyperboles opposées, & les extremités de l'axe sur la base du lieu formeront les extremités de l'axe du lieu.

On pourra aussi trouver la grandeur de l'axe des hyperboles du lieu sur l'axe de la parabole, si dans la parabole *BAD* dont l'axe est *AE*, on mene du sommet *A* la corde *AB*, qui fasse l'angle *BAE* égal à la moitié de l'angle aigu proposé, & que du même sommet *A* on tire la corde *AD* perpendiculaire à *AB*, qui



par conséquent fera l'angle *DAE* égal à la moitié de l'angle obtus supplément de l'angle aigu proposé. Ce sera la même chose si l'on commence par l'angle obtus. Des points *B* & *D* ayant tiré les ordonnées *BE*, *DF* à l'axe, le quart de *EF* sera le quart de l'axe des hyperboles opposées du lieu qui sera égal à *GH*, & le quart de *AF* sera la distance *AG* dont le sommet *G* de l'hyperbole du lieu des angles obtus sera éloigné du sommet *A* de la parabole; ce qui est évident par les proprietés des touchantes de la Parabole qui font des angles donnés.

OCCULTATION

OCCULTATION DE JUPITER PAR LA LUNE OBSERVÉE EN PLEIN JOUR.

Par Mrs. Cassini & Maraldi.

NOus avions trouvé par le calcul que le 27 de Juillet de cette année 1704 Jupiter devoit être caché par la Lune, & quoyque ce calcul marquât que l'Eclipse de Jupiter dût arriver de jour, nous ne perdîmes pas l'esperance de la pouvoir observer; parce que dans une pareille Eclipse arrivée l'an 1679, & en diverses rencontres, M. Cassini avoit observé cette Planete bien avant dans le jour, & qu'il y avoit un mois que nous l'observions au meridien même avec une Lunete de deux pieds. Nous nous preparâmes donc à observer cette Eclipse; & pour tirer de ces observations la parallaxe de la Lune, nous prîmes ce jour-là le passage de ces deux Planetes par le meridien, & observâmes à differentes heures du jour la difference d'ascension droite & de declinaison entre la Lune & Jupiter, par le moyen des fils qui se croisent à angles de 45 degrés au foyer de la Lunete, suivant la methode de M. Cassini.

1704. 23 Aoust.

A $1^h\ 22'\ 51''$ après midi le bord Occidental de Jupiter commença de toucher le bord éclairé de la Lune avec une Lunete de 8 pieds.

1.22 57 Le même bord toucha la Lune avec une Lunete de 18 pieds.

1.24 20 Jupiter fut entierement caché par la Lune.

Pour observer la sortie de Jupiter du bord Occidental de la Lune, qui n'étoit pas visible à cause que la Lune étoit en décours, on tenoit toûjours la corne Septentrionale

de la Lune dans l'interfection des quatre fils par le moyen de la machine parallatique; & ayant obſervé à l'égard de ces fils l'endroit où Jupiter avoit été caché par le bord Oriental de la Lune, nous étions attentifs à pareille diſtance des fils vers l'Occident où devoit être le bord obſcur de la Lune, & d'où devoit ſortir Jupiter, que nous apperçûmes ſeulement lorſqu'il paroiſſoit à moitié ſorti; ce qui arriva à $2^h\ 6'\ 45''$ après midi, & il ſortit entierement à $2^h\ 7'\ 29''$. Après ces obſervations on continua à comparer la Lune avec Jupiter qu'on voyoit diſtinctement, quoyque ſa lumiere ne fût pas auſſi vive que celle d'un grand nombre d'étoiles fixes qu'on peut voir commodément pendant le jour avec des Lunetes ordinaires de 3 à 4 pieds. Cependant Jupiter qui au commencement de Juillet ne paſſoit au meridien que deux heures avant le Soleil, ſe voyoit mieux que Saturne qui paſſoit par le même meridien trois heures avant Jupiter; & la lumiere de Saturne étoit encore plus foible que celle de Mercure, que nous avons vû le mois de Juin paſſé pendant pluſieurs jours au meridien même avec une Lunete de 3 pieds lorſqu'il etoit près de ſa digreſſion Occidentale; ce que nous avons continué de faire pendant pluſieurs jours au mois de Juillet lorſqu'il étoit dans ſa digreſſion Orientale.

Après avoir donné part à l'Academie de ces obſervations de Mercure, qui ſont les premieres qui lui ayent été communiquées, nous l'avons fait ſçavoir à pluſieurs Aſtronomes avec leſquels nous avons correſpondance, afin qu'ils puiſſent s'appliquer auſſi à ces obſervations, par le moyen deſquelles on reglera plus facilement le mouvement de cette Planete.

Meſſieurs Manfredi & Stancari ont fait auſſi la même obſervation de Jupiter à Bologne chacun ſeparément de la maniere qui ſuit :

	M. Manfredi.	M. Stancari.
piter commença de toucher le bord de la Lune à	$2^h\ 6'\ 18''$	$2^h\ 6'\ 27''$
Tout Jupiter eſt caché par la Lune.	2 7 48	2 7 39

	M. Manfredi	M. Stancari
Quoyqu'ils fussent attentifs à l'Emersion, ils ne pûrent voir Jupiter qu'à lorsqu'ils jugerent qu'il étoit tout sorti de la Lune.	$2^h\ 51'\ 32''$	$2^h\ 51'\ 38''$

HISTOIRE DU FORMICA-LEO.

PAR M. POUPART.

LE Formica-leo est un Insecte qui ressemble assez bien à l'araignée, par ses inclinations, par sa maniere de filer, par la figure & par la mollesse de son corps. Il a aussi quelque chose du cloporte, & du premier coup d'œil on le prendroit pour ce petit animal. Il est d'un gris sale, & marqué de points noirs, qui sont comme autant de petites aigrettes qui le font paroître tout armé de piquants comme un porc-épic, quand on le regarde avec la loupe. Son corps est entouré de plusieurs anneaux qui le rendent tout ridé. Il a six pieds, quatre sont attachés à sa poitrine, & deux à une longue avance qu'on peut prendre pour son col. Sa tête est menuë & plate, ses deux cornes sont dures, creuses, longues de deux lignes, un peu plus grosses qu'un cheveu, & crochuës par le bout comme les ongles du chat. Quand on les regarde avec le microscope, elles paroissent à peu près comme les cornes d'un grand scalabré, qu'on appelle cerf-volant. Il y a à chacune de leur base un petit œil noir qui voit fort clair; car l'animal fuit au moindre objet qu'il apperçoit.

1704. 30 Aoust. Fig. 1 & 2.

Cet Insecte a été nommé Formica-leo, parce qu'il vit ordinairement des fourmis qui donnent dans ses embuscades: mais cela ne merite pas de le faire nommer un lion, car il n'a que la finesse du renard; il seroit donc mieux de l'appeller Formica-vulpes.

La sobrieté est d'un grand secours à ce petit animal, d'autant qu'il ne vit que de quelques fourmis, ou autres Insectes qui donnent par hazard dans ses pieges. Mais il

n'y en a guere qui lui conviennent mieux que la fourmi, parce que tous les petits animaux qui ont des aîles évitent ses surprises ; la plûpart des autres sont trop gros, ou bien ils ont la peau trop dure pour être percez avec ses cornes.

Voici de quelle maniere il s'y prend pour attraper les Insectes. Il se campe ordinairement sous le pied d'une vieille muraille pour être à couvert de la pluïe. Il faut que cet endroit soit garni d'un sable fort menu & bien sec, afin qu'il y puisse faire une fosse ou tremie qui ait la figure de cone concave renversé.

Quand il ne veut creuser qu'une petite fosse, il courbe en bas son derriere qui est fait en pointe, dont il se sert comme d'une espece de soc de charuë, avec lequel il laboure la terre en marchant à reculons & à petites secousses. Lorsqu'il est arrivé à une petite profondeur, il jette le sable fort haut avec sa tête à divers coups, réïterez promtement, & sa tremie se trouve faite.

Mais lorsqu'il veut faire une fosse profonde, il trace d'abord un grand cercle qui est la base du cone ou de la
FIG. 4. fosse qu'il veut creuser. Il s'enfonce ensuite sous le sable, qu'il jette fort haut avec sa tête à chaque pas qu'il fait toûjours à reculons. En descendant il décrit une ligne spirale, qui va finir interieurement à la pointe du cone concave qu'il a formé.

Sa tête est fort propre pour jetter le sable, car elle est
FIG. 5. plate, & son col fort long quand il ne le retire pas : Ainsi il peut donner de grandes secousses, comme je l'ay vû faire à ceux que j'ay observé, qui jettoient quelquefois à un demi pied de leurs tremies les petits animaux qu'ils avoient succez. Quand la fosse est achevée, il se tient à côté de son fond, & il ne fait paroître que ses deux cornes qu'il écarte dans la pointe de la fosse.

Pendant qu'il est ainsi en embuscade, si quelque fourmi ou autre insecte semblable vient à passer sur le bord de sa fosse, & qu'il fasse ébouler du sable dans le fond, cela avertit le Formica-leo qu'il y a du gibier pour lui.

Alors il jette du sable avec sa tête sur la fourmi pour la faire tomber dans le fond de la fosse entre ses deux cornes, car il ne court jamais après elle. Mais comme cela n'arrive pas toûjours du premier coup, & qu'elle s'apperçoit des pieges qu'on lui tend, elle grimpe pour sortir de la fosse, & quelquefois elle retombe à cause de la mobilité du sable; elle veut enfin remonter, mais le Formicaleo qui est toûjours à l'aguet, jette encore du sable sur la fourmi. Si elle tombe entre ses cornes il la serre, & les plonge assez avant dans son corps, car il les peut même croiser l'une sur l'autre; il la tire quelquefois sous le sable, & la succe tant qu'il y trouve de l'humeur. Quand il ne reste plus que la peau de la fourmi, il la jette hors de sa tremie; & si elle est démolie, il la raccommode pour une seconde chasse.

Cet animal mourroit plutôt de faim que d'aller chercher sa vie comme font les autres insectes; mais ce n'est pas par lâcheté comme on le pourroit croire qu'il fait cette guerre de renard, il ne la peut faire autrement, parce qu'il ne marche jamais qu'à reculons, & à petites secousses. Il est jour & nuit à l'afus caché sous le sable dans le fond de sa fosse; parceque ne pouvant chercher son gibier, il faut que le hazard le lui amene, ce qui arrive rarement; ainsi il est obligé de faire avec le tems, ce que la nature ne lui permet pas de faire par la course.

Mais il semble pour les raisons que je vais apporter, que toutes ces ruses sont inutiles pour la subsistance de ce petit animal, qu'on diroit n'attraper les insectes que par inclination, & pour s'en divertir comme fait le chasseur qui ne va à la chasse que pour son plaisir.

1°. Il ne serre jamais les insectes qu'avec l'extremité de ses cornes, qui semblent n'être point percées par le bout; ainsi il est difficile de se persuader qu'il attire le suc de ces petits animaux par cet endroit.

2°. Quand on le regarde avec la loupe, on n'apperçoit point qu'il allonge un aiguillon pour succer les petits animaux qu'il attrape, comme font plusieurs insectes, & l'on

voit toûjours une distance considerable entre sa tête, & l'animal qu'il tient avec la pointe de ses cornes.

3°. L'on a mis plusieurs Formica-leo dans une boëte qu'on a fermée exactement pendant six mois, de-peur qu'il ne tombât quelques insectes dans leurs fosses; cependant ils ont vécu comme ceux à qui l'on a donné des mouches, & ils ont fait leurs tremies, & les changemens dont on parlera dans la suite: ce qui pourroit faire croire que le Formica-leo peut vivre sans recevoir de nourriture.

Mais quand on considere que ses cornes croissent après qu'on les a coupées; qu'il devient plus petit quand il ne prend point d'aliment; qu'après avoir seulement attrapé un insecte, il paroît beaucoup plus gros qu'il n'étoit, & qu'ayant succé une mouche pendant deux ou trois heures, elle devient seche à se réduire en poudre en la froissant entre les doigts; l'on est persuadé que quoyqu'il puisse vivre sans qu'on s'apperçoive par quel endroit il tire sa nourriture, il ne laisse pas d'en recevoir.

Je croy donc qu'on pourroit regarder les cornes du Formica-leo comme deux seringues avec lesquelles il pompe le suc des animaux. En effet je les ay considerées avec un microscope à liqueurs qui grossit extrêmement les objets, & j'ay apperçû un corps transparent & membraneux, qui va tout du long de la cavité de la corne, qui pourroit bien être le piston de la seringue.

Quand le Formica-leo est parvenu à un certain âge, & qu'il veut se renouveller afin de paroître sous une autre forme; alors il ne fait plus de tremies, mais il laboure le sable, sur lequel on ne voit plus que des traces, & des routes fort irrégulieres.

Après qu'il a long-tems labouré, il s'arrête sous le sable Fig. 5. où il fait une boule creuse dans laquelle il se renferme pour changer de forme. Cette boule est faite de soye, de cole & de sable, le tout mêlé ensemble. Il file la soye, avec son derriere à peu près comme fait l'araignée: la cole sort de toutes les parties de son corps, & il prend le sable dans le lieu où il fait sa retraite.

Pour faire cette boule il tourne insensiblement en rond comme sur un centre, en portant son derriere à droit & à gauche qu'il fait toucher au sable pour y attacher la soye, soit qu'elle s'embarrasse aux inégalitez des grains de sable, soit qu'elle s'y cole avec la matiere gluante dont elle peut être empreinte. De quelque maniere que la chose arrive, les grains de sable sont si bien attachez à la soye, qu'il est assez difficile de les en separer, même en la secoüant très-fort tandis que l'ouvrage est encore tout molasse, ou bien en la frotant avec les doigts.

Cette soye est incomparablement plus fine que la soye ordinaire, puisqu'on ne la peut guerre appercevoir qu'avec le secours du microscope. Pour la bien voir il faut deterrer l'ouvrage de ces petits animaux avant qu'il soit entierement achevé ; on le trouvera moû comme du coton, parcequ'il n'a pas encore été endurci par la cole qui ne sort que fort lentement du corps de l'animal : on levera cette soye en l'air avec la pointe d'une aiguille, & l'on verra de l'espace entre les grains de sable qui sont suspendus, sans qu'on puisse appercevoir la soye à moins de se servir d'une loupe, tant il est vrai que cette soye est fine.

Il est impossible sans quelque artifice de voir comme ces petits animaux filent leur soye, & comme ils bâtissent leurs loges, parce qu'ils travaillent toûjours sous le sable. Il faut pour cela leur ôter plusieurs fois leur ouvrages avant qu'ils soient achevez, ils les recommenceront, & à la fin ces petits animaux deviendront si foibles qu'ils n'auront plus la force de se cacher sous le sable comme il ont accoûtumé de faire, & alors on leur verra filer lentement leur soye avec le derriere sur la superficie du sable, de la maniere que j'ay déja fait remarquer.

Après que le Formica-leo a long-temps travaillé, il se trouve au milieu d'une grosse boule molle, qui n'est encore faite que de soye & de sable mêlez ensemble. Cette boule s'endurcit peu à peu en s'humectant de la viscosité qui sort du corps de l'animal, laquelle penetre cette loge de tous côtez.

Ce qui m'assura principalement qu'il transsudoit une humeur gluante du corps de ces petits animaux, c'est qu'il s'attacha plusieurs grains de sable sur le col d'un de mes Formica-leo, qui formerent un petit rocher assez dur. Pendant qu'il eut cette masse sur le col il ne fit plus de tremie, parce que ce fardeau lui empêchoit le mouvement de la tête. Je cassay ce petit rocher avec des pinces, aussitôt le Formica-leo fit sa tremie, & quelque temps après il travailla à former sa loge.

Quand le Formica-leo est renfermé dans sa maisonnette, il la drape par dedans avec la soye qu'il file. Cette soye ne se mêlant plus avec le sable, il se forme un tissu fort serré, qui ressemble à un petit satin couleur de perle, dans lequel l'animal reste en repos la tête entre les jambes. On pourroit croire d'abord que ce satin est une cole seche qui s'est détachée du corps de l'animal; mais si cela étoit, on la casseroit aisément quand on la plie, ce qui n'arrive point, & il ne seroit pas flexible comme il est. D'ailleurs cette petite étoffe est continuë à la loge, du moins elle y est si bien attachée qu'on ne l'en peut separer sans détruire la boule. J'ay mis ce satin dans de l'eau pendant quelques jours, il ne s'est point fondu comme il semble que devroit faire de la cole, mais il a perdu sa belle couleur; ce qui persuade que le peu de cole qui s'étoit mêlée avec la soye & qui luy donnoit peut-être cette belle couleur s'est fondu, & que l'étoffe est restée toute seule. Ce petit satin ressemble un peu à celui que font certaines arraignées sur les feüilles des arbres, qui leur sert de loge ou de nid pour faire leurs œufs, mais il est plus épais que celui de ces araignées.

Pour marquer que le Formica-leo ne travaille à draper sa maisonnette par dedans qu'après qu'elle est achevée; c'est que si on l'ouvre avant qu'elle soit endurcie, on ne la verra point tapissée du satin dont on a parlé.

Mes Formica-leo resterent dans leurs loges pendant six semaines ou deux mois avant que de se changer en vermisseaux; mais le temps qu'ils y restent n'est point fixé. Ils avoient

avoient la tête entre les jambes afin de s'arrondir autant qu'ils pouvoient pour occuper moins de place, & s'accommoder à la figure concave de leurs petites boules.

Quand il fut temps de changer de figure, ils commencerent à se dépoüiller de leur premiere peau, à laquelle leurs cornes, leurs yeux & leur poils resterent attachés. Cette peau ressembloit pour lors à un petit peloton ratatiné, blanchâtre par dedans, qui avoit une ouverture tout au long du ventre par la quelle étoit sortie un insecte dont on va parler.

Aprés que le Formica-leo a quitté sa peau, il paroît sous la forme d'un vermisseau qui a environ trois lignes de long, quatre aîles membraneuses, six pieds, deux grosses cornes ou antennes moles & creuses, deux yeux noirs, & deux tenailles en forme de scie qui lui servent de dents. Ce vermisseau reste encore quelque temps dans sa petite retraite avant que de paroître sous une nouvelle forme; mais on ne peut sçavoir le temps qu'il y demeure, parceque le Formica-leo dont il sort est caché dans sa loge quand il se métamorphose en ver. FIG. 6. 7. & 8.

Lorsque le vermisseau veut sortir de sa maisonnette pour se métamorphoser, il y fait un petit trou rond avec ses dents qui ressemblent assez bien à celles des fauterelles. Cependant le trou qu'il y fait ne paroît pas rond, parceque la piece y demeure ordinairement attachée par un côté, ce qui rend le passage si étroit, que la moitié du vermisseau reste dans la loge, & l'autre moitié dehors. En cet état le vermisseau n'est plus vivant, ce n'est qu'un fourreau membraneux & transparent, qui a des cornes ou antennes, des yeux, & des dents, des aîles, des pieds, &c. qui font les étuis de semblables parties d'une belle mouche qu'on appelle Demoiselle, qui est sortie de ce fourreau par une crevasse qui s'est fait sur son dos proche de sa tête. Cette mouche a quinze ou seize lignes de long, mais ses aîles n'en ont d'abord que deux; parcequ'ayant été emboëtées en des étuis qui n'ont aussi que deux lignes, elles en ont pris la figure & la grandeur. Elles FIG. 9.

sont humides & plissées de plusieurs plis qui se dévelopent en deux minutes de temps, & deviennent plus longues que son corps. Lorsque la Demoiselle est sortie de son fourreau, elle reste quelque temps sur ses pieds sans mouvement pour dessecher ses aîles afin de prendre la volée, &
Fig 10.
joüir d'une vie plus heureuse que celle qu'elle menoit sous la peau du pauvre Formica-leo.

Tandis que la Demoiselle est renfermée dans son vermisseau, elle ne peut avoir que trois lignes de long, parce qu'il n'a lui même que cette grandeur : mais aussi-tôt qu'elle en est sortie, elle s'allonge de plus de quinze lignes. Ce déployement subit vient de ce que pendant que la Demoiselle est encore dans son fourreau, elle est raccourcie & pliée comme un courcaillet qu'on presseroit par les deux bours. Mais aussi-tôt qu'elle en est sortie, elle s'etend de toute sa grandeur, comme une éponge qu'on serre entre les doits, qui reprend sa grosseur quand on ne la presse plus.

En l'année 1703 les Formica-leo que j'avois observé ne changerent point en Demoiselles ; cette metamorphose n'arriva que l'année suivante. Cela me fait croire que ces petits animaux ne changent pas dès la premiere année, & qu'il leur faut un certain âge avant que de se métamorphoser.

Aprés que la Demoiselle est sortie, si l'on ouvre la maisonnette où s'étoit renfermé le Formica-leo, on verra comme nous avons dit qu'elle est tapissée d'un petit satin poli & couleur de perle. On y trouvera la peau du Formica-leo qui est ce petit peloton ratatiné, applati & herissé de poils dont on a deja parlé. On y remarquera aussi le fourreau membraneux qui enveloppoit immediatement
Fig. 11.
la Demoiselle. Mais ce qu'il y a de singulier, c'est qu'on y trouve quelquefois un œuf que la mouche y fait avant que d'en sortir. Cet œuf a deux lignes de long, une d'épaisseur, & ressemble un peu à un petit gland allongé. Sa coquille est dure, & toute semblable à celle des œufs des poules. La substance qu'il contient n'est pas fluide, & j'ay

remarqué que l'œuf changeoit de couleur en differens temps. J'ay exposé un de ces œufs pendant quelque jours aux grandes chaleurs du Soleil, la matiere qu'il renfermoit est devenuë dure & noire comme de l'encre.

Il semble que ces petites Demoiselles ne font qu'un œuf, car on n'en a trouvé qu'un dans le corps de quelques-unes qu'on a ouvertes : un seul qu'une autre avoit déposé dans sa loge avant que d'en sortir, & une Demoiselle étant montée en haut de la boëte dans laquelle on l'avoit renfermée, quelques heures aprés elle fit aussi un œuf. Cependant il n'y a pas d'apparence que chacune de ces Demoiselles ne fassent qu'un œuf, parcequ'il s'en trouve toûjours quelques-uns qui ne sont pas féconds, & quelques autres produisent des mâles, d'où il est aisé de conclure que peu à peu l'espece auroit entierement manqué.

On peut voir par la précipitation avec laquelle ces Demoiselles font leurs œufs, qu'elles n'attendent pas toûjours les approches du mâle pour les déposer. C'est peut-être à cause de la rareté de ces accouplemens que les Formica-leo & les petites Demoiselles qui en sortent sont assez rares.

Les petites boules dans lesquelles se renferment les Formica-leo sont absolument necessaires pour la naissance des Demoiselles ; car j'en ay rompu quelques-unes pour mettre le Formica-leo à nud sur le sable dans le temps qu'ils étoient prêts de se metamorphoser, ils n'ont pas laissé de se dépoüiller de leur peau ; mais les Demoiselles n'ont pû sortir des vermisseaux dans lesquels elles étoient renfermées, quoyqu'elles ayent vêcu fort long-temps aprés, & fait plusieurs mouvemens pour en sortir. Un des principaux usages de cette boule, c'est que par son moyen la Demoiselle se dépoüille du vermisseau dans lequel elle est renfermée, passant avec difficulté par le petit trou que le même vermisseau y fait avec les dents.

Il faut remarquer que les differentes Demoiselles qu'on voit voltiger durant l'esté le long des ruisseaux & autour des buissons ne sortent pas toutes de ce petit animal. Cel-

les qui en viennent ont deux antennes qui ſont menuës proche la tête, & vont en groſſiſſant juſqu'au bout. Elles ont deux gros yeux aux côtez de la tête, & n'en ont point deſſus comme les autres eſpeces de Demoiſelles. Leur ventre n'eſt point canelé tout du long comme il arrive aux autres, & le bout de leur queuë eſt heriſſé de poils. Leurs aîles ſont d'un blanc cendré marquées de quelques points noirs, & ne ſont bigarées d'aucunes vives couleurs. Ainſi il y a de l'apparence que les belles mouches que la varieté des couleurs a fait nommer Demoiſelles, auſſi-bien que toutes leurs differentes eſpeces ont une autre origine.

Il y a deux autres belles eſpeces de grandes Demoiſelles, dont l'origne eſt bien differente de celles dont nous venons de parler. Elles viennent de deux animaux aquatiques qui ne reſſemblent point au Formica-leo.

Nous ferons voir quelque jour que les animaux d'où ſortent ces grandes eſpeces de Demoiſelles ſont de veritables poiſſons; car nous avons remarqué leurs oüies, & nous les avons fait deſſiner par avance à la Figure 14. & 15. & les animaux tous entiers à la Figure 12. 13. & 16.



EXPLICATION DES FIGURES.

1. CEtte Figure represente le Formica-leo dessiné trois fois aussi grand que nature, pour faire voir comme il est herissé de piquans. Il n'y a rien de plus naturel que ce dessein.

2. Le dessous du Formica-leo.

3. La tête & le col du Formica-leo separez de la poitrine, & dessinez beaucoup plus grands que nature, afin qu'on puisse voir distinctement les plus petites parties.

4. La fosse ou tremie que le Formica-leo a faite pour y faire tomber les insectes. Il est caché au fond, où il ne fait paroître que ses cornes, qu'il tient écartées pour être tout prêt à saisir les petits animaux.

5. La loge dans laquelle le Formica-leo s'est renfermé pour changer de forme.

6. Vermisseau qui paroît après que le Formica-leo a quitté sa peau, dans lequel la Demoiselle (10) est renfermée.

7. Cette Figure represente le Vermisseau (6) dessiné beaucoup plus grand que nature, afin qu'on puisse voir distinctement ses yeux, ses pieds, ses aîles, qui sont des fourreaux dans lesquels les mêmes parties de la Demoiselle sont renfermées.

8. Cette Figure grotesque qu'on a dessinée beaucoup plus grande que nature, est le Vermisseau qu'on a representé à la Figure 6 & 7, en la situation où il est dans sa loge. Il a le dos courbé, afin de s'accommoder à la figure de sa loge, & d'occuper moins de place.

9. La boule ou loge du Formica-leo avec le Vermisseau marqué 6, qui est partie dedans & partie dehors, dont la Demoiselle (10) est sortie par une crevasse qui s'est faite sur le dos du Vermisseau.

10. Cette Figure represente la Demoiselle qui est sortie du Vermisseau 6, ou 7, ou 8. Il semble que ce dessein vole, & que c'est un corps aërien tant il paroît leger.

11. Les œufs que les Demoiselles font presque aussi-tôt qu'elles sont sorties de leurs petites loges ou boules.

12. Animal aquatique, d'où sort une grande espece de Demoiselle ; autre que celle qui vient du Formica-leo. Ce petit animal est un veritable poisson.

13. Le dessous de l'animal aquatique represente à la Figure 12.

14. Maniere de masque qui couvre la tête de l'animal aquatique marqué 12, qui sont ses oüies vûës par dehors.

15. Masque qui couvre le devant de la tête de l'animal aquatique marqué 12, qui sont ses oüies vûës par dedans.

16. Autre animal aquatique un peut different du precedent, d'où sort une grande espece de Demoiselle bigarée de belles couleurs. On diroit que ces trois petits animaux seroient vivans.

OBSERVATIONS

De la conjonction de Jupiter avec la Lune, au matin du 24 Aoust 1704 à l'Observatoire.

PAR M. DE LA HIRE.

1704. 6 Septembre. JUpiter étant proche de sa conjonction avec la Lune, nous l'observâmes avec le micrometre appliqué à la Lunette de 7 pieds.

Nous trouvâmes qu'à $1^h\ 55'\ 50''$ il étoit éloigné de la ligne qui passoit par le centre & par les cornes de la Lune de $32'$.

A $2^h\ 11'\ 56''$ son éloignement à la même ligne étoit de $25'\ 20''$.

A $2^h\ 25'$ il n'étoit plus éloigné de la même ligne que de $18'\ 20''$.

A $2^h\ 32'$ la distance entre le centre de Jupiter & la ligne qui touchoit la Lune, & qui étoit perpendiculaire à celle qui passoit par les cornes $2'\ 14''$.

A $2^h 36' 25''$ le centre de Jupiter étoit dans la ligne touchante de la Lune, laquelle étoit parallele à celle qui passoit par les cornes.

A $2^h 53' 0''$ le centre de Jupiter étoit dans la touchante de la Lune, laquelle étoit perpendiculaire à celle qui passoit par les cornes.

A $3^h 10' 6''$ le centre de Jupiter étoit dans la ligne qui passoit par les cornes & par le centre de la Lune. Cette ligne a été déterminé exactement par le moyen de deux filets du micrometre qui etoient éloignés l'un de l'autre de la distance du demi diametre de la Lune, & par le moyen des cornes visibles. La distance du centre de Jupiter à la corne australe étoit alors de $1' 54''$, & ç'a été le vrai tems de la conjonction apparente de ces deux astres.

Nous avons aussi observé le diametre de Jupiter de $41''$ avec le micrometre appliqué à une Lunette de 16 piés.

Nous trouvâmes aussi le diametre de la Lune à la hauteur de 28° à peu près, & à 2^h de $30' 5''$

CONJONCTION DE JUPITER AVEC LA LUNE

Observée le 24 Aoust 1704.

PAR MRS. CASSINI ET MARALDI.

APrès l'occultation de Jupiter par la Lune arrivé le 27 Juillet, nous avons observé la conjonction de la même Planete fort proche de la Lune le matin du 24 Aoust ; ce que nous avons fait en observant avant & après la conjonction les differences d'ascension droite & de declinaison entre la Lune & Jupiter par les passages de la Lune de Jupiter par les fils qui se croisent au foyer de la Lunete de la maniere qui a été expliquée autrefois. 1704. 6 Septembre.

Le 22 Aoust le centre de la Lune passa au meridien à	$5^h\ 43'\ 16''$
Et le bord à	5 44 18
La hauteur meridiennne de la corne superieure de la Lune fut de	59 11 50
Celle de la corne inferieure	58 41 10
Le centre de Jupiter passa au meridien à	7 21 14
Et sa hauteur meridienne fut de	63 53 0
Le 23 Aoust le centre de la Lune passa au meridien à	6 3 58
Le bord suivant de la Lune passa au meridien à	6 33 5
Hauteur meridiennne de la corne superieure	62 5 0
Hauteur meridienne de la corne inferieure à	61 33 30
Le centre de Jupiter passa au meridien à	7 18 13
Le bord de la Lune au fil perpendiculaire à	11 55 46
Jupiter au fil perpendiculaire.	12 1 17
Difference du passage.	0 5 41
Difference de declinaison en temps dont Jupiter étoit plus meridional que la corne Septentrionale de la Lune.	0 22
Immersion du premier Satellite dans l'ombre de Jupiter ; mais cette observation n'est pas exacte, á cause que Jupiter étoit fort prés de la Lune.	1 25 47
Le centre de la Lune au fil perpendiculaire.	1 56 13
Le bord au même fil.	1 57 21
Jupiter au même fil.	1 58 39
Difference d'ascension droite entre le bord de la Lune.	1 18
En temps difference de declinaison à l'égard de la corne meridionale.	0 36
Le bord au fil perpendiculaire.	2 7 19½
Le centre de Jupiter.	2 8 18
Difference.	0 55½
Difference de declinaison.	29
Le bord au fil perpendiculaire.	2 16 40

Jupiter

Jupiter au même fil.	17' 18"
Difference d'ascension droite.	0 38
Difference de declinaison.	24
Le bord de la Lune au fil perpendiculaire.	2 24 58
Le centre de Jupiter.	2 25 20
Diff. de declinaison en temps vers le Septentrion à l'égard de la corne meridionale.	0 22 0 18 $\frac{1}{2}$
Le bord de la Lune au fil perpendiculaire.	2 34 7
Le centre de Jupiter.	2 34 13
Difference d'ascension droite.	0 6

Par les observations faites à $2^h\,25'$, & à $2^h\,34'$, on trouve que Jupiter & le bord suivant de la Lune avoient la même ascension droite à $2^h\,37'\,33''$.

Et par la comparaison des observations faites à $2^h\,25'$, & $3^h\,14'$, Jupiter arriva au parallele de la corne meridionale de la Lune à $2^h\,57'\,47''$.

A $3^h\,4'\,9''$ le Satellite fut perpendiculaire à la corne meridionale à la distance d'un diametre de Jupiter.

A $3^h\,10'\,14''$ le bord précedent de Jupiter fut perpendiculaire à la corne.

A $3^h\,11'\,56''$ le bord suivant de Jupiter fut perpendiculaire à la corne.

Donc à $3^h\,11'\,5''$ le centre de Jupiter fut perpendiculaire à la corne, qui est le temps de sa conjonction en longitude; & pour lors le centre de Jupiter étoit éloigné de deux de ses diametres de la corne meridionale.

La conjonction de Jupiter avec la Lune en longitude préceda la conjonction en ascension droite de presque de deux minutes de temps; & elle arriva à $3^h\,13'\,3''$, comme on la tire par les observations suivantes.

Jupiter au fil perpendiculaire à	$3^h\,13'\,45''$
Le bord de la Lune au même fil.	3 14 57
Difference du passage entre le centre de Jupiter & le bord de la Lune.	1 12
Difference de declinaison entre la corne de la Lune & Jupiter, dont Jupiter est plus meridional.	0 9 $\frac{1}{2}$

Jupiter au fil perpendiculaire.	$3^h\ 15'\ 52''$
Le bord de la Lune.	3 19 7
Difference d'ascension droite.	1 15
Difference de declinaison.	$10\frac{1}{2}$
Jupiter au fil perpendiculaire.	3 18 $14\frac{1}{2}$
Le bord de la Lune au fil perpendiculaire.	3 19 35
Difference d'ascension droite.	1 $20\frac{1}{2}$
Difference de declinaison	$12\frac{1}{2}$
Jupiter au fil perpendiculaire.	3 22 $10\frac{1}{2}$
Le bord au fil perpendiculaire.	23 $37\frac{1}{2}$
Difference d'ascension droite.	1 27
Difference de declinaison meridionale.	$13\frac{1}{2}$
Jupiter au fil perpendiculaire.	3 25 $17\frac{1}{2}$
Le bord de la Lune au fil perpendiculaire.	3 26 50
Difference d'ascension droite en Jupiter & le bord de la Lune.	1·$32\frac{1}{2}$
Difference de declinaison	0 $32\frac{1}{2}$



DESCRIPTION ET USAGE D'UN NIVEAU D'UNE NOUVELLE CONSTRUCTION.

PAR M. DE LA HIRE.

LEs grandes conduites d'eau que les Anciens ont faites, auroient pû nous persuader qu'ils étoient fort sçavans dans l'art de Niveler, si les instrumens dont ils se sont servis & tout l'artifice qu'ils y ont employé n'etoient venus jusqu'à nous dans les Ouvrages de Vitruve. Leur grand Niveau qu'ils appelloient le *Chorobate* étoit une piece de bois de 20 piés de longueur, soûtenuë par quelques pieces aux extremités, & qui avoit dans sa partie superieure un canal qu'on remplissoit d'eau, avec quelques petits plombs qui pendoient aux côtés, pour s'assurer si cette piece étoit de niveau; & c'étoit toute la longueur de leurs nivellemens, car ils transportoient le Chorobate de 20 piés en 20 piés pour conduire leurs ouvrages. 1704. 12 Novembre.

Mais les nouvelles découvertes qu'on a faites dans l'Academie des Sciences, & les differens niveaux qu'on y a inventés avec les Lunettes d'approche qui y servent de pinnules, nous ont donné moyen de faire des nivellemens d'une bien plus grande justesse, & avec beaucoup plus de facilité que tout ce qui avoit été fait jusqu'alors; puisqu'on peut niveler tout d'un coup une distance de 1000 toises sans aucune erreur sensible.

Nous avons entre les mains les niveaux de Messieurs Picard, Mariotte, Hugens, Thevenot & Roëmer, dont les constructions sont toutes differentes, & j'en ay aussi donné un qui tire sa justesse de la superficie de l'eau, dont j'ay fait imprimer la description dans le Traité du Nivellement de M. Picard en 1684, & qu'on a copié ensuite

dans les Memoires de l'Academie en 1699. Mais les nivellemens que j'ay faits autrefois par ordre du Roy en differens endroits & à differentes reprises par l'espace de près de 100 lieuës, m'ont fait connoître que tous ces niveaux avoient de grandes incommodités dans l'usage qu'on en fait, & qu'on ne pouvoit les transporter facilement sans être obligé de les rectifier, & quelquefois d'en rétablir les pinnules, ce qui demande des operations assez embarrassantes. Ce n'est pas qu'il soit necessaire de se servir d'un niveau qui soit juste pour faire des nivellemens exacts, puisqu'on en peut facilement venir à bout en prenant quelques précautions, comme il est marqué dans le Nivellement de M. Picard, & comme je l'ay expliqué ensuite dans un petit Traité du Nivellement que j'ay donné au Public.

Le niveau dont je donne icy la description, & que j'ay fait depuis quelque tems, est construit sur un principe different de tous les autres niveaux qui ont paru jusqu'à present : car ils tirent tous leur justesse ou du centre de gravité du corps de tout le niveau, lequel est suspendu par un corps flexible ou autrement, ou d'un plomb aussi suspendu à un fil très-délié comme un cheveu, ou enfin de la superficie de l'eau ou de quelqu'autre corps liquide dont la superficie se met toûjours de niveau. Mais celui-ci n'est point suspendu par quelque corps que ce soit, au contraire le centre de gravité du corps qui lui sert de regle comme à plusieurs autres, est placé au dessus du point d'appui, en sorte que s'il étoit possible de faire que le centre de gravité du corps qui est un point mathematique, demeurât immobile sur l'appui, qui est un point le plus fin qu'il est possible de le faire; on auroit alors le veritable niveau, qui seroit la ligne perpendiculaire menée à celle qui passe par le centre de gravité & par l'appui. Mais comme il est impossible de faire que le centre de gravité demeure dans une position fixe au dessus du point d'appui, on prend pour le vrai niveau la position où ce point est comme indifferent à tomber d'un côté ou d'autre.

On dira peut-être que ce Principe n'est pas si juste que celui où le corps pesant est suspendu par un corps flexible; mais pour peu qu'on fasse reflexion sur ces suspensions, on verra qu'il y a des irregularités très-grandes qui sont causées par la nature de ces corps, outre que si toute la machine est exposée à un petit vent, elle est dans un balancement & dans une agitation continuelle, & il est impossible de déterminer le niveau. Je ne parle point des remedes qu'on a apportés à ces balancemens, comme de faire plonger le poids suspendu à la machine dans de l'eau ou dans de l'huile pour en arrêter les vibrations, puisque ce remede par lui-même a de grandes incommodités, & qu'il n'est pas encore suffisant.

Celui que je propose est ferme, solide & inébranlable étant une fois bien construit, & il se peut transporter comme on voudra sans craindre qu'il puisse s'alterer; & si l'on y fait quelque changement, il sera très-facile de le rectifier sans changer de place, ou, comme on dit, d'une seule station.

Les nouvelles pinnules sur du verre, comme je les ay proposées à l'Academie, & comme elles sont décrites dans les Memoires de l'année 1700, & dans mes Tables Astronomiques, lui donnent aussi un très-grand avantage par dessus tous les autres; car ces pinnules sont inalterables à tous les changemens de l'air, & ne sçauroient être gâtées par quelqu'autre accident que ce soit, quoyqu'elles soient au moins aussi fines & déliées que les filets de ver à soye qu'on avoit consideré jusqu'à present comme les plus propres à faire des observations exactes. Il est très-facile de les faire, puisque ce n'est qu'une petite ligne ou un trait fort délicat qu'on marque avec la pointe d'un diamant sur un petit morceau de verre ou de glace, que l'on arrête au foyer du verre objectif de la Lunette; car le centre de l'objectif tient lieu de pinnule objective, & le trait sur le verre sert de pinnule oculaire. Il est aisé de juger que cette pinnule oculaire ne peut souffrir aucune alteration ou changement, soit par la chaleur ou par le froid, soit

par les petits insectes qui s'attachent aux filets de soye, soit en y touchant, ou enfin en transportant l'instrument de quelque maniere que ce soit; car elle sera aussi solide que la pinnule objective.

La principale partie de ce niveau est une regle de fer qui porte à ses deux extremités les pinnules ou dioptres, qui est un verre objectif de Lunette pour la pinnule objective, & pour la pinnule oculaire un petit morceau de verre avec un petit trait, comme je viens de dire. Ce verre coule dans un chassis ou coulisse pour le pouvoir arrêter à quelle hauteur on veut. Cette regle tient lieu du corps d'une Lunette qui n'a point de verre oculaire, & qui n'a point d'autre tuyau que toute la boëte qui est noircie par dedans & qui est bien fermée.

Il y a sous cette regle de fer une autre regle posée sure champ qui sert à la rendre plus ferme, & qui porte dans son milieu une autre piece de fer ou de leton d'une longueur égale à peu près aux deux tiers de la premiere avec laquelle elle est posée à l'équaire. Cette piece va en s'élargissant par le bas, en sorte que sa largeur est perpendiculaire à la longueur de la regle de la Lunette. A l'extremité de cette piece on y soude des deux côtés les pivots sur lesquels la machine se meut, & par consequent tout le corps du niveau se mouvant; quand les pivots seront à peu près de niveau, la Lunette haussera & baissera dans son mouvement.

Pour les pivots ils demandent un peu de soin dans leur construction. Leur coupe doit être en forme de losange fort aigu, & même un peu tranchant d'un côté & d'autre, qui est le haut & le bas, car c'est par ces endroits où tout le niveau est soûtenu sur l'appui.

Les pivots sont d'acier trempé, & l'endroit où ils posent sur l'appui est un peu creusé quoyque tranchant, afin que dans le mouvement du niveau, ils ne puissent pas s'écarter d'un côté ni d'autre. Il y a deux cavités semblables à l'opposite l'une de l'autre pour l'usage que nous expliquerons ensuite.

Les appuis sont attachés avec des vis à une piece particuliere laqelle est de bois, & cette piéce est arrêtée dans le fond de la boëte avec des vis, en sorte qu'on peut la retirer quand on veut hors de la boëte avec tout le niveau qui pose sur ses appuis.

Ces appuis sont faits d'une piece plate d'acier trempé, dans laquelle il y a deux ouvertures rondes, dont l'interieur est tranchant émoussé, pour soûtenir les pivots du niveau, & pour être assez fermes pour ne se pas gâter dans le mouvement du niveau.

Pour la boëte où l'on enferme le niveau, on peut la faire de quelle figure on voudra à l'exterieur; mais tout le niveau ayant la figure d'un *T*, la boëte doit aussi être de la même figure à peu près, & elle doit contenir l'instrument, ensorte qu'il ait seulement la liberté de se mouvoir un peu d'un côté & d'autre. Aux deux extremités de la partie d'enhaut de la boëte, qui est la traverse du *T*, il y a deux couvertures rondes à l'une desquelles est attaché un bout du tuyau, où entre le canon qui porte l'oculaire; car l'oculaire ne tient point à la Lunette, & l'on peut par ce moyen l'approcher ou le reculer de la pinnule oculaire suivant la force de la vûë de l'Observateur. L'ouverture de l'autre bout de la boëte sert à laisser passer les rayons des objets qui viennent rencontrer le verre objectif ou la pinnule objective.

Vers l'oculaire à la partie de dessous de la longeur de la boëte, il y a une vis assez longue qui se meut dans un écrou qui est attaché à la boëte. Cette vis sert à élever le bout de la regle de fer suivant l'usage & la necessité. Le pas de cette vis est très-fin pour pouvoir élever la regle comme insensiblement en tournant la vis.

A l'opposite de la vis, c'est-à-dire, dans le haut de la traverse de la boëte, il y a par dedans une lame d'un ressort très-mince, qui est arrêtée à la boëte par son extremité la plus éloignée de l'oculaire, & par l'autre elle porte une tige avec un bouton qui passe au dehors de la boëte. Cette tige sert à pousser le ressort vers le bas; car dans son

état naturel il est appliqué contre le dessus de la boëte par le dedans.

Il y a à la vis un repaire ou marque pour l'enfoncer dans l'écrou jusqu'en cet endroit, & alors la regle de la Lunette étant appuïée sur la vis, la Lunette se trouve vis à vis des ouvertures de la boëte.

Il ne s'agit donc plus que de placer les pinnules de telle maniere que leur ligne de foy soit perpendiculaire au plan qui passe par le centre de gravité de tout le niveau & par la ligne des appuis, & c'est ce qu'on appelle le *rectifier*; & comme toutes les parties qui le composent sont solides, étant une fois bien rectifié, il ne changera plus dans la suite : c'est pourquoi il suffit de le bien rectifier en le construisant, par quelqu'une des manieres qui sont expliquées dans le Traité du Nivellement de M. Picard, en établissant deux points de niveau, & même avec le niveau sans être rectifié.

Pour rectifier le Niveau.

Supposant donc qu'on ait deux points de niveau *A* & *B* éloignés l'un de l'autre de 100 toises environ, on placera la Lunette à l'un de ces points comme *A*, & on la pointera vers l'autre point *B*, en baissant ou en élevant doucement la boëte. Et lorsque l'objét *B* paroît sur la pinnule oculaire, si la regle de la Lunette est posée sur la pointe de la vis, & qu'elle ne soit pas en état de tomber sur le devant, c'est-à-dire, vers l'objectif, ce qu'on connoît en poussant ou en élevant un peu la regle en tournant la vis; car alors la Lunette donne plus bas, & elle est encore posée sur la vis : C'est une marque que la partie de tout le niveau qui est vers l'oculaire, est trop pesante ; il faudra donc changer la partie de la regle vers l'objectif, par le moyen d'un petit poids qui coulera sur la regle, & qu'on pourroit y arrêter en quel endroit on voudroit avec une petite vis, ou bien seulement la charger avec un peu de cire molle & du plomb. On chargera cette partie de la regle,

regle, tant que les pinnules étant pointées vers l'objet *B*, soient indifferentes à rester sur la pointe de la vis ou à tomber sur le devant, & alors il sera rectifié.

Mais si d'abord les pinnules étant pointées vers l'objet *B*, la regle ne peut pas se tenir sur les vis; on connoîtra delà que la partie du niveau vers l'oculaire est trop legere, & alors il la faut charger comme on a fait dans l'autre cas, jusqu'à ce que le niveau soit dans un état indifferent de tomber ou de rester sur la pointe de la vis; & alors le niveau sera rectifié.

On pourroit aussi au lieu de charger la regle d'un côté ou d'autre, élever ou abaisser la pinnule oculaire dans son chassis, jusqu'à ce que le niveau fût juste; ce qu'on pourroit faire si le niveau n'étoit pas bien éloigné d'être juste.

On remarquera que dans ces operations, toutes les fois que la Lunette tombe sur le devant, on la remet sur la pointe de la vis, en poussant le ressort du haut de la boëte, lequel pousse en bas le chassis de la pinnule oculaire, & remet par ce moyen la regle sur la pointe de la vis.

Comme ce niveau peut être mis dans une situation renversée, qui est lorsque la Lunette est audessous des pivots, il faut expliquer ce qu'on doit observer en le construisant pour servir dans cet état.

Il est certain que si les pivots étoient une ligne mathematique, lorsqu'on renverseroit le niveau, il pointeroit au même endroit où il pointoit dans sa situation droite, pourvû que cet endroit fût parfaitement de niveau avec le lieu où le niveau est placé; & il faudroit seulement pour le rectifier, faire donner la Lunette au même point dans les deux situations du niveau, en augmentant ou en diminuant peu à peu la pesanteur de l'un des bouts de la regle. Mais comme les pivots doivent avoir une grosseur considerable pour les rendre solides, il peut arriver que le plan qui passe par le centre de gravité de tout le niveau & par la ligne où les pivots s'appuïent, ne sera pas le même dans les deux situations du niveau: c'est pourquoi il faut le rectifier dans sa position renversée de même que

dans la droite. Mais comme on ne doit pas changer les pinnules qui sont rectifiées pour la position droite, il faudra seulement corriger l'endroit des pivots où ils portent sur l'appui dans la position renversée.

Le niveau étant donc renversé, si les pinnulles ne donnent pas le même point que dans la situation droite rectifiée, il faudra limer un peu des pivots pour en repousser le tranchant vers l'objectif, si les pinnules donnent trop bas dans sa situation renversée, ou vers l'occulaire si elles donnent trop haut.

On peu aussi faire les pivots d'une autre maniere, ensorte que le plan qui passera par le centre de gravité de l'instrument, & par l'endroit où les pivots s'appuïent, sera le même dans les deux situations du niveau droite & renversée, & ainsi on pourra rectifier ce niveau d'une seule station sans avoir une ligne de niveau.

Dans cette seconde maniere les pivots doivent être cylindriques, & très-bien tournés & polis dans l'endroit où ils portent & touchent leurs appuis, qui doit être un peu creusé en forme de poulie. De plus, il faut que le bas & le haut du trou de l'appui qui soûtient les pivots, soient presqu'en ligne droite, afin que les pivots ne puissent toucher sensiblement qu'en un point.

Il est évident que dans cette construction des pivots, le centre de gravité du niveau & la ligne qui passera par les endroits où les pivots s'appuïent dans les deux situations du niveau, seront toûjours dans un même plan, lequel passera aussi par l'axe du cylindre des pivots.

Cette suspension du niveau n'est pas si fine que la premiere, à cause que l'endroit du pivot où il touche sur l'appui est de figure circulaire, & dans la premiere il est d'une figure tranchante un peu émoussée.

Usage du Niveau.

Pour se servir de ce niveau, il faut metre d'abord la vis à son repaire, afin que les pinnules soient vis-à-vis des

ouvertures de la boëte. Ensuite par le moyen du ressort on pousse la regle de la Lunette contre le bout de la vis, ensorte qu'elle ne tombe pas de l'autre côté, ce qui est facile à faire en inclinant la boëte; & dans cet état la regle de la Lunette étant posée sur la vis sans que le ressort l'y retienne, on panche peu à peu la boëte vers le bout où est l'objectif, jusqu'à ce que la Lunette tombe de ce côté là. Alors on arrête la boëte le plus ferme qu'il est possible dans cet état ou sur un pié ou contre quelque corps solide; il faut que la Lunette soit alors pointée vers l'objet qu'on veut niveler, & l'on doit remarquer exactement la partie de l'objet qui paroît sur le trait qui sert de pinnule oculaire. Mais comme je suppose que la Lunette soit posée sur la vis, on doit pousser doucement la vis jusqu'à ce que la Lunette tombe de l'autre côté, & remarquer bien la partie de l'objet qui paroît sur le trait quand la Lunette tombe; & pour s'en assurer on doit repousser la Lunette sur la vis par le moyen du ressort, & remarquer si elle tombe encore, & si c'est le même objet qui paroît sur le trait du verre lequel y paroissoit auparavant. On pourra alors détourner la vis d'une très-petite partie, & repoussant la Lunette sur la vis, observer quelle difference il y aura entre l'objet qui paroîtra sur le trait en cet état de la Lunette, & celui qui y paroissoit auparavant. Il faut aussi considerer si la Lunette s'arrête alors sur la vis, ou si elle tombe encore de l'autre côté; car pour avoir le point du niveau juste, il faut que la Lunette étant posée sur le bout de la vis soit en état de tomber de l'autre côté sans qu'elle tombe, & qu'on ne puisse pas l'élever de la moindre quantité par le moyen de la vis sans qu'elle tombe; c'est alors que l'objet qui paroît dans la Lunette sur le trait de la pinnule, est de niveau avec le trait de cette pinnule.

Ce que je dis du niveau se doit toûjours entendre du niveau apparent par rapport au lieu où est l'instrument qui sert à niveler, comme il est expliqué dans le Traité du Nivellement; car pour avoir le vrai niveau correspondant à celui où est posé l'instrument, il faut faire la correction au

point de niveau apparent par rapport à la distance entre le lieu où est l'instrument & le point nivelé ; mais il ne s'agit pas ici de la pratique du nivellement.

Un des avantages de ce niveau, c'est de pouvoir être renversé, & de servir encore de niveau dans cette situation sans aucune préparation ni changement ; & quoyqu'il ait alors quelques vibrations, elles ne durent que peu de tems ; car elles ne viennent que du corps de l'instrument, & non-pas du mouvement de la boëte qui doit être arrêtée ferme, mais sans aucune sujettion, puisqu'elle ne fait rien perdre de la justesse du niveau. On pourra aussi arrêter facilement les balancemens du niveau, en appuïant doucement le ressort contre le chassis de la pinnule, & en le laissant remettre ensuite en son etat naturel.

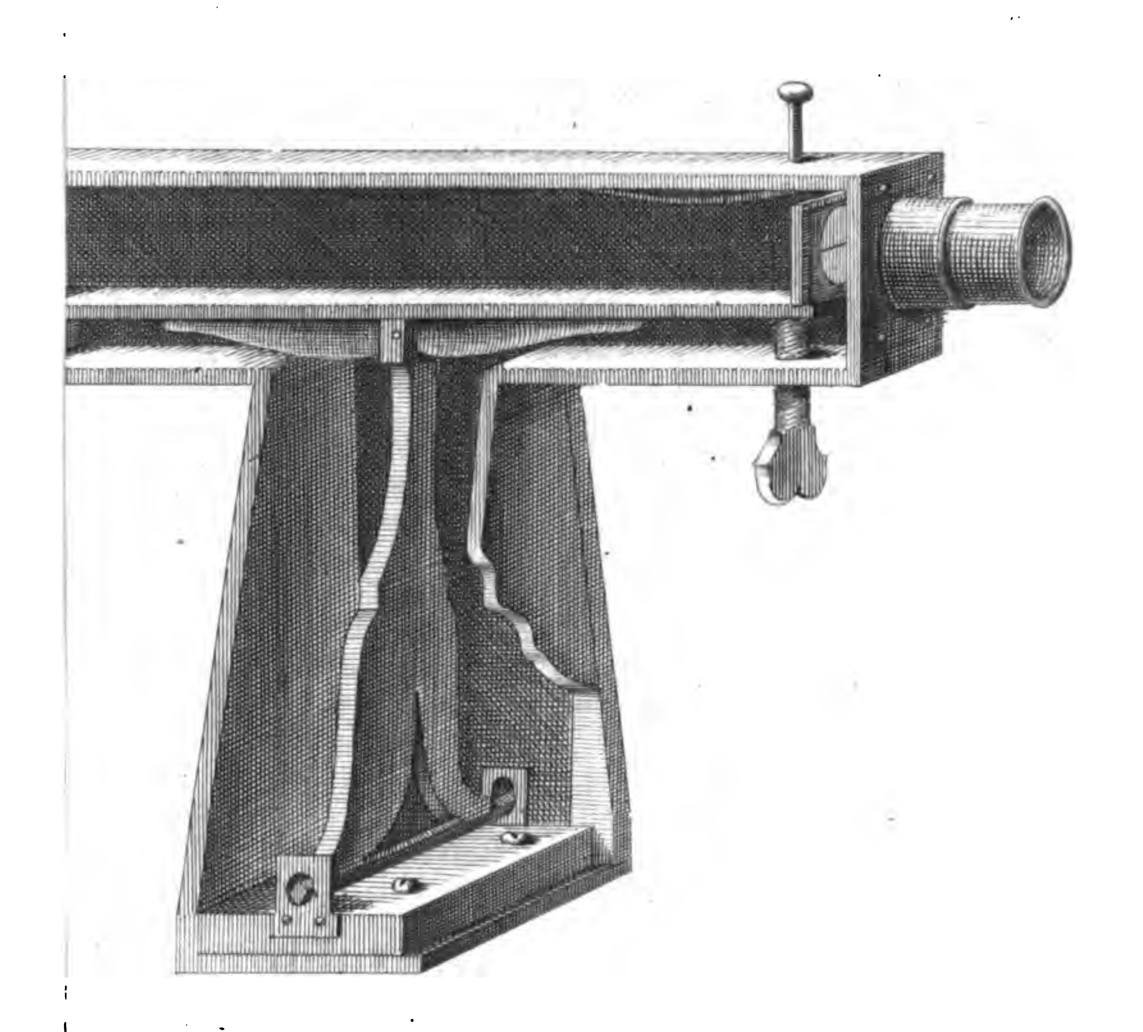
Pour la grandeur de ce niveau elle n'est point déterminée ; car plus la Lunette sera grande, & plus les objets éloignés paroîtront distinctement : mais il sera bien plus incommode à être transporté.

J'ay éprouvé qu'un de ces niveaux dont la hauteur & la longeur n'est que de 10 pouces, determine le niveau à 3 ou 4 pouces près à une distance de 1000 toises, ce qui est tout ce qu'on peut esperer d'un niveau, puisqu'un objet de cette grosseur à cette distance, est entierement couvert par un filet simple de vers soye.

On pourra se servir de differens soûtiens ; mais une des manieres des plus commodes pour l'usage, sera d'attacher la boëte du niveau bien ferme avec une vis contre la traverse d'un chevallet de peintre qui soit solide. On pourra aussi le tenir seulement à la main, & l'appuïer contre quelque corps bien stable pendant qu'on fait les operations.

Il faut remarquer que lorsqu'on veut transporter ce niveau, il est bon que les pivots ne portent point sur leurs appuis ; ce qui sera facile si ces pivots débordent un peu hors de la boëte, & qu'il y ait en cet endroit sur la boëte deux especes de crochets qui s'engagent dans les bouts des pivots, & qui tiennent tout le niveau élevé hors des ap-

Figure du Niveau proposé dans sa boëte dont le devant est ôté.



Berey fecit

puis. On pourra auſſi arrêter la Lunette contre le bout de la vis par le moyen du reſſort qu'on arrêtera ſur la pinnule. Mais ſi l'on veut ouvrir le couvercle de la boëte, on pourra engager tout le niveau entre quelques taſſeaux qui l'empêcheront de balancer d'un côté ni d'autre en le tranſportant dans un long voyage.

DES MOUVEMENS DE L'IRIS,

Et par occaſion de la partie principale de l'Organe de la vûë.

PAR M. MERY.

L'Iris eſt un cercle membraneux, poſé ſur le devant de l'œil. On l'a ainſi nommé à cauſe des differentes couleurs qui dans l'homme paroiſſent ſur ſa ſurface au travers de la cornée tranſparente. 1704. 12 Novembre.

Ce cercle forme dans ſon centre un trou à qui on a donné le nom de prunelle, apparamment parcequ'il paroît de couleur noire. Ce trou eſt abſolument neceſſaire pour la viſion ; car s'il avoit été fermé par l'Iris qui eſt opaque, les raïons de la lumiere, ſans leſquels la viſion ne ſe peut faire, n'auroient pû paſſer dans l'œil.

La prunelle ſe dilate dans l'ombre & dans l'eau : elle ſe reſſerre dans l'aire étant expoſée aux raïons de la lumiere, ſans qu'on s'apperçoive que la volonté ait part à ſes mouvemens. Quand la prunelle ſe dilate, les fibres de l'Iris s'accourciſſent ; quand elle ſe reſſerre, ces fibres s'allongent.

Or comme on ne remarque point de fibres circulaires dans l'Iris pour rétrecir la prunelle, il y a lieu de croire que ſa dilatation dépend uniquement du reſſort des fibres

droites de l'Iris qui toutes vont se terminer à la circonference interne de ce cercle.

Mais quoiqu'il paroisse que le rétrecissement de la prunelle dépende absolument des raïons de la lumiere, neanmoins ces raïons ne peuvent pas d'eux-mêmes prolonger les fibres de l'Iris, ni rétrecir la prunelle. Tout ce qu'ils peuvent faire c'est de donner seulement, par leur entrée dans l'œil, occasion aux esprits animaux de couler dans les fibres de l'Iris plus abondamment qu'ils ne font dans l'ombre ; ce sont donc ces esprits qui, en prolongeant les fibres de l'Iris, sont effectivement la cause de la dilatation de la prunelle. D'où il s'ensuit que ce trou doit plus ou moins se rétrecir, selon que la lumiere, étant plus ou moins forte, détermine une plus ou moins grande quantité d'esprits à couler dans les fibres de l'Iris : mais pour cet effet la respiration doit être de la partie ; car quand elle vient à manquer, le mouvement des esprits animaux s'arrête, & alors la lumiere devient inutile.

L'observation que je vais rapporter prouve cette hypothese dans toutes ses parties. Quand l'on plonge dans l'eau la tête d'un chat vivant, si l'on expose ses yeux aux raïons du Soleil, la prunelle se dilate au lieu de se rétrecir ; au contraire exposez dans l'air aux mêmes raïons de cet Astre, la prunelle se rétrecit au lieu de se dilater.

Par l'explication du premier de ces deux phenomenes qui semble détruire l'hypothese que je veux établir, je vais démontrer que la dilatation de la prunelle dépend uniquement du ressort des fibres de l'Iris. Par celle du second je feray connoître que les esprits animaux sont la cause immediate de son rétrecissement, & que la lumiere n'en peut être que l'occasion.

Quand au premier phenomene ; il faut remarquer que lorsque la tête du chat est plongée dans l'eau, cet animal ne peut plus respirer. Or le mouvement de toute la matiere des esprits animaux dépendant du mouvement circulaire du sang, & celui-ci de la respiration ; il est évident que quand elle vient à manquer, la circulation du sang &

le mouvement des eſprits animaux doivent ceſſer bien-tôt après. On obſerve qu'à meſure que le mouvement de ces eſprits ſe ralentit, la prunelle ſe dilate, les eſprits animaux ne peuvent donc pas être la cauſe de ſon élargiſſement. Il faut donc neceſſairement que ſa dilatation dépende uniquement du reſſort des fibres de l'Iris.

A l'egard du ſecond phenomene, ſi l'on retire le chat de l'eau encore vivant, & qu'on expoſe ſes yeux aux raïons du Soleil, on voit la prunelle ſe rétrecir à meſure que la reſpiration ſe rétablit. Donc les eſprits animaux qui pour lors viennent à couler dans les fibres de l'Iris, ſont la cauſe immediate du rétreciſſement de la prunelle: car l'on ne peut pas l'attribuer aux raïons de la lumiere; parceque les yeux de cet animal étant plongez dans l'eau, la prunelle ſe dilate, quoiqu'il entre dans leur globe beaucoup plus de lumiere, que lorſqu'ils ſont dans l'air expoſez à ſes raïons; la lumiere ne peut donc être que l'occaſion de l'écoulement des eſprits animaux dans les fibres de l'Iris: mais elle ne le peut procurer, ſi l'animal ne reſpire; d'où il eſt aiſé de juger que la lumiere ne ceſſe de produire cet effet, quand la tête du chat eſt plongée dans l'eau; que parceque le mouvement des eſprits animaux eſt arrêté dans leur ſource par le défaut de la reſpiration dont il dépend abſolument, de même que celui du ſang.

Que la dilatation de la prunelle dépende uniquement du reſſort des fibres de l'Iris, ſon rétreciſſement des eſprits animaux immediatement, & par occaſion de la lumiere; en voici des preuves bien convaincantes.

Premierement, quand par l'boſtruction des nerfs optiques les eſprits animaux ne peuvent plus s'écouler dans les yeux de l'homme, la prunelle ſe dilate, il eſt donc viſible que ſa dilatation ne dépend pas de ces eſprits; mais du reſſort des fibres de l'Iris, qui fait que dans cette maladie ces fibres s'accourciſſent.

Secondement, ſi pendant l'obſtruction de ces nerfs on expoſe les yeux de cet homme à la plus grande lumiere, la prunelle reſte dans la même dilatation: les raïons du

Soleil ne peuvent donc pas être d'eux-mêmes la cause de son rétrecissement.

Troisiémement, si on leve l'obstruction des nerfs optiques, & qu'on expose ensuite les yeux de cet homme aux raïons de la lumiere, la prunelle se resserre ; il est donc évident que les esprits animaux, qui dans ce moment viennent à couler dans les fibres de l'Iris qu'ils prolongent, sont la cause immediate du rétrecissement de la prunelle, & que la lumiere n'en peut être que l'occasion : d'où il s'ensuit que la force du ressort des fibres de l'Iris étant en équilibre avec la puissance des esprits animaux, la prunelle doit rester dans une moïenne dilatation ; mais pour cela il ne faut qu'une lumiere mediocre : car quand elle est trop foible ou trop forte, l'équilibre se rompt, & alors la prunelle se dilate ou se rétrecit considerablement.

Une lumiere foible, telle qu'elle est dans l'ombre, déterminant peu d'esprits animaux à couler dans les fibres de l'Iris, leur ressort l'emporte sur ces esprits, & dans ce moment la prunelle s'élargit davantage. Au contraire une lumiere forte donnant occasion aux esprits animaux de couler plus abondamment dans les fibres de l'Iris, ces esprits surmontent par leur puissance la force du ressort de ces fibres, & alors la prunelle se rétrecit beaucoup plus.

De ces preuves soûtenuës par des experiences si évidentes l'on peut enfin conclure. 1°. Que les esprits animaux sont la cause immediate du rétrecissement de la prunelle. 2°. Que la lumiere ne fait que donner occasion à l'écoulement de ces esprits. 3°. Que la volonté n'y a point de part. 4°. Que le ressort des fibres de l'Iris est l'unique cause de la dilatation de la prunelle.

Sur ce systême, quoique fondé sur des observations indubitables, il se presente neanmoins à l'esprit trois difficultez considerables, dont voici la premiere : Sçavoir s'il entre moins de lumiere dans les yeux lorsqu'ils sont dans l'air, que quand ils sont dans l'eau exposez au raïons du Soleil.

Pour reconnoître dans lequel de ces deux élemens il

passe

passe plus de lumiere dans les yeux, il n'y a qu'à remarquer qu'un lieu est d'autant plus éclairé, qu'il reçoit plus de ses raïons; & que plus ce lieu est éclairé, mieux on voit les objets qu'il renferme.

Or on ne peut discerner aucunes des parties contenuës dans les yeux exposés dans l'air, plongés qu'ils sont dans l'eau: on les voit fort distinctement, excepté les humeurs & la retine, qui disparoissent de telle sorte que le dedans du globe des yeux semble n'être rempli que d'un air lumineux. Il entre donc beaucoup moins de raïons de lumiere dans les yeux exposés à l'air que plongés dans l'eau; ce qui arrive par les raisons que je vais rapporter.

Quelque polie que paroisse la surface extérieure de la cornée transparente, il est néanmoins constant qu'elle a beaucoup d'inégalités imperceptibles, qui n'étant point applanies reflechissent dans l'air un grand nombre de raïons de la lumiere qui tombent sur cette membrane.

D'ailleurs lorsque les yeux sont exposés dans l'air aux raïons du Soleil, la prunelle se rétrecit considerablement. Il ne peut donc passer en cet état qu'un très-petit nombre de ses raïons dans les yeux; ce qui n'étant pas suffisant pour éclairer leur globe, il n'est pas étrange qu'on ne puisse discerner aucune des parties qui y sont renfermées.

Mais aussi n'est-il pas extraordinaire de les y appercevoir quand les yeux sont plongés dans l'eau, parce que les inégalités de la cornée étant applanies par ce liquide, & la prunelle tout-à-fait dilatée, tous les raïons du Soleil qui tombent sur la cornée transparente passent à travers, & entrant dans le globe des yeux, ils l'éclairent si fort, qu'on peut voir alors très-distinctement l'extremité du nerf optique, & la coroïde avec toutes ses couleurs & ses vaisseaux. Mais l'on ne peut nullement appercevoir ni les humeurs, ni la rétine; parce qu'etant transparentes comme l'eau, elles semblent ne faire qu'un même corps avec elle, ce qui fait qu'on ne peut les distinguer d'avec l'eau.

Que la surface de la cornée, quelque polie qu'elle paroisse, soit remplie d'inégalités que l'eau applanit; en

voici une preuve bien ſenſible. Dans la goutte ſerenne la prunelle de l'homme ſe dilate entierement, & ſes yeux étant expoſés à la plus grande lumiere, ce trou ne peut ſe rétrecir.

Or ſi la ſurface de la cornée étoit parfaitement polie, tous les raïons de lumiere qu'elle recevroit devroient paſſer dans les yeux de l'homme expoſés à l'air, comme ils font dans ceux du chat plongés dans l'eau, & l'on decouvriroit également dans l'un & dans l'autre la coroïde. On n'apperçoit point cette membrane dans les yeux de l'homme, on la voit dans ceux du chat ; il faut donc qu'il y ait ſur la ſurface de la cornée des inegalités imperceptibles que l'air ne peut unir, mais que l'eau applanit. Et c'eſt par cette raiſon qu'un homme, pour peu qu'il ait les yeux plongés dans l'eau, apperçoit un objet au fond d'une riviere, qu'il ne peut plus voir lorſqu'il les a hors de l'eau appliqués à demie ligne de la ſuperficie. C'eſt auſſi par la même raiſon ; la vie étant éteinte, que la coroïde d'un chat que l'on voit dans l'eau ne peut être apperçûë dans l'air, quoique la prunelle reſte également dilatée dans ces deux élemens après la mort de cet animal.

L'applaniſſement des inégalités de la cornée par l'eau, ſe verifie encore par l'exemple du verre. Il reſte toûjours au plus poli des parties raboteuſes qui reflechiſſent dans l'air quand il y eſt expoſé, une grande partie des raïons de la lumiere qui viennent ſe rendre ſur la ſurface ; mais lorſqu'il eſt plongé dans l'eau, tous ces raïons paſſent à travers ; parce que toutes les inégalités du verre étant applanies par ce liquide, il ne ſe fait plus de reflexion dans l'air d'aucune partie de la lumiere.

Il eſt donc certain par toutes les experiences, premierement, que les inégalités de la cornée ne pouvant être applanies par l'air lorſqu'elle y eſt expoſée, elles doivent repouſſer la plus grande partie des raïons de la lumiere qui viennent frapper cette membrane ; ce qui fait qu'il en paſſe ſi peu dans le globe des yeux qu'on ne peut voir la coroïde, lors même que la prunelle eſt entierement dilatée dans un grand jour.

Secondement, que les inégalités de la cornée étant applanies par l'eau, alors tous les raïons de lumiere que reçoit cette membrane doivent passer à travers, & rendre en entrant dans le globe des yeux la coroïde visible avec toutes ses couleurs & ses vaisseaux.

La seconde difficulté consiste à sçavoir, si les raïons de la lumiere qui entrent dans le globe des yeux par la prunelle, déterminent effectivement les esprits animaux à couler dans les fibres de l'Iris, ou si ces raïons s'insinuant dans ces fibres ne font seulement que rarefier ce qu'ils renferment de ces esprits; ce qui pourroit produire le même effet, c'est-à-dire, prolonger les fibres de l'Iris, comme peuvent faire les esprits animaux par leur épanchement.

Pour répondre à cette difficulté, il ne faut qu'examiner si la matiere des esprits animaux peut s'exhaler sitôt que leur mouvement vient à cesser. Comme il n'y a pas d'apparence qu'elle se dissipe avant la mort, il est aisé de décider la question par l'experience de la tête du chat que je viens de rapporter.

Quand la tête d'un chat vivant est plongée dans l'eau, ses yeux exposés au Soleil, il est constant qu'il entre beaucoup plus de raïons de cet astre dans leur globe, que lorsqu'ils sont dans l'air exposés à sa lumiere.

Dans l'eau la prunelle se dilate, & le mouvement des esprits animaux cesse. Donc tous les raïons du Soleil qui entrent dans les yeux du chat, ne sont pas capables par eux-mêmes de rarefier la matiere de ces esprits renfermée dans les fibres de l'Iris, puisque ces fibres s'accourcissent dans l'eau.

Au contraire si on retire de l'eau la tête du chat encore vivant, & qu'on expose ses yeux aux raïons du Soleil, les esprits animaux reprennent leur cours, & alors la prunelle se resserre. Donc le peu de lumiere qui entre dans le globe des yeux, détermine effectivement les esprits animaux à couler dans les fibres de l'Iris, puisque ces fibres s'allongent dans l'air.

On me demandera peut-être comment les raïons de la

lumiere peuvent donner occasion à l'écoulement des esprits animaux dans les fibres de l'Iris. Voici sur cela quelle est ma conjecture.

Je viens de faire remarquer que ce n'est point en rarefiant la matiere de ces esprits. On peut donc penser qu'en même tems que les raïons de la lumiere entrent dans le globe des yeux, ils s'insinuënt dans leurs nerfs, & rendent la matiere des esprits animaux plus fluide qu'elle n'est naturellement, ce qui donne occasion à ces esprits de couler dans les fibres de l'Iris plus abondamment qu'ils ne font dans l'obscurité.

La troisieme difficulte qui se presente à l'esprit contre l'hypothese que je soûtiens, c'est qu'on a peine à comprendre que les fibres de l'Iris puissent s'allonger à mesure de ce qu'ils reçoivent d'esprits animaux ; parce qu'on est prevenu que tous les muscles s'accourcissent d'autant plus qu'ils en sont penetrés d'une plus grande quantité, au lieu que les fibres de l'Iris s'allongent d'autant plus qu'ils en reçoivent davantage.

Pour résoudre cette difficulté qui paroît la plus embarrassante, je me represente la structure des fibres de l'Iris semblable à celle des corps caverneux de la verge, qui s'allongent à mesure qu'ils reçoivent plus ou moins d'esprits animaux. Les fibres de l'Iris doivent donc s'étendre de même, selon qu'ils en sont plus ou moins remplis, si leur structure est la même que celle des corps caverneux.

Ce qui semble confirmer davantage cette idée, c'est qu'il est certain que le raccourcissement des fibres de l'Iris dépend, de même que celui des corps caverneux, de leur ressort.

Au reste l'experience qui m'a appris que les humeurs des yeux disparoissent lorsqu'elles sont dans l'eau exposées aux raïons du Soleil, me fournit un moïen assuré pour résoudre aisément ce problême ; sçavoir, quelle est la partie principale de l'organe de la vûë.

On ne doute pas que ce ne soit celle sur laquelle se va peindre l'image des objets. Or les trois humeurs de l'œil donnant passage aux raïons de la lumiere, il est constant

que l'image des objets ne peut se former sur aucune de ces humeurs : nulle d'entr'elles ne peut donc être la partie principale de l'organe de la vûë.

Et parce que ces mêmes raïons de la lumiere qui entrent dans le globe de l'œil traversent encore la rétine, il n'y a pas non plus d'apparence que cette membrane puisse être la partie principale de cet organe, à laquelle on doive rapporter la vision ; puisque l'image des objets ne peut pas aussi se peindre sur cette membrane, qui comme les humeurs disparoît dans l'eau étant exposée aux raïons du Soleil ; ce qui confirme l'observation de M. Mariot.

Ce sçavant Academicien a remarqué il y a long-tems, que lorsque les raïons de la lumiere reflechie par les objets tombent sur l'extremité du nerf optique où la coroïde est percée, on ne peut appercevoir l'objet d'où ils partent ; parce que ces raïons s'enfoncent dans le corps de ce nerf, où ils s'amortissent & s'éteignent.

Or la rétine n'étant qu'un dévelopement fort superficiel de sa moüelle, que ces raïons peuvent percer beaucoup plus aisément, ne peut pas les arrêter ; donc cette membrane ne peut pas être la partie principale de l'organe de la vûë.

D'ailleurs cette même experience qui m'a fait découvrir que les raïons de la lumiere traversent les humeurs & la rétine, m'a fait aussi connoître que ces mêmes raïons sont enfin arrêtez par le coroïde qui est opaque ; il y a donc bien de l'apparence que c'est plutôt sur la surface de cette membrane que sur la rétine, qui est transparente, que va se peindre l'image des objets : la coroïde est donc la partie principale de l'œil. C'est ce que la maniere dont se fait la vision fera aisément comprendre.

Lorsque la lumiere vient directement du corps lumineux frapper la coroïde, ses raïons reflechis par cette membrane contre la rétine ébranlent les filets de celle-ci, & donnent aux esprits animaux dont ils sont remplis une modification particuliere, qui produit dans l'ame le sentiment de lumiere.

Quand au contraire la lumiere ſortant du corps lumineux ſe porte ſur un objet capable de la reflechir, & que par reflexion elle tombe ſur la coroïde; ſes raïons repouſſés par cette membrane donnent alors aux eſprits animaux renfermés dans les filets de la rétine qu'ils ebranlent par leur retour, une autre modification qui cauſe dans l'ame le ſentiment de couleur.

Et parce que la lumiere en ſe reflechiſſant ſe revêt de la figure & de la grandeur du corps qui la renvoïe, cela fait qu'avec la couleur on apperçoit auſſi la figure & la grandeur de l'objet, & c'eſt en quoi conſiſte tout ſon image.

Contre l'uſage de la coroïde que je viens d'établir ſur des experiences ſenſibles, on pourroit cependant me faire cette objection.

La maniere dont vous expliqués la viſion montre qu'elle dépend de l'ebranlement des petits filets nerveux de la rétine, & de la modification des eſprits animaux qui y ſont renfermés. Cela étant, les raïons de la lumiere ſont donc capables, étant reflechis ſeulement par les objets, de donner d'abord en entrant dans l'œil aux filets de la retine & aux eſprits animaux, ce mouvement particulier que vous dites être neceſſaire pour la ſenſation. La rétine eſt donc dans vêtre principe la principale partie de l'œil qui ſert à la viſion, & non la coroïde.

Pour répondre à cet argument, je dis que ſi les raïons de la lumiere reflechis par les objets, n'étoient une ſeconde fois reflechis par la coroïde, nous ne pourrions voir les objets. C'eſt ce que nous montre l'experience; car quand les raïons de la lumiere modifiés ſeulement par les corps qui les renvoïent vers nos yeux, tombent ſur le centre du nerf optique où la coroïde eſt percée; nous ne pouvons pas, comme a fort bien remarqué M. Mariot, appercevoir les objets: nous les voïons quand ces rayons viennent frapper la coroïde. C'eſt donc cette membrane, qui repouſſant une ſeconde fois les raïons de la lumiere contre la rétine, modifie les filets nerveux de cette membrane d'une maniere propre à faire ſentir à l'ame & la lumiere,

& les objets. La coroïde est donc enfin la partie principale de l'organe de la vûë.

DISCOURS SUR LES BAROMETRES.

PAR M. AMONTONS.

PArmi les découvertes de Physique du dernier Siecle, celle du Barometre ou de la maniere de mesurer le poids de l'atmosphere peut bien tenir le premier rang. 1704. 12 Novemb.

La netteté & l'évidence avec lesquelles on explique à present plusieurs effets de la nature, où l'on ne voyoit avant cette découverte qu'obscurité & qu'incertitude, en sont des preuves assez convainquantes. Personne presque n'ignore que les effets qu'on attribuoit autrefois à l'horreur du vuide, avoient des causes qui étoient alors tout-à-fait inconnuës à ceux-mêmes qui se servoient le plus volontiers de cette expression.

C'est ainsi que ce qui est très-obscur & presque impenetrable dans un tems, devient de la derniere évidence dans un autre.

Mais quoiqu'il soit vrai que depuis cette découverte on ait éclairci sur ce sujet une infinité de choses très-difficiles avec toute la clarté qu'on peut souhaiter; on ne peut néanmoins douter qu'il n'en reste encore un grand nombre, & que ces dernieres le sont d'autant plus qu'elles sont moins apparentes, & qu'elles ne se presentent pas d'abord à l'esprit comme les premieres.

Dans la nouveauté du Barometre les effets surprenans du poids de l'air ont seuls attiré toute l'attention de ceux qui les voïoient. On se laissoit volontiers prévenir qu'il étoit la seule cause du mouvement du mercure; & si l'on faisoit reflexion qu'il n'y a rien sur quoi la chaleur n'agisse, on croïoit qu'en ce rencontre c'étoit si peu de chose que

cela ne valoit pas la peine de s'y arrêter. On passoit aisément par-dessus un raisonnement qui n'avoit rien de nouveau, pour admirer un systême dont la nouveauté surprenoit agréablement par son heureux succès ; & l'on n'avoit, pour ainsi dire, des yeux que pour considerer une foule d'experiences toutes curieuses, qui se presentoient & s'expliquoient comme d'elles-mêmes, sans qu'il fût besoin de rien déterminer de précis.

En effet il importoit peu pour rendre raison, par exemple, des pompes, des siphons, & de presque toutes les autres experiences de la pesanteur de l'air, de sçavoir que le poids du mercure n'étoit pas le même en Esté qu'en Hyver. Il suffisoit qu'on fût assuré que ce n'étoit pas d'une quantité assez considerable pour empêcher de déterminer en general l'élevation du mercure dans les tubes environ à 28. pouces, & celle de l'eau à 32 pieds.

Mais enfin ces effets apparens & palpables du poids de l'atmosphere étant maintenant suffisamment expliqués d'une maniere generale, il nous reste à le faire d'une maniere plus particuliere & plus précise, & à porter nôtre attention sur d'autres qui pour être plus cachés n'en sont pas moins utiles.

La seule chose qui pourroit en cela nous faire de la peine, c'est que le Barometre propre à expliquer en gros l'effet des pompes & des siphons, devient fautif & mauvais quand il s'agit, par exemple, de mesurer les vicissitudes du poids de l'atmosphere, d'en déterminer la hauteur & de niveler plusieurs points sur la surface de la terre. Dans l'observation du plus ou du moins de pesanteur de l'atmosphere, on peut trouver une difference de trois lignes & plus dans la hauteur du mercure, quoique veritablement le poids de l'atmosphere n'ait point changé : ce qui provient de l'effet que la chaleur produit sur le mercure du Barometre ; l'experience ayant fait connoître qu'une colomne de mercure de 28 pouces 9 lignes en Hyver, & une de 29 pouces en Esté, ne pesent pas plus l'une que l'autre. De même le Barometre simple étant porté

dans

dans le tems du grand froid de nôtre climat, d'un lieu élevé de la surface de la terre, dans un autre creusé au-dessous, pourra donner une difference dans la hauteur du mercure, d'une ligne & demie, qu'on attribuëroit faussement au poids de la colomne d'air qui seroit entre ces deux lieux : & si l'on s'avisoit de vouloir déterminer sur cette experience la hauteur de l'atmosphere, ou la difference du niveau de deux endroits de la terre, on courreroit grand risque de faire très-mal l'un & l'autre.

Les Barometres ou sont simples, c'est-à-dire, chargés seulement de mercure ; ou bien ils sont doubles, c'est-à-dire, qu'outre le mercure on y emploïe encore une seconde liqueur qui est ordinairement de l'huile de tartre teinte. Pour ce qui est des Barometres simples, l'étenduë de leur mouvement est fort mediocre, n'excedant gueres 23 à 24 lignes, & à ceux-ci il n'y a autre chose à faire pour éviter l'erreur, que de dresser une Table de correction qui montre les quantités proportionnelles dont la chaleur fait allonger la colomne de mercure de l'Hyver à l'Esté, & qu'il convient par conséquent retrancher des hauteurs indiquées par le Barometre lors de l'observation. Par exemple, mes Thermometres, c'est-à-dire, ceux dont on trouve la description à la fin de la Connoissance des Tems de 1704, & dans les Memoires de 1702 & 1703 ; ces Thermometres, dis-je, marquant 58 pouces, qui est le tems de nos grandes chaleurs, il y a 3 lignes à retrancher de la hauteur où se trouve le mercure dans le Barometre simple, 2 lignes lorsque ces mêmes Thermometres marquent 55 pouces 4 lignes, 1 ligne seulement lorsqu'ils ne marquent que 52 pouces 8 lignes, & 0 ou rien lorsqu'ils ne marquent que 50 pouces, & ainsi des autres corrections à faire pour tous les autres degrés de chaleur entre ceux-ci, qu'on trouvera en dressant une Table exacte sur ce fondement.

Mais quant aux Barometres doubles dont le mouvement est beaucoup plus considerable, & sur lesquels la chaleur produit des effets differens dont la combinaison

empêche qu'on n'en puisse facilement faire la correction par une Table, joint que les personnes qui se servent de ces Barometres sont pour la plûpart peu accoûtumés à ces sortes de corrections; voici le moyen dont je me suis servi afin que cette correction se pût faire comme d'elle-même & sans Table.

D

A

B

C

Ces Barometres sont composés de deux boëtes de verre *A B*, qui ont communication l'une à l'autre par un tube recourbé *A C B*.

La boëte *A* se termine en une pointe qui est scellée hermetiquement. La moitié superieure de cette boëte est vuide d'air grossier. L'autre moitié, le tube *A C B*, & la moitié inferieure de la boëte *B*, contiennent du mercure. Cette boule *B* se termine en un tube fort menu *B D*, ouvert en *D*. La moitié superieure de la boëte *B*, & une partie du tube *BD* contiennent une liqueur qui hausse & baisse dans le tube, suivant que l'atmosphere est plus ou moins leger; le mercure *A C* contre-balançant & faisant toujours équilibre avec le mercure *C B*, la liqueur *B D* & l'atmosphere.

Tout ceçi est à present connu presque de tout le monde: mais ce qui paroît n'avoir encore été remarqué de personne, c'est que le mercure contenu en *A B* devenant plus leger en Esté qu'en Hyver, l'atmosphere repousse vers le bas la liqueur contenuë dans le tube *B D* assez sensiblement, comme de 3 à 4 pouces, & donne faussement à présumer que l'atmosphere est devenu plus pesant de cette quantité, quoiqu'en effet sa pesanteur n'ait point changé.

Pour prévenir donc ce defaut, il faudroit que la colomne de mercure *AB* pût s'allonger suffisamment pour remplacer le poids que la chaleur leur fait perdre, sans que la liqueur du tube change de place. Pour cela j'ai pris une liqueur qui se rarefiât aisément par la chaleur, comme fait l'esprit-de-vin; j'ai substitué cette liqueur à l'huile de tartre qu'on emploïe ordinairement, & qui ne se rarefie pas à beaucoup près si sensiblement.

J'ai augmenté la capacité de la boëte *B*, qui contient

ordinairement cette liqueur, afin qu'il y en pût tenir davantage, & assez pour produire une rarefaction suffisante pour faire baisser le mercure de la même boëte, & allonger par ce moïen la colomne de mercure *A B*, qui sans cela ne s'allongeroit pas, quoique la chaleur l'eût renduë plus legére; parce que l'atmosphere ne pesant pas immediatement sur le mercure de la boëte *B*, mais sur la liqueur du tube *D*, il feroit baisser cette liqueur & suppléeroit par ce moïen à la legereté du mercure; ce qui, comme j'ai déja dit, donneroit faussement à présumer que l'atmosphere seroit devenu plus pesant, quoiqu'il n'ait point changé: Au lieu que la liqueur de la boëte *B* trouvant dans sa rarefaction toûjours la même resistance du côté de l'atmosphere, supposé que son poids n'ait point changé; & en trouvant moins du côté du mercure, rendu plus leger par la chaleur, cette liqueur emploïe toute l'action de sa rarefaction contre le mercure qu'elle repousse & qu'elle remet toûjours en équilibre avec l'atmosphere, sans que la liqueur du tube *D* sur laquelle l'atmosphere agit immediatement soit contrainte de changer de place, que lors seulement que l'atmosphere change de poids; & tout l'artifice qu'il y a en cela ne gît qu'à bien proportionner la capacité qui contient la liqueur à la capacité du tube du Barometre: car une trop petite ne corrigeroit pas entierement l'erreur; & une trop grande en repoussant trop le mercure feroit que la liqueur dans la rarefaction trouveroit à la fin trop de résistance de la part du mercure, & seroit obligée d'agir du côté de l'atmosphere; ce qui donneroit faussement à présumer que l'air seroit devenu plus leger.

Il me reste à remarquer qu'encore que par ce moïen l'erreur qui pourroit arriver par le plus ou le moins de legereté de mercure se corrige d'elle-même, il y en a encore une seconde à éviter qui pourroit être causée par le plus ou le moins de legereté de la liqueur.

Cette erreur ne seroit pas à la verité si considerable que la premiere, & pourroit fort bien être negligée sans gran-

de conséquence : mais il sera toûjours mieux d'y avoir égard, principalement dans les cas où il s'agit de précision ; & c'est ce qu'on pourra faire par le moïen de la graduation, ainsi que je vais le dire.

On divise ordinairement cette graduation en parties égales entr'elles, qui ne signifient rien, & qui ne sont seulement que pour exprimer par leur nombre plus ou moins grand que la liqueur est plus ou moins haute, & par conséquent que l'atmosphere est plus ou moins leger ; mais non pas de combien, & ces nombres n'expriment jamais le poids de l'atmosphere.

J'ai donc jugé qu'il seroit plus à propos que ces parties, quoique de beaucoup plus grandes, representassent les pouces & les lignes que le mercure parcourt dans le Barometre simple de la moindre à la plus grande legereté de l'atmosphere.

Ainsi je divise toute ma graduation qui est d'environ 28 pouces en 24 parties égales, qui expriment les 24 lignes comprises dans le Barometre simple entre 28 pouces 4 lignes, qui est la plus grande pesanteur que j'aye experimentée dans l'atmosphere, & 26 pouces 4 lignes qui est la moindre.

Je donne à cette graduation une largeur d'environ 14 lignes par haut, & seulement une ligne un quart ou environ par bas.

Je divise chacune de ces largeurs en huit parties égales, & je mene des lignes droites des divisions d'enhaut à celles d'embas ; ce qui forme huit trapezes d'environ 28 pouces de longueur.

Finalement je coupe tous ces trapezes par des lignes paralleles entr'elles tirées des 24 divisions qui montent, & après avoir numeroté ces 24 divisions en descendant depuis 26 pouces 4 lignes jusqu'à 28 pouces 4 lignes, je numerote les 8 divisions laterales depuis 50 jusqu'à 58, le tout ainsi qu'on le peut voir par la Figure cy-jointe.

Ces huit divisions laterales representent les huit pouces compris sur la graduation de mon Thermometre de-

puis 50 jusqu'à 58, c'est-à-dire, depuis le plus grand froid jusqu'au plus grand chaud de nôtre climat, & me servent à faire la correction de l'erreur que le plus ou le moins de legereté de la liqueur du Barometre pourroit causer, & cela en la maniere qui suit.

Je regarde premierement sur mon Thermometre à quelle division il est; ensuite je prends sur mon Barometre vis-à-vis l'endroit où il se trouve la partie laterale comprise entre la premiere ligne montante de la graduation, & la ligne montante qui répond à la division que j'ai observée sur le Thermometre.

Ajoûtant cette partie à la hauteur du mercure que le Barometre indique, j'ai précisément le poids de l'atmosphere.

Ce seroit ici l'endroit de rendre raison de la construction particuliere de ce Barometre & de sa graduation: mais comme elle se déduit d'un détail qui seroit ennuyeux, & que je l'ai déja donné dans les Memoires du 18 Juin dernier; ceux qui en voudront sçavoir davantage, pourront y avoir recours. Je me contenterai d'avertir que ce Barometre, outre sa grande précision, a encore l'avantage d'être presque de moitié plus sensible que les autres, & qu'il faut soigneusement prendre garde qu'il ne reste point d'air dans le haut de la boëte superieure au-dessous du mercure.

Après ce que je viens de dire de l'effet de la chaleur sur les liqueurs dont le Barometre double est rempli, il reste à examiner quelle peut être son action sur le verre qui contient ces liqueurs, & s'il n'y a point lieu de craindre que cela n'altere encore l'indication du plus ou du moins de pesanteur de l'atmosphere: ce qui n'est pas sans fondement. Car enfin nous ne connoissons rien dans la nature, de tout ce qui tombe sous les sens, sur quoy la chaleur ne manifeste son pouvoir: ainsi il n'y a point de doute qu'elle n'agisse sur le verre comme sur toute autre chose, & qu'elle ne le dilate de sorte que, veritablement parlant, la capacité d'un vase ou bouteille de verre est plus

grande en Esté qu'en Hyver. Mais la question est de sçavoir si cela pourroit être assez considerable pour causer quelque alteration dans le Barometre.

Or par plusieurs experiences exactes, j'ai trouvé qu'une bouteille de verre blanc, assez épais, de figure cylindrique, & telle que sont celles qu'on bouche ordinairement d'un bouchon de verre, pleine d'eau commune, dont le degré de chaleur mesuré par mon Thermometre étoit égal à 54 pouces, & qui contenoit environ 14 onces de cette eau, n'a augmenté sa capacité que de $\frac{1}{2688}$ lorsque je l'ai plongée dans d'autre eau, dont le degre de chaleur mesuré par le même Thermometre étoit de 64 pouces : d'où l'on peut bien juger que cet effet est si peu de chose, qu'il ne peut être sensible dans le verre d'un Barometre, dont la capacité n'est pas à beaucoup près si considerable que celle de cette bouteille.

MANIERE DE RECOMPOSER le Souffre commun par la réünion de ses principes, & d'en composer de nouveau par le mélange de semblables substances, avec quelques conjectures sur la composition des métaux.

PAR M. GEOFFROY.

1704. 12 Novemb.

RIen ne nous découvre mieux la nature d'un corps mixte que l'Analyse exacte que l'on en fait en le réduisant parfaitement à ses principes. Il n'est pas facile d'y parvenir. Le feu, qui est le principal agent que nous pouvons y emploïer, sépare bien à la verité les differentes substances du mixte; mais elles en sont si alterées qu'elles ne peuvent nous conduire à la vraie connoissance de la nature du corps qu'elles composoient. Pour les autres dissolvans dont on pourroit se servir, ou ils ne rendent pas ces principes plus simples & plus purs, ou bien ils ne les

séparent pas tous. Ce n'est donc qu'en traitant de differentes manieres les corps dont on veut découvrir la composition, & en comparant les differentes substances que l'on en a séparées dans ces differentes operations, que l'on peut parvenir à quelque chose de certain. Mais ce qui nous assure entierement que nous avons réüssi dans la recherche que nous faisons de la composition des corps, c'est lorsqu'après avoir réduit le corps mixte en des substances aussi simples que la Chimie puisse les réduire, nous le récomposons par la réünion de ces mêmes substances.

Le Souffre commun dont M. Homberg avoit entrepris l'Analyse il y a quelque tems, est un des corps mixtes des plus difficiles à décomposer.

Les principes dont il est formé, volatiles de leur nature, ou s'élevent tous ensemble sans pouvoir être désunis, ou bien échapent à l'Artiste dans l'instant de leur désunion. Le Souffre dans des vaisseaux fermés s'éleve en fleurs par le feu, & ces fleurs ne sont que le Souffre même : si on le travaille dans des vaisseaux ouverts, l'acide & la partie bitumineuse qui le composent se divisent bien à la verité, mais elles s'envolent.

Après bien des moïens emploïés pour retenir ces substances séparées, M. Homberg est enfin parvenu à retirer par deux differentes suites d'operations, rapportées dans les Memoires de cette Academie, trois substances de ce mineral, un sel acide, un Souffre ou une substance bitumineuse, & de la terre mêlée de quelques parties métalliques.

Par cette Analyse du Souffre qui paroît aussi exacte qu'elle le peut être, & par les idées qu'il nous donne du Souffre dans ses principes ; il nous a rendu si sensible la composition du Souffre commun dans la terre, que j'ai crû qu'il ne seroit pas impossible d'imiter la nature & de composer ce Souffre, soit en réünissant les mêmes principes, soit en mêlant des substances toutes semblables à ces principes.

Pour y réüssir j'ai consideré ce qui se pouvoit passer

dans les entrailles de la terre pour la production de ce minéral, & j'ai observé que l'acide vitriolique & le bitume de la terre qui se rencontrent tous deux très-abondamment dans les lieux d'où se tire le Souffre, s'unissoient ensemble par une longue & forte digestion, pendant laquelle une portion de ces substances mêlées très-intimement avec l'alcali de la terre formoit enfin le Souffre.

Sur cette idée j'ai mêlé de l'esprit de Souffre bien déflegmé, du baume de Souffre tiré selon le procedé de M. Homberg, de chacun parties égales; j'ai fait digerer ce mêlange quelque temps, j'y ai joint une partie d'huile de tartre, & le mêlange ayant digeré de nouveau, je l'ai poussé par la cornuë à un feu assez vif; il en est sorti du flegme, quelque peu d'huile, & la distillation finie j'ai trouvé dans la cornuë une matiere saline jaune en quelques endroits & rouge en d'autres, rendant une odeur de Souffre assez forte, j'ai fait une lessive de toute la matiere, je l'ai filtrée; j'y ai versé ensuite du vinaigre distilé qui l'a troublée & en a fait exhaler une odeur de lait de Souffre très-desagreable. Il s'est précipité à la fin une poudre blanchâtre qui étoit du Souffre brûlant tout pur.

J'ai joint dans cette occasion le sel de tartre aux autres matieres, pour supléer à l'alcali terreux qui sert de base au Souffre minéral dans la terre.

J'ai voulu voir si des substances de même nature que celles que l'on sépare du Souffre ne pourroient pas en produire de la même maniere, & pour cela j'ai choisi l'huile de vitriol & l'huile de terebentine.

J'ai mêlé parties égales de l'un & de l'autre, j'ai laissé digerer le tout pendant quelque tems, d'abord le mêlange s'est échauffé très-considérablement, il est devenu fort rouge, & il a rendu une odeur assez agréable approchante du citron: cette odeur est devenuë un peu plus forte par la suite & moins agréable. J'ai mêlé dans cette liqueur qui s'étoit épaissie de l'huile de tartre, les matieres ont fermenté pendant un long-tems, mais sans grande violence; la fermentation finie il s'en est fait une li-

queur

queur assez épaisse & savonneuse, dont j'ai distilé une portion ; j'en ai retiré une huile jaune, transparente, d'une odeur forte & d'un goût très-acre, avec un flegme aussi très-acre. Il est venu ensuite une huile plus brune, plus épaisse, douce sur la langue, & d'une odeur d'huile de cire. Enfin il est venu une huile épaisse, douce, de la même odeur & de la même consistance que le beurre de cire. J'ai trouvé au fond de la cornuë une masse saline jaune & d'une odeur de Souffre ou d'œufs pourris assez forte. J'ai dissous cette matiere dans de l'eau, & j'ai versé sur la dissolution du vinaigre distilé qui l'a blanchie, il s'est précipité une poudre grise inflammable qui est du Souffre pur.

J'ai voulu essayer si je ne pourrois pas abreger cette operation en la faisant à feu ouvert, & pour cela j'ait fait dessecher l'autre portion du mêlange d'huile de vitriol, d'huile de terebentine, & d'huile de tartre. Je l'ai jettée ensuite dans un creuset rougi entre les charbons, elle s'est enflammée d'abord rendant une odeur toute semblable à celle de l'oliban que l'on brûle. Enfin cette matiere achevant de brûler, son odeur d'oliban s'est convertie en une odeur de Souffre très-penetrante. J'ai retiré pour lors la matiere à demi fonduë, & je l'ai trouvée en partie jaune couleur de Souffre, en partie rouge brune avec une odeur de Souffre très-forte.

J'ai employé avec le même succès l'esprit de Souffre & l'esprit d'alun en la place de l'huile de vitriol dans la distilation, ces liqueurs acides ne differant point essentiellement.

Comme il m'a paru que dans ces operations je faisois un tartre vitriolé par le mêlange de l'huile de tartre avec les esprits acides, j'ai essayé si le tartre vitriolé & les autres sels de la même nature ne produiroient pas le même effet. L'évenement a répondu à mon attente. Le tartre vitriolé, le sel fixe de vitriol autrement sel de colcotar, le sel qui résulte du mêlange de l'esprit de Souffre & de l'huile de tartre, le sel de Glauber qui n'est que l'acide du vitriol fixé par l'alcali du sel marin, l'alun calciné qui est un aci-

de vitriolique concentré dans beaucoup de terre : tous ces sels, dis-je, joints avec differentes sortes d'huiles m'ont donné du Souffre brûlant. Voici un exemple du procedé que j'ai tenu pour cela dans la composition du Souffre par le mêlange de l'esprit-de-vin avec le sel fixe du vitriol.

J'ai mêlé une once de sel de colcotar avec deux gros de sel de tartre, j'ai fait fondre la matiere à grand feu, & dans le temps qu'elle commençoit à fondre, j'y ai versé à diverses reprises une once d'esprit-de-vin. Lorsque la matiere en cessant de brûler a commencé de rendre une odeur de Souffre penetrante, je l'ai retirée du feu, la flamme en étoit bleuâtre, & lorsqu'elle a été refroidie la matiere étoit jaune en quelques endroits, & rouge en d'autres avec une odeur de Souffre ou d'œufs pourris; j'en ai fait la lessive sur laquelle j'ai versé du vinaigre distilé qui en a precipité du Souffre brûlant.

J'ai joint dans cette operation un peu de sel de tartre au sel de colcotar, pour aider à la fusion qui rend le mêlange des Souffres avec les sels beaucoup plus exact, & qui fournit par conséquent une plus grande quantité de Souffre brûlant.

Il est surprenant qu'un Souffre aussi subtil & aussi volatil que paroît être celui de l'esprit-de-vin, puisse se fixer si promptement avec un sel tout embrasé & en fusion au milieu d'un feu très-violent & dans un creuset ouvert.

J'ai substitué à l'esprit-de-vin differentes substances bitumineuses & huileuses, comme la matiere bitumineuse du Souffre, le petrole, l'huile distée du succin, l'huile de terebentine, & les huiles fetides tirées des animaux. Ces substances unies avec ces sels m'ont toutes donné du Souffre.

Toutes les autres matieres inflammables, comme le bois, le charbon de bois, le charbon de terre, ou autres unies avec quelqu'un de ces sels, ne manquent point de produire du Souffre de la même maniere.

J'ai voulu faire la même operation avec le sel marin décrepité & avec le nitre fixé; mais je n'en ai point du tout retiré de Souffre : peut-être ces sels étant d'une au-

tre nature que le sel vitriolique ne sçauroient-ils produire de Souffre.

Je n'oserois encore cependant rien prononcer de general là-dessus, jusqu'à ce que je m'en sois assuré par un plus grand nombre d'experiences.

Les differentes compositions du Souffre commun que je viens de décrire, nous assurent pleinement de ce que M. Homberg avoit deja montré par son Analyse, que le Souffre mineral n'est qu'un composé d'un sel acide, de Souffre principe, & d'un alcali salin ou terreux.

Boyle & Glauber qui ont travaillé tous deux à faire du Souffre commun, ont donné chacun une maniere differente de le composer.

Le procedé de Boyle est un mêlange d'huile de vitriol & d'huile de terebentine, qui rend par la distilation premierement une huile qui paroît peu differente de l'esprit de terebentine, ensuite une liqueur un peu acide, blanchâtre, trouble, au fonds de laquelle se precipite une poudre jaune qui est du Souffre commun. L'operation finie on trouve de ce même Souffre attaché au haut de la cornuë, le long du col & aux parois du recipient. Il reste au fond une masse legere, noire & luisante, qui n'est pas une simple terre, comme je le dirai cy-après.

J'ai fait la même operation en employant l'esprit-de-vin au lieu de l'huile de terebentine, & j'en ai retiré du même Souffre brûlant.

Je ne doute point après cela que suivant ce même procedé on ne tirât du Souffre de toutes les liqueurs inflammables mêlées avec les acides vitrioliques.

Dans cette operation le Souffre s'éleve & passe par le bec de la cornuë dans le recipient, parce qu'il n'y a pas assez de matieres fixes pour le retenir; & dans les deux autres operations que j'ai rapportées, il reste au fond de la cornuë ou du creuset où il est retenu par le sel fixe du tartre, ou la terre du sel fixe du vitriol.

Le procedé de Glauber est un mêlange de sel connu sous le nom de *Sal mirabile Glauberi*, & du charbon de

bois réduit en poudre. Ce mêlange jetté dans un creuset au milieu d'un grand feu & fondu, rend une odeur de Souffre assez forte. Si on le retire du feu dans ce même temps, la matiere qui est rouge brune rend du Souffre brûlant par la lessive & par la précipitation avec le vinaigre distilé.

Glauber n'avoit donné cette operation qu'avec son sel & le charbon, & je l'ai rendu generale en faisant voir que le mêlange de tous les sels vitrioliques & de toutes les matieres inflammables produisoient le même effet.

Glauber prétend que le Souffre qu'il a par son operation, n'est que celui du charbon. Boyle refute ce sentiment par l'impossibilité qu'il y a que ce Souffre fût contenu dans une si petite quantite de charbon : il croit qu'il étoit plus renfermé dans le sel, de même qu'il se persuade que celui qu'il a tiré par son operation étoit dans l'huile de vitriol. Mais ils se trompent tous deux ; car il paroît par les differentes compositions que j'ai faites du Souffre, & par l'Analyse de ce mineral que le Souffre commun n'est contenu ni dans les sels vitrioliques, ni dans les matieres huileuses separément, & qu'il ne se forme que de l'union des deux ensemble.

Je n'entreprens point de rendre ici raison de la maniere dont ces principes s'unissent pour composer le Souffre commun, & toutes les autres matieres bitumineuses & inflammables que l'on peut aussi produire par leurs differentes combinaisons. M. Homberg doit donner tout ce détail dans son Traité particulier du Souffre principe.

J'ajoûterai seulement une conjecture que m'ont fourni les travaux que j'ai eu occasion de faire sur les matieres sulphureuses en cherchant à les recomposer, qui est que les métaux pourroient bien n'être que des bitumes ou des composez de Souffre principe, de sel vitriolique & de terre.

Si la difficulté qu'il y a de penetrer la composition des métaux ne m'a pas encore permis de suivre cette conjecture dans tous, du moins suis-je presque convaincu qu'elle

est vraie pour la composition du fer en particulier.

Si on observe ce métal, outre son sel vitriolique qui se découvre par le goût, & parce qu'il se dissout facilement de lui-même à la moindre humidité, on reconnoît qu'il est presque tout sulphureux. Il s'allume très-promptement lorsqu'on le jette en limaille sur la flamme d'un flambeau. La vapeur sulphureuse qui s'éleve de sa dissolution par les esprits acides, s'enflamme très-aisément & brûle assez long-temps.

Mais ce qui paroît devoir convaincre entierement de la verité de ce que j'avance, ce sont les deux experiences suivantes.

J'ai fait secher de l'argile dont on fait les briques, j'ai mêlé cette terre pulverisée avec une quantité d'huile de lin suffisante pour en pouvoir former une pâte que j'ai réduite en petites boules, j'ai rempli de ces boules une cornuë, & j'en ai distilé au feu poussé par degrés jusqu'à l'extrême violence, une huile fort penetrante semblable à l'huile de brique ou des Philosophes. J'ai retiré de la cornuë les boules toutes noires; après les avoir réduites en poudre, j'en ai emporté toute la terre par un grand nombre de lotions. Il est resté après ces lotions une poudre noire & pesante qui s'attache à l'aiman, & qui paroît être du fer.

Dans cette experience que j'ai faite sur le procedé que Becker en a donné dans son Livre *De Physicâ subterraneâ*, l'acide vitriolique contenu dans l'argile, & le principe du Souffre contenu dans l'huile de lin semblent avoir composé le fer par leur mêlange & par la violente cuisson qu'ils ont reçûë.

Il me restoit cependant quelques doutes sur cette production du fer, & quoique je me fusse assuré autant qu'il m'étoit possible que ces petites parties métalliques n'étoient point contenuës dans l'argile, je ne laissois pas de me défier encore de mes épreuves; lorsque je fis reflexion que si mon raisonnement sur la composition de ce métal étoit vrai, je devois pareillement trouver du fer dans le

caput mortuum du mêlange de l'huile de vitriol & de l'huile de terebentine après leur distilation.

Pour m'en assurer j'examinai ce *caput mortuum*, ou la matiere noire & luisante qui étoit restée après la distilation de ce mêlange : j'y trouvai de même que dans la precedente des petites parties qui s'attachoient à l'aiman, & que je crois être de fer.

Je travaillerai à m'assurer si ces petites parties sont veritablement du fer, j'observerai avec soin ce qui se passe dans la composition de ce métal, & je rendrai compte de mes travaux à la Compagnie.

MANIERE DE DISCERNER *les vitesses des corps mus en lignes courbes ; de trouver la nature ou l'équation de quelque Courbe que ce soit engendrée par le concours de deux mouvemens connus ; & réciproquement de déterminer une infinité de vitesses propres deux à deux à engendrer ainsi telle Courbe qu'on voudra, & même de telle vitesse qu'on voudra suivant cette Courbe.*

PAR M. VARIGNON.

1704. 22 Novemb. ETant tombé par hazard, il y a quelque tems, sur le chap. 6. part. 3. de *l'Art de jetter des Bombes*, par M. Blondel, l'embarras de la démonstration qu'il y donne pour prouver que *les lignes des projections obliques sont paraboliques*, de même que celles des projections horizontales, en négligeant de part & d'autre la résistance de l'air, me fit penser à les chercher par le calcul, lequel me les donna en deux coups de plume, comme on le verra cy-après dans l'art. 13. Il fit plus : il me donna occasion de remarquer que la supposition qu'on fait d'ordinaire dans l'hypothêse de Galilée touchant les vitesses des chutes en

lignes courbes, sçavoir que ces vitesses y sont comme les racines des hauteurs de ces chutes, n'est vraie que lorsque les corps tombent le long des Courbes, qui (comme en relief) les soûtiennent en tombant, ou qu'ils sont soûtenus par des suspensions équivalentes, c'est-à-dire, perpendiculaires aux Courbes, ou suivant les rayons de leurs Dévelopées; & même seulement dans le cas des chutes commencées à quelque point de ces Courbes, ou de leurs tangentes le long de ces mêmes tangentes, & non ailleurs, ni suivant aucun plan qui leur soit incliné.

En ce cas de chutes commencées à un point d'un plan incliné à une Courbe, & le long de ce plan, je détermine quelles devroient être alors les vitesses du corps tombant le long de cette Courbe dans cette même hypothêse de Galilée, qui est la seule (touchant la pésanteur) dont il s'agira dans la suite, tant qu'on n'y en marquera point d'autre.

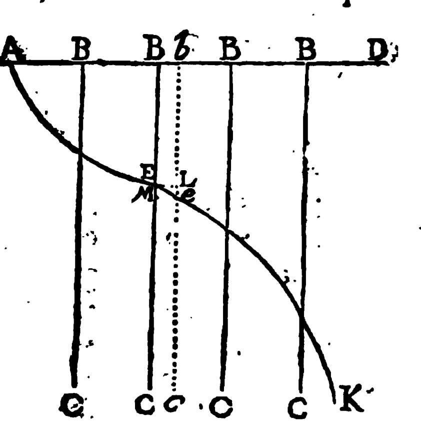
Je passe ensuite aux vitesses des corps qui décrivent des Courbes sans s'appuïer sur elles, ou sans être soûtenus par aucune suspension équivalente; mais seulement par des compositions de mouvemens, lesquels étant donnés tels qu'on aura voulu, je détermine toûjours la nature des Courbes qui en résultent. Par exemple, je détermine quelle Courbe doit décrire un corps jetté d'une vitesse de projection variable à discrétion, quelle que soit celle de sa pésanteur, & quelque angle que les directions de ces vitesses fassent entr'elles. Ce qui donne tout d'un coup la Parabole ordinaire pour cette ligne de projection, lorsque la premiere de ces vitesses est uniforme, & la seconde comme les racines des hauteurs chutes, ainsi qu'on l'a trouvé jusqu'ici par d'autres voies, & pour ce cas seulement.

Réciproquement la nature d'une Courbe quelconque étant donnée, je détermine aussi toûjours deux vitesses du concours desquelles elle peut résulter. Je trouve même une infinité de vitesses propres deux à deux à engendrer par leur concours une même Courbe, quelle qu'elle soit,

geometrique ou mécanique, il n'importe. Par exemple, je trouve quelles devroient être les vitesses de projection & de pesanteur d'un corps pour lui faire décrire par leur concours une hyperbole, ou quelqu'autre Courbe que ce soit : Et entre une infinité de vitesses que je trouve propres deux a deux à faire ainsi décrire une Parabole, l'uniforme & celle qui suit les racines des hauteurs, se trouvent encore la devoir engendrer par leur concours ; & ainsi de toute autre Courbe à l'infini.

De sorte qu'il n'y a aucune Courbe que je ne puisse déduire des mouvemens donnés qui l'engendrent deux à deux, ou pour laquelle donnée je ne puisse trouver une infinité de vitesses propres deux à deux à l'engendrer par leurs concours, & même en determiner toûjours deux du concours desquelles cette Courbe sera décrite de telle vitesse qu'on voudra. Commençons par les vitesses des corps mus en lignes courbes.

I. Pour discerner ces vitesses je considere d'abord qu'il n'y a point de Courbe imaginable qui ne puisse être décrite par le concours de deux mouvemens, dont un sera toûjours à discrétion. En effet si l'on conçoit une Courbe fixe quelconque *AEK* seulement tracée, avec une droite ou une Regle *BC* qui se meuve toûjours parallelement à elle-même, & d'une vitesse à discrétion de *A* vers *D*, pendant que le point *E* se meut de *B* vers *C* le long de cette droite *BC*, & de maniere qu'il se trouve successivement dans tous les points où elle coupera la Courbe *AEK*, quel que soit l'angle *ABC* : Cela (dis-je) conçû, il est manifeste que le concours d'action des deux mouvemens ou impressions qui font ainsi suivre la trace de cette Courbe *AEK* au point *E* sans s'appuïer dessus,

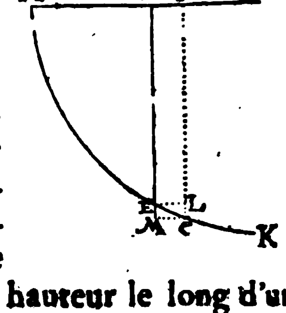


dessus, la lui feroit décrire de même que quand cette Courbe n'y seroit pas ; puisque la suivre ainsi sans s'appuïer dessus, c'est la décrire comme si effectivement elle n'y étoit pas. Donc il n'y a point de Courbe imaginable qui ne puisse être ainsi décrite par le concours de deux mouvemens dont l'un sera toûjours à discrétion. L'autre se trouvera aussi toûjours par le moïen de celui-ci & de la Courbe donnée, comme on le verra ci-après dans l'art. 14.

II. Imaginons présentement deux situations *BC*, *bc*, de la Regle mobile, infiniment proches l'une de l'autre, avec *EL* parallele à *AD*, & le petit parallelogramme *ML* qui ait pour diagonale l'élément *Ee* de la Courbe *AEK* décrite comme ci-dessus art. 1. Il suit de cette description que le point *E* (il s'appellera dans la suite *point décrivant*) parcourt cet élément *Ee* par le concours d'action des mouvemens ou impressions supposées suivant *AD* & *BC*, pendant le tems que chacune d'elles lui auroit fait parcourir celui des élémens *EL* ou *EM*, suivant lequel elle est dirigée. Donc la vitesse résultante de ce concours d'action au point *E* suivant *Ee*, doit être à ce que chacune de ces impressions particulieres en auroit donné séparément à ce point décrivant, suivant *EL* & *EM*, comme *Ee* est à *EL* & à *EM*. Ainsi en prenant *EM* & *EL* pour les élémens des coordonnées d'une Courbe décrite par le concours de deux mouvemens, ou plutôt de deux forces quelconques dirigées suivant ces mêmes coordonnées ; on trouvera en général que ce que ces forces auroient donné séparément de vitesse suivant ces coordonnées en chaque point *E* de cette Courbe, au corps qui la décrit, doit toûjours être à ce qu'elles lui en donnent effectivement ensemble en ce point suivant cette même Courbe, comme les élémens *EM* & *EL* sont chacun au correspondant *Ee* de cette Courbe. De sorte qu'en appellant v & z les vitesses qui résulteroient ainsi de ces forces séparées, suivant les coordonnées qui en sont les directions, c'est-à-dire, suivant les élémens *EM* & *EL* de ces coordonnées ; le concours de ces forces donnera d'une part $\frac{v \times Ee}{EM}$, & de

l'autre $\frac{z \times Ee}{EL}$, pour la viteſſe du corps décrivant au point *E* ſuivant l'élément *Ee* de la Courbe *AEK*.

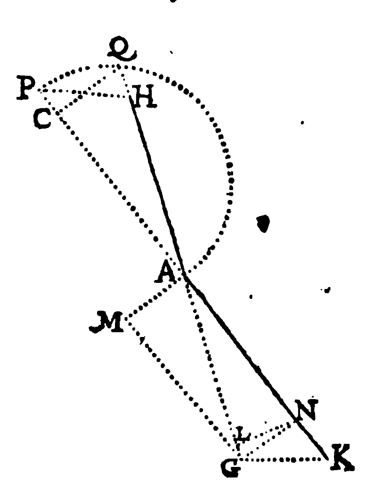
III. Voilà ce que ces deux forces ſuivant *EM* & *EL*, ont enſemble d'action ſur le point *E* ſuivant *Ee*. Mais ſi une d'elles ceſſoit d'agir, par éxemple, celle qui eſt ſuivant *EL*, en ſorte que le corps *E* n'eût plus que celle qui tend ſuivant *EM*, & qu'apuïé ſur le relief d'une Courbe effective *AEK*, il ne la ſuivît qu'en vertu de cette force que je ſuppoſe être celle de ſa péſanteur; alors il lui arriveroit comme à tout autre corps ſeulement péſant, qui au lieu de tomber ſuivant la verticale *EM*, tomberoit le long d'un plan incliné *Ee*. Ainſi en tombant le long de la Courbe *AEK* en vertu de ſa ſeule péſanteur, il y doit tomber comme le long d'une infinité de plans contigus, dont on va voir (*article* 6.) que les angles infiniment petits ne diminuënt rien de la viteſſe qu'il auroit en tombant de pareille hauteur le long d'un ſeul & même plan dans l'hypothêſe de Galilée. Or on ſçait que dans cette hypothêſe, les viteſſes acquiſes par des chutes faites chacune le long d'un même plan quelconque, ſont toûjours comme les racines des hauteurs de ces chutes. Donc auſſi dans l'hypothêſe de Galilée, les viteſſes d'un corps qui tombe le long d'une Courbe quelconque *AEK* en vertu de ſa ſeule péſanteur, doivent être dans tous les points *E* de cette Courbe ſuivant *EK*, comme les racines des hauteurs *BE* de leurs chutes commencées en quelque point *A* que ce ſoit de cette Courbe, ainſi qu'on le ſuppoſe d'ordinaire.



IV. Pour voir préſentement pourquoi les angles d'un Polygone infinitilatere, ſous la forme duquel on conſidere chaque Courbe, ne diminuënt point les viteſſes d'un corps qui tombe le long de cette même Courbe en vertu de ſa ſeule péſanteur, vû ce que j'ai démontré dans les Mémoires de 1693. pag. 182. de la perte qu'en doit faire un corps

qui tombe le long de plusieurs plans contigus à angles finis : Pour voir, dis-je, la raison de cette différence, il n'y a qu'à appliquer aux Courbes ce que j'ai dit de ces plans ; voici en deux mots ce qu'il nous en faut par rapport à ceci.

Soient deux plans contigus *HA* & *AK*, inclinés l'un à l'autre comme on voudra, le long desquels un corps tombe du point *H*, par ce point *H* & par un point *G* quelconque de *HA* prolongé, soient les horizontales *HP* & *GK*, qui rencontrent en *P* & en *K* la droite *KA* prolongée vers *P* ; soit de plus le parallelogramme rectangle *MN* dont *AG* soit la diagonale.



Cela fait, il est visible que la vitesse acquise de *H* en *A* suivant *AG*, doit être la même au point *A* que si elle résultoit du concours de deux forces capables de donner en ce point au corps qui tombe, des vitesses suivant *AM* & *AN*, lesquelles fussent à celle qu'il a au point *A* suivant *AG*, comme les côtés *AM* & *AN* du parallelogramme *MN*, sont à sa diagonale *AG*. Or en ce cas la force qui pousseroit ce corps suivant *AM*, étant soûtenuë toute entiere par le plan *AK* qui lui résiste (*hyp.*) perpendiculairement, il ne resteroit plus à ce corps que l'impression de la force suivant *AN* pour suivre cette ligne d'une vitesse qui seroit à celle qui lui résulteroit de leur concours, c'est-à-dire (*hyp.*) à celle qu'il a effectivement en *A* suivant *AG* après sa chute de *H* en *A* par *HA*, comme *AN* est à *AG*. Donc la vitesse que la chute de *H* en *A* par *HA*, donne à ce corps au point *A* suivant *AG*, est à ce que la rencontre du plan *AK* lui en laisse suivant sa direction *AK*, comme *AG* est à *AN*. Par conséquent en faisant du centre *A*, & du rayon *AN*, l'arc

NL qui rencontre *AG* en *L*, l'on aura *LG* pour ce que la rencontre du plan *AK* fait perdre de viteſſe au corps qui tombe, en paſſant de *HA* en *AK*; c'eſt-à-dire que cette perte de viteſſe doit être à ce qu'il en doit avoir en *A* ſuivant *AG*, comme *LG* eſt à *GA*. Ainſi l'angle fini *KAG* rendant *LG* finie de même que le ſont (*hyp.*) *AG* & *AN* ou *AL*, cette perte de viteſſe doit auſſi être finie & réelle par rapport à ce que le corps tombé de *H* en *A*, en auroit en *A* pour ſuivre *AG* ſans l'obſtacle du plan *AK*, & par rapport à ce que cet obſtacle en laiſſe à ce corps ſuivant ce plan *AK*. Et par conſéquent l'infléxion des plans *HA* & *AK* le long deſquels on le ſuppoſe tomber, doit l'empêcher d'avoir autant de viteſſe en *K* qu'il en auroit eu en tombant de *P* en *K* le long du ſeul plan *PK*, ou qu'il en auroit acquis en *G* en tombant du point *H* le long du ſeul plan *HG*.

V. De là on peut voir au juſte de quel point du plan *PK* ce corps auroit dû tomber le long de ce plan pour avoir en *K* la même viteſſe qu'il y acquiert en vertu de ſa chute de *H* par *HAK*: Car ſi l'on décrit ſur le diametre *PA* un demi-cercle *PQA* qui rencontre *HA* prolongée en *Q*, & que de ce point *Q* on mene *QC* perpendiculaire ſur *PA*; on trouvera que le corps tombé de *H* en *K* par *HAK*, ne doit avoir de viteſſe en *K*, qu'autant qu'il y en auroit en tombant de *C* en *K* le long du plan *PK*, bien loin d'y en avoir autant que s'il étoit tombé de *P* en *K* le long de ce même plan, ainſi que Galilée l'a ſuppoſé.

En effet puiſque (*hyp.*) *HP* eſt horizontale, on ſçait que les viteſſes acquiſes en *A* ſuivant *AK* par la chute d'un corps de *P* en *A*, & ſuivant *AG* par la chute de *H* en *A*, doivent être égales. Donc (*art.* 4.) en ce point *A* la viteſſe acquiſe ſuivant *AK* par la chute de ce corps de *P* en *A*, ſeroit à ce qu'il lui en reſte ſuivant la même direction *AK* après ſa chute de *H* en *A* :: *AG*. *AN* :: *AQ*. *AC* :: $\sqrt{AP}$. $\sqrt{AC}$. Or on ſçait auſſi que ce que ce corps acquieroit de viteſſe en *A* ſuivant *AK* par ſa chute de *P* en *A*, ſeroit pareillement à ce qu'il en acquieroit en ce même point *A* ſuivant *AK* par ſa chute de *C* en *A* ::

$\sqrt{AP}.\sqrt{AC}$. Donc la viteſſe en *A* ſuivant *AK*, acquiſe par ſa chute de *H* en *A*, eſt la même que ſi le corps qui a fait cette chute, fût tombé de *C* en *A*, en commençant en *C*; & non pas la même que s'il fût tombé de *P* en *A*, comme on le ſuppoſe d'ordinaire avec Galilée.

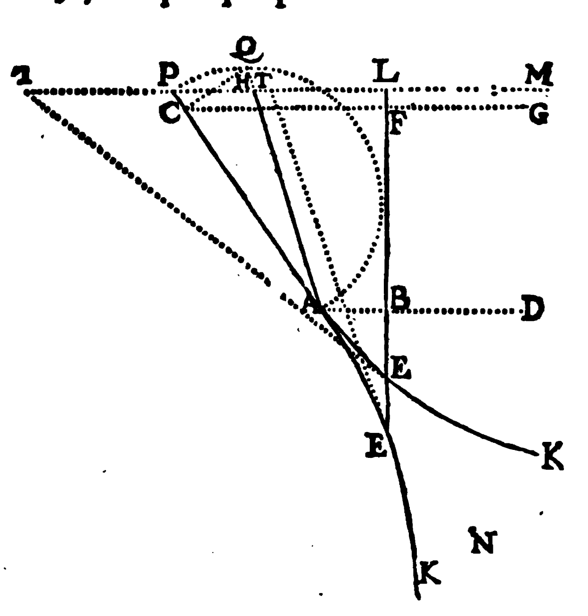
VI. Voilà ce que cauſe l'angle fini *GAK*; mais ſi on le ſuppoſe infiniment petit, l'arc *LN* qui en eſt la meſure, ſe trouvera auſſi pour lors infiniment petit, & pouvant ainſi paſſer pour une petite ligne droite perpendiculaire ſur *AG* les angles (*hyp.*) droits *ANG* & *ALN* donneront *AL.LN*:: *LN.LG*. Et par conſéquent *LG* ſera une *différentio-différentielle*, ou une différentielle du ſecond genre par rapport à la grandeur finie *AL* ou *AN*. Or on a vû (*art.* 4.) que *LG* eſt à *AN*, comme la perte de viteſſe cauſée en *A* par l'oppoſition du plan *AK* à la chute de *H* en *G*, eſt à ce qu'il en reſte ſuivant *AK*. Donc cette perte de viteſſe faite en *A*, doit être auſſi un infiniment petit du ſecond genre par rapport à ce qu'il en reſte ſuivant *AK* au corps tombé de *H* en *K* par *HAK*, dans cette hypothêſe de l'angle *GAK* infiniment petit.

Or en conſidérant les Courbes comme autant de Polygones infini-lateres; dont les angles d'attouchement ſont les complémens des interieurs de ces Polygones, ainſi que *GAK* l'eſt ici de *HAK*; un corps tombant le long de la concavité d'une Courbe quelconque, y doit tomber comme le long d'une infinité de plans contigus, dont les angles (complémens des interieurs au travers deſquels ce corps paſſe) ſont infiniment petits. Donc les pertes de viteſſe qu'il y doit faire à la rencontre des plans ou des côtés infiniment petits ſur leſquels il paſſe, ne doivent être que des infiniment petits du ſecond genre par rapport aux viteſſes avec leſquelles il y paſſe. Et par conſéquent quoique le nombre infini d'angles qui ſe trouvent dans chaque Courbe ainſi regardée comme polygone, cauſe à ce corps une infinité de pareilles pertes, leur ſomme ne ſera jamais qu'un infiniment petit du premier genre par rapport à ce qu'il y a de viteſſe en chaque point de cette Courbe.

Donc cette perte totale sera nulle par rapport à la vitesse de ce corps, & la courbure de la Courbe le long de la concavité de laquelle on le suppose tomber, n'y apportera aucun obstacle.

Il est visible aussi que si ce corps tomboit le long de la convexité de la même Courbe, elle n'apporteroit point non plus d'obstacle à sa vitesse; puisqu'il n'y en perdroit pas même une différentielle du second genre. Donc de quelque maniere qu'un corps se meuve le long d'une Courbe sans rebroussement contraire, elle n'apportera par sa courbure aucun obstacle à la vitesse de ce corps.

VII. Ainsi (*art.* 3.) en quelque point *A* d'une Courbe quelconque *AEK*, que commence la chute libre d'un corps le long de cette Courbe en s'appuïant sur elle, il aura par tout, c'est-à-dire, en chaque point de cette Courbe, la même vitesse qu'il y auroit acquise en tombant de l'horizontale *AD* par la droite *BE*.



Et par conséquent les vitesses y seront par tout comme les racines $\sqrt{BE}$ des hauteurs correspondantes.

VIII. De même si la chute commence à quelque point *P* que ce soit d'une tangente *PA* de la Courbe *AEK* le long de *PAEK*, la vitesse en chaque point *E* de cette Courbe sera encore égale à celle que le corps ainsi tombé, y auroit acquise en tombant de l'horizontale *PM* le long de la droite *LE*, c'est-à-dire, aussi comme $\sqrt{LE}$;

parce que (*art.* 6.) l'angle de la touchante *PA* avec la Courbe, n'y doit faire aucun obstacle.

IX. De là on voit aussi que lorsqu'une Courbe *AEK* a plusieurs touchantes *AP*, *ET*, &c. terminées à une même horizontale *PM* de laquelle commencent les chutes, il est indifférent par laquelle de ces tangentes le corps tombe le long de cette Courbe, par rapport à sa vitesse en quelque point *K* que ce soit de cette même Courbe, pris au-dessous de toutes ces tangentes ; puisque sa vitesse y sera toûjours (*art.* 8.) comme $\sqrt{LE}$, c'est-à-dire, la même par toutes ces tangentes.

Donc si cette Courbe *AEK* étoit, par exemple, une Paracentrique le long de laquelle un corps tombant de *P* par la tangente *PA*, approchât également de quelque point *N* que ce soit en tems égaux, les arcs *EK* seroient aussi paracentriques par raport à ce même point *N* en vertu des chutes commencées en *T* par les tangentes *TE*, c'est-à-dire que ce corps en poursuivant chaque arc *EK* en vertu d'une chute faite de *T* par *TE*, s'approcheroit aussi toûjours également du point *N* en tems égaux ; parce que ses vitesses acquises en *E* suivant *EK* en vertu de ses chutes faites de *P* par *PAE*, & de *T* par *TE*, sont les mêmes étant de part & d'autre (*art.* 8.) comme $\sqrt{LE}$, c'est-à-dire, telles qu'il les acquieroit en *E* suivant *LE* en tombant de *L* par *LE* : Et tout cela, parce que (*art.* 6.) les angles infiniment petits des tangentes avec les Courbes, n'y apportent aucun obstacle.

X. Il n'en est pas de même des angles finis : Car si l'on suppose que la droite *HA* rencontre la Courbe *AEK* en *A* sous quelque angle fini que ce soit ; c'est-à dire, qu'elle fasse un angle fini quelconque *HAP* avec la tangente *PA* de cette Courbe ; on trouvera par les articles 4. & 5. qu'un corps tombé de *H* par *HAE*, n'aura pas la même vitesse en *E* suivant *EK*, que s'il fût tombé de l'horizontale *HM* par *LE*, ni par conséquent une vitesse qui soit comme $\sqrt{LE}$. Au contraire si après avoir prolongé l'horizontale *MH* jusqu'à la rencontre en *P* de la tangente *AP*,

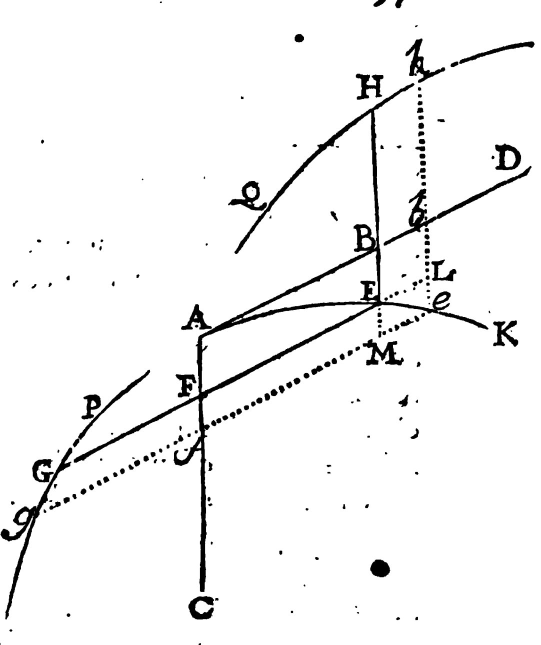
on décrit sur le diametre *AP* le demi-cercle *AQP* qui rencontre *AH* prolongée en *Q*, & que de ce point *Q* on mene *QC* perpendiculaire sur *AP*; on trouvera (*art.* 5.) que la vitesse en *A* suivant *AE*, acquise en tombant de *H* en *A* par *HA*, doit être la même que si le corps fût tombé de *C* en *A* par la tangente *CA*; & par conséquent aussi (*art.* 8.) la même en *E* suivant *EK*, qu'elle y auroit été suivant *FE* si ce corps fût tombé de l'horizontale *CG* par *FE*, c'est-à-dire, seulement comme $\sqrt{FE}$, & non pas comme $\sqrt{LE}$, quoique les chutes faites de *H* en *E* par *HAE*, & de *L* en *E* par *LE*, soient (*hyp.*) de même hauteur.

XI. On voit donc pour toutes sortes de Courbes, non seulement que les vitesses commencées à quelque point que ce soit de ces Courbes ou de leurs tangentes, sont par tout le long de ces tangentes & de ces Courbes, comme les racines des hauteurs de ces chutes; mais aussi que c'est-là le seul cas où ces vitesses soient en cette raison, quoy qu'acquises par la seule pésanteur des corps qui tombent en s'appuïant sur le relief des Courbes qu'ils suivent.

Pour ce qui est des Courbes que ces corps tracent eux-mêmes par le concours de deux forces ou impressions différentes, sans être soûtenus ni s'appuïer sur ces Courbes; on a aussi vû dans l'art. 2. que quand même la pésanteur de chaque corps seroit une de ces deux forces, ses vitesses le long de la Courbe qu'il décriroit par le concours de cette force avec toute autre, ne seroient point encore comme les racines des hauteurs que sa pésanteur seule lui auroit fait parcourir; mais seulement comme on les a démontrées dans cet art. 2.

XII. Tel est le discernement qu'il faut faire des vitesses des corps mus en lignes courbes; voici aussi quelque chose de l'usage qu'on peut faire des vitesses résultantes du concours de plusieurs forces.

Soit une Courbe quelconque *AEK* décrite (*art.* 1.) par le concours de deux mouvemens, c'est-à-dire, par un corps agité



agité de deux impressions à la fois suivant *AC* & *AD*, ou suivant leurs paralleles *BE*, *be*, & *FE*; *fe*, menées par les extrémités d'un élément quelconque *Ee* de cette Courbe *AEK*, quel que soit l'angle *CAD*, & quelles que soient aussi ces impressions, ou les vitesses qu'elles seroient capables de donner séparément au corps *décrivant* en chaque point *E* de la Courbe *AEK* suivant les côtés *EM* & *EL* du petit parallelogramme *ML*; ou en *F* suivant *FC*, & en *B* suivant *BD*, si ce corps suivoit séparément *AC* & *AD* en vertu de ces impressions ou forces séparées, qui dans la suite s'appelleront *C* & *D*.

Pour l'universalité de ces vitesses en *E* suivant *EM* ou en *F* suivant *FC*, & en *E* suivant *EL* ou en *B* suivant *BD*, soient encore deux Courbes quelconques *GP* & *HQ*, qui les expriment par leurs ordonnées correspondantes *FG* & *BH*, lesquelles soient appellées v & z, comme dans l'art. 2. Soient de même leurs abscisses *AF* & *AB* appellées x & y, lesquelles soient aussi les coordonnées de la Courbe *AEK*.

Cela fait, l'art. 2. donnant encore ici $\frac{v \times Ee}{EM}$ & $\frac{z \times Ee}{EL}$ pour la vitesse suivant *Ee*, résultante du concours de celles-là, l'on trouvera $\frac{v}{dx} = \frac{z}{dy}$ ou $v\,dy = z\,dx$ pour l'équation générale de cette Courbe *AEK*, laquelle deviendra celle de telle hypothêse qu'on voudra, si l'on y substitue en x, & en y, & en constantes les valeurs des vitesses v & z qui conviennent à cette hypothése.

La même équation générale de la Courbe *AEK* se peut encore trouver sans se mettre en peine de ce que le corps *décrivant* peut avoir de vitesse le long de cette Courbe : il suffit de considerer que ce corps ne parcourt (*hyp.*) l'élément *Ee* qu'en vertu des deux impressions *C* & *D*, qui séparément lui feroient parcourir *EM* & *EL* dans le même tems que par leur concours elles lui feroient parcourir *Ee*; car alors voïant que ces autres élémens *EM* & *EL* devroient être ainsi parcourus en même tems ; on verra aussi qu'ils doivent toûjours être entr'eux comme les vitesses (telles qu'elles puissent être) *v* & *z* requises pour cela : c'est-à-dire, *EM* (dx). *EL* (dy) :: $v.z$. Et par conséquent $z\,dx = v\,dy$, comme cy-dessus.

XIII. Pour faire quelque usage de cette formule ou équation générale, supposons (si l'on veut) que la force suivant *AC* ou *BE*, par le concours de laquelle avec une autre suivant *AD*, se décrit (*hyp.*) la Courbe *AEK*, soit la pésanteur du corps *décrivant* ; & qu'ainsi les vitesses *v* en chaque point *E* suivant *BE*, soient comme les racines des hauteurs *AF* ou *BE* (x) correspondantes, auquel cas la Courbe *PO* sera une Parabole ordinaire dont le sommet est en *A*, & son lieu $v = \sqrt{x}$. Si l'on substituë cette valeur de *v* dans la précédente équation générale $z\,dx = v\,dy$, l'on aura $z\,dx = dy\sqrt{x}$, ou $\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{z}$ pour l'équation de toutes les Courbes décrites par le concours de la pésanteur des corps décrivans, & de quelqu'autre impression ou force que ce soit suivant *AD*, quelque vitesse *z* qu'elle soit capable de donner seule suivant cette direction, & quelque angle aussi *CAD* que cette direction fasse avec la verticale *AC* : De sorte qu'il n'y a plus qu'à substituer ici la valeur de *z* résultante (en *y* & en constantes) de l'équation de la Courbe *QH* suivant telle hypothêse qu'on voudra faire, & l'équation $\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{z}$ se changera en celle de la Courbe *AEK* particuliere à cette hypothêse.

Par exemple, si l'on imagine cette Courbe *AEK* décrite par un corps jetté du point *A* suivant *AD*, & qu'on

prenne à l'ordinaire la viteſſe z de projection ſuivant AD pour conſtante & par tout la même, en faiſant (ſi l'on veut) $z = \sqrt{a}$, & en changeant ainſi la Courbe QH en une ligne droite parallele à AD; la ſubſtitution de cette valeur de z dans l'équation precedente $\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{z}$, la changera ici en $\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{a}}$, dont l'intégrale $2\sqrt{x} = \frac{y}{\sqrt{a}}$, ou $4ax = yy$ ſera l'équation de la Courbe AEK dans ce cas-ci. D'où l'on voit que cette Courbe de projection devient ici une Parabole ordinaire, dont le parametre au point A de projection, doit être quadruple de la hauteur a d'où le corps jetté auroit dû tomber pour acquerir par ſa ſeule peſanteur la viteſſe $\sqrt{a}$ de projection qu'on lui vient de ſuppoſer ſuivant AD, quel que ſoit l'angle CAD que cette ligne AD de projection faſſe avec la verticale AC, ainſi qu'on l'a trouvé juſqu'ici par d'autres manieres beaucoup moins ſimples que celles ci.

Pour trouver cette Courbe encore plus facilement, il ſuffit de conſiderer que puiſque (*hyp.*) la viteſſe de projection ſuivant AD, eſt uniforme, l'on aura partout AB comme le tems que le corps jetté emploïe à parcourir AE; & par conſéquent Bb ou EL (dy) pour l'inſtant que ce corps emploïe à parcourir Ee, ou qu'il emploïeroit à parcourir EM (dx) en vertu de ſa ſeule peſanteur, d'une viteſſe qui ſeroit comme $\sqrt{BE}$ ($\sqrt{x}$). Donc en prenant dy pour cet inſtant, & $\sqrt{x}$ pour cette viteſſe, l'on aura $\frac{dx}{\sqrt{x}} = dy$, dont l'intégrale $2\sqrt{x} = y$, ou $4x = yy$ eſt encore un lieu à la Parabole ordinaire, lequel deviendra (comme cy-deſſus) $4ax = yy$ en ſubſtituant a pour 1, afin d'obſerver la loi des homogenes.

On trouvera de même toute autre Courbe AEK réſultante du concours d'action de deux forces quelconques dirigées ſuivant AC & AD, quelque angle CAD que ces directions faſſent entr'elles, & quelles que ſoient auſſi les viteſſes v & z que ces forces ſeroient capables de donner ſéparément en E ſuivant ces mêmes directions ou leurs

paralleles, au corps *décrivant*; c'est-à-dire, de quelque nature qu'on suppose les Courbes PG & QH qui expriment ces vitesses par leurs ordonnées FG & BH correspondantes: & cela, comme l'on voit, en substituant dans l'équation générale $zdx = vdy$ les valeurs de ces vitesses v & z, résultantes des équations données de ces deux Courbes-ci.

XIV. L'équation générale de l'art. 12. ne donne pas seulement toutes les Courbes qui se peuvent engendrer par des compositions de mouvemens connus, c'est-à-dire, chacune par le concours de deux vitesses connuës, quelles qu'elles soient; mais elle donne aussi toûjours deux vitesses qui par leur concours peuvent ainsi engendrer quelque Courbe donnée que ce soit: elle donne même une infinité de vitesses propres deux à deux à engendrer ainsi une même Courbe donnée, quelle qu'elle soit, geometrique ou méchanique, il n'importe. En effet l'équation $zdx = vdy$ donnant $z = \frac{vdy}{dx}$, & la Courbe donnée AEK donnant aussi la valeur de $\frac{dy}{dx}$ en x, en y, & en constantes, si l'on substituë cette valeur de $\frac{dy}{dx}$ dans cette équation $z = \frac{vdy}{dx}$, il ne restera plus qu'à y déterminer une des deux vitesses v ou z, en x ou en y, & en constantes, pour avoir l'autre. Or on a vû cy-dessus (*art.* 1.) qu'une de ces vitesses est toûjours à discrétion, & qu'ainsi on peut toûjours en déterminer une, par exemple v, dans cette équation. Donc par ce moïen l'autre z sera aussi toûjours déterminée. Par conséquent l'équation générale $zdx = vdy$, & celle de la Courbe donnée AEK, pourront toûjours ainsi donner ensemble deux vitesses v & z propres à engendrer cette Courbe par leur concours: & même en donner une infinité d'autres propres deux à deux à engendrer ainsi la même Courbe; puisque par ce moïen z aura autant de valeurs differentes que v, qui étant (*art* 1.) à discrétion, en peut avoir de différentes à l'infini.

Par exemple, soit la Courbe *AEK* une hyperbole dont le lieu soit $y = \sqrt{\frac{pbx+pxx}{b}}$, & qu'il faille la faire décrire à un corps jetté suivant *AD*, par le concours de sa pésantе u suivant la verticale *AC*, quelque angle *CAD* que ces directions fassent entr'elles : on demande quelles vitesses v & z de pésanteur & de projection, il faut à ce corps pour cela.

On voit déja qu'une de ces vitesses, par exemple celle de la pésanteur, étant (*art.* 1.) arbitraire, on la peut prendre à l'ordinaire en chaque point *E* suivant chaque verticale *BE* correspondante, comme la racine de cette hauteur ($\sqrt{x}$), & faire ainsi $v = \sqrt{x}$. D'un autre côté l'équation précédente à l'hyperbole proposée, donnera aussi $\frac{dy}{dx} = \frac{pb+2px}{2\sqrt{pbbx+pbxx}} = \frac{pb+2px}{2\sqrt{x} \times \sqrt{pbb+pbx}}$. Donc en substituant ces valeurs de v & de $\frac{dy}{dx}$ dans la précédente équation générale $z = \frac{vdy}{dx}$, l'on aura l'autre vitesse suivante $z = \frac{pb+2px}{2\sqrt{pbb+pbx}}$, qui sera celle de projection. Ainsi l'on aura pour lors $\sqrt{x}$, & $\frac{pb+2px}{2\sqrt{pbb+pbx}}$ pour les expressions des deux vitesses v & z propres à engendrer par leur concours l'hyperbole requise *AEK*.

Si au lieu d'une hyperbole, on veut que le corps jetté suivant *AD*, décrive une Parabole *AEK* par le concours de sa pésanteur suivant la verticale *AC*, quelque angle que ces deux directions fassent entr'elles. Il est visible qu'en prenant encore sa vitesse de pésanteur $v = \sqrt{x}$, ainsi qu'on le voit permis dans l'art. 1. il n'y a qu'à faire b infinie dans la précédente valeur de z pour avoir la vitesse de projection requise en ce cas-ci. Car de même que b infinie dans la précédente équation hyperbolique $y = \sqrt{\frac{pbx+pxx}{b}}$, la changeroit en une parabolique $y = \sqrt{px}$; de même aussi b infinie dans la précédente

expreſſion $z = \frac{pb+2bx}{2\sqrt{pbb+pbx}}$ de la viteſſe de projection réquiſe avec celle de péſanteur $v = \sqrt{x}$ pour faire décrire une hyperbole au corps jetté, changera cette viteſſe de projection en $z = \frac{pb}{2\sqrt{pbb}} = \frac{p}{2\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{p}}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}p}$, qui ſera auſſi celle de projection réquiſe avec cette même viteſſe $v = \sqrt{x}$ de péſanteur ſuivant *AC*, pour lui faire décrire une Parabole. Ce qui fait voir que cette viteſſe z de projection ſuivant *AD*, doit être conſtante, c'eſt-à-dire, uniforme, & telle que ce corps l'acquieroit en vertu de ſa ſeule péſanteur en tombant de la hauteur du quart du parametre (p) de cette Parabole.

La même choſe ſe trouvera encore immédiatement ſi l'on conſidere ſeulement que l'équation parabolique $y = \sqrt{px}$ donne $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{x}}$; car la ſubſtitution de cette valeur de $\frac{dy}{dx}$, & de celle de $v = \sqrt{x}$ dans l'équation générale $z = \frac{v\,dy}{dx}$, donnera encore tout d'un coup $z = \frac{\sqrt{p}}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}p}$.

Quelque autre Courbe, ſoit geométrique, ſoit méchanique, qu'on veüille faire ainſi décrire à un corps jetté, on trouvera de même quelle viteſſe de projection ſuivant *AD*, il requiert pour cela avec ce que ſa péſanteur lui en donne ſuivant *AC*, ou avec telle autre qu'on lui voudra ſuppoſer ſuivant *AC'*, & quelque angle que les directions *AD*, *AC*, de ces viteſſes faſſent entr'elles. On voit auſſi par la maniere dont $v = \sqrt{x}$ vient de donner la valeur de z, que d'autres valeurs de v ſubſtituées de même dans l'égalité générale $z = \frac{v\,dy}{dx}$, avec la valeur de $\frac{dy}{dx}$ réſuſultante de l'équation donnée de la Courbe requiſe, auroient auſſi donné d'autres valeurs de z; & qu'ainſi la viteſſe v pouvant (*art.* 1.) en avoir de différentes à l'infini, on pourra auſſi trouver de même une infinité de viteſſes z propres chacune par ſon concours avec la viteſſe v qui l'aura ainſi déterminée, à engendrer cette même Courbe: par exemple, la même hyperbole, ou la même Parabole

que ci-dessus ; & ainsi de toute autre Courbe à l'infini.

XV. Non seulement on peut ainsi trouver une infinité de vitesses collaterales propres, deux à deux, à décrire par leur concours une Courbe donnée quelconque ; mais aussi parmi ce nombre infini de vitesses suivant les coordonnées de la Courbe, on peut toûjours en déterminer deux, qui ensemble seront propres à décrire ainsi cette Courbe avec telle vitesse qu'on voudra, c'est-à-dire, à donner au corps *décrivant* telle vitesse qu'on voudra le long de cette même Courbe : voici comment.

1°. Soit c la vitesse requise le long de la Courbe donnée AEK, ou de son élément Ee, lequel soit appellé ds. Il est manifeste que cette vitesse (c) suivant la diagonale $Ee\,(ds)$ du petit parallelogramme ML, sera aux vitesses (v), (z), suivant les côtés $EM\,(dx)$. $EL\,(dy)$, de ce parallelogramme, c'est-à-dire, suivant les coordonnées $AF\,(x)$, $FE\,(y)$, de cette Courbe, comme cette diagonale est à ces mêmes côtés, ce qui donne $v = \frac{cdx}{ds}$, & $z = \frac{cdy}{ds}$.

2°. Il faut ensuite faire évanoüir les différences dx, dy, ds, par la substitution de leurs valeurs tirées de l'équation de la Courbe donnée ; & ces valeurs de v, z, ainsi délivrées de toutes différences, exprimeront des vitesses collaterales suivant EM, EL, non seulement propres à engendrer ensemble la Courbe proposée ; mais aussi à donner au corps *décrivant* la vitesse requise (c) le long de cette Courbe.

3°. Pour le voir il n'y a qu'à substituer ces valeurs de v, z, ainsi délivrées de toutes différences, dans l'équation générale $vdy = zdx$ de l'art. 12. Et l'on en verra non seulement naître la Courbe requise ; mais aussi, en faisant comme un des côtés $EM\,(dx)$ ou $EL\,(dy)$ du parallelogramme infiniment petit ML, est à la diagonale $Ee\,(ds)$ de ce parallelogramme, ainsi celle des vitesses délivrée de différences, qu'on vient de trouver (*n.* 2.) suivant ce petit côté EM ou EL, est à la vitesse le long de l'élément Ee de la Courbe : cette derniere vitesse délivrée de différences

par le moïen de l'équation donnée de cette Courbe requise, se trouvera être la même (c) avec laquelle on vouloit que cette Courbe fût décrite.

Exemple. Soit la Courbe *AEK* proposée une Parabole qui doit être décrite avec une vitesse quelconque appellée c, constante ou variable à discrétion, il n'importe. Soit $y = \sqrt{x}$ l'équation de cette Parabole : prenant les différences, on aura $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, & $ds \left(\sqrt{dx^2 + dy^2}\right) = \sqrt{dx^2 + \frac{dx^2}{4x}} = \frac{dx\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}$. Donc en substituant ces valeurs de dy, ds, dans les équations $v = \frac{c\,dx}{ds}$, $z = \frac{c\,dy}{ds}$, du nomb. 1. l'on aura $v = \frac{2c\sqrt{x}}{\sqrt{4x+1}}$, $z = \frac{c}{\sqrt{4x+1}}$, pour les vitesses collaterales propres à décrire par leur concours la Parabole requise avec la vitesse (c) qu'on demande suivant cette Courbe.

Pour le voir il n'y a qu'à substituer suivant le nomb. 3. ces valeurs de v, z, dans la Regle generale $v\,dy = z\,dx$ de l'art. 12. Et l'on aura $\frac{2c\,dy\sqrt{x}}{\sqrt{4x+1}} = \frac{c\,dx}{\sqrt{4x+1}}$, c'est-à-dire $2dy\sqrt{x} = dx$, ou $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, dont l'intégrale est $y = \sqrt{x}$ qui est le lieu de la Parabole requise ; D'où l'on voit que les deux vitesses collaterales qu'on vient de trouver, sont propres à la décrire par leur concours.

Pour voir de même que la vitesse qui en résultera suivant cette Courbe au corps *décrivant*, sera aussi la vitesse requise (c), il n'y a qu'à faire comme un des côtés, par exemple EM (dx), est à la diagonale Ee (ds) du petit parallelogramme ML, ainsi la vitesse $\left(\frac{2c\sqrt{x}}{\sqrt{4x+1}}\right)$ trouvée suivant ce petit côté EM, est à la vitesse suivant cette diagonale Ee ; car ayant par-là $\frac{2c\,ds\sqrt{x}}{dx\sqrt{4x+1}}$ pour la vitesse suivant cette même diagonale, la substitution de la valeur de ds trouvée cy-dessus $= \frac{dx\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}$, donnera c pour la vitesse suivant cet élément Ee de la Parabole requise.

Donc

Donc les viteſſes collaterales $\frac{2c\sqrt{x}}{\sqrt{4x+1}}$ (v), $\frac{c}{\sqrt{4x+1}}$ (z) qu'on vient de trouver, ſeront non ſeulement propres à décrire par leur concours la Parabole propoſée ; mais auſſi à la décrire avec la viteſſe requiſe (c) ſuivant cette même Courbe. Il en eſt ainſi de toute autre Courbe à l'infini.

XVI. Il eſt facile après ce qu'on vient de dire des Courbes qui ont leurs ordonnées paralleles entr'elles, d'appliquer la methode aux Courbes dont les ordonnées concourent en un point. Ainſi dans la Spirale d'Archimede, par exemple, outre les deux mouvemens du concours deſquels cet Auteur la décrit, la methode précédente en peut encore fournir une infinité d'autres propres à décrire cette Spirale ; entre leſquels on pourra même toûjours en trouver deux propres à la décrire ainſi par leur concours avec telle viteſſe qu'on voudra ; c'eſt-à-dire, propres à donner enſemble au corps *décrivant* telle viteſſe qu'on voudra ſuivant cette Courbe. Il en eſt ainſi de toute autre Courbe à l'infini dont les ordonnées concourent en quelque point que ce ſoit.

Après cela la methode de M. de Roberval pour trouver les tangentes par le moïen des mouvemens compoſés, devient praticable en une infinité de manieres pour toûtes ſortes de Courbes ; au lieu qu'elle ne l'étoit cy-devant que pour quelques-unes, dont la génération préſentoit ſeulement pour chacune deux mouvemens compoſans. Cependant comme (*art.* 2. & 12.) ces mouvemens ou viteſſes compoſantes v, z, de quelque varieté de valeurs qu'elles ſe puiſſent trouver, doivent toûjours être entr'elles comme les élémens dx, dy, des coordonnées des Courbes qui réſultent de leur concours, & que pour avoir chacune de ces viteſſes, l'autre étant donnée, il faut trouver le raport de ces élémens entr'eux, lequel raport donneroit, lui ſeul, les tangentes de ces Courbes ; on ne compte pas ici pour beaucoup le ſecours que la methode précédente de M. de Roberval pourroit tirer de là détermination de ces viteſſes, quelque grand qu'il fût par raport

à elle. Ce n'a point été auſſi dans cette vûë qu'on a entrepris d'en parler ici ; mais ſeulement pour diſcerner ce qu'il en doit réſulter le long des Courbes décrites par leur concours, d'avec ce qu'une ſeule des forces productrices de ces viteſſes, par exemple la peſanteur du corps *décrivant*, lui en donneroit en tombant le long de ces Courbes, ſoûtenu par leur relief ou par des ſuſpenſions équivalentes, ſelon les différents points où commenceroit ſa chute: Diſcernement abſolument neceſſaire pour ne ſe pas méprendre dans la méchanique des mouvemens en lignes Courbes. On donnera encore d'autres uſages de tout ceci dans la ſuite.

CONSIDERATIONS SUR LA THEORIE DES PLANETES.

PAR M. MARALDI.

1704. 26 Novemb.

LA Theorie des Planetes eſt une recherche qui a de grandes difficultez ; à cauſe des differens mouvemens dont il faut chercher les regles, & de pluſieurs élémens qui concourent à la détermination de ces mouvemens. La juſteſſe de cette détermination dépend en partie d'un grand nombre d'obſervations faites avec préciſion ; mais quoique depuis 30 ou 40 ans ces obſervations ayent été faites avec beaucoup de ſubtilité, on n'oſeroit pas ſe promettre qu'elles euſſent toute la preciſion qui eſt neceſſaire, & qu'elles fuſſent ſuffiſantes pour trouver pendant pluſieurs années le mouvement des Planetes entre les termes que l'on ſuppoſe communément. Car outre que nos inſtrumens, quelques grands qu'ils puiſſent être, ont une trop petite proportion à la grandeur des orbes que les Planetes décrivent, dans les obſervations on eſt ſou-

vent en doute pour la détermination des petites parties qui peuvent échaper facilement aux Observateurs les plus exacts ; & avant de mettre en usage ces observations, elles ont besoin de quelques corrections & réductions qui peuvent causer des variations dans la situation de la Planete.

Quand même les observations ne seroient point sujettes à ces variations, & qu'elles auroient la justesse que l'on peut souhaiter, on n'est pas assuré de rencontrer juste dans l'usage que l'on en fait pour trouver les differens élemens qui sont necessaires dans la Theorie des Planetes, & qu'il faut distinguer les uns des autres.

L'Apogée & le Perigée, d'où commencent & finissent les premieres inégalitez des Planetes, ne sont pas des points visibles, mais des termes qu'il faut trouver par la comparaison de plusieurs observations faites en certains lieux de l'orbe de la Planete, & en certaines configurations avec le Soleil, qui sont des circonstances qui se rencontrent rarement ensemble de la même maniere. Une petite erreur que l'on peut faire dans les observations, en produit une beaucoup plus grande dans la détermination de l'Apogée ; c'est-pourquoi il est fort difficile de le déterminer au juste. On peut connoître ces difficultez par la differente détermination que plusieurs Astronomes en ont faite depuis un siecle, quoiqu'ils se soient fondez principalement sur les observations de Tycho. Or une erreur qu'il est aisé de faire dans la situation de ces points, en produit d'autrés dans toutes les parties de l'orbe de la Planete ; car si on fait l'Apogée plus avancé dans le Zodiaque qu'il ne doit être, on fera dans quelque degré l'équation additive, lorsqu'il la faudroit faire substrative, & reciproquement ; il en resultera aussi dans les trois premiers signes une équation substrative plus petite que la veritable, & plus grande dans les trois signes suivans jusqu'au Perigée. Il arrive la même chose de l'équation additive dans les six autres signes du Zodiaque ; car dans les trois prémiers signes depuis le Perigée, elle sera moindre que la verita-

ble, & plus grande dans les trois derniers.

Il n'y a pas moins de difficulté dans la recherche de l'excentricité des Planetes, on la peut trouver par des methodes qu'on a inventées à cette fin, & qui ont toutes leurs difficultez, parce qu'elles sont naturellement attachées à cette recherche. On la peut aussi trouver en observant les Planetes dans l'Apogée ou dans le Perigée, & dans les moïennes distances; & comparant le vrai mouvement trouvé entre ces deux termes avec le moïen qui appartient au tems échû entre ces observations, on trouve la plus grande équation qui détermine l'excentricité des Planetes. Mais outre que dans cette methode on y suppose le lieu de l'Apogée & du Perigée bien déterminé, il est extraordinairement rare de pouvoir faire ces observations dans des circonstances aussi favorables, faute desquelles on est obligé d'emploïer les observations les plus proches de ces termes, qu'il faut réduire aux mêmes termes, ce qui ne se peut faire qu'à peu près & à l'aide des hypotheses. Or l'erreur qu'il est difficile d'éviter en déterminant l'excentricité de la Planete se répand, quoiqu'en moindre quantité dans toutes les parties de son orbe; car si on prend l'excentricité plus petite que la veritable, l'équation de la Planete dans tous les degrez de son anomalie sera aussi plus petite : le contraire arrivera si on prend l'excentricité trop grande.

Supposant la plus grande équation trouvée avec toute la précision que l'on peut souhaiter, il reste une autre difficulté dans la maniere de la distribuer dans tous les degrez de l'orbe de la Planete. Comme on donne dans les Tables Astronomiques cette équation calculée pour chaque degré d'Anomalie, & que pour la trouver par des observations immediates, il faudroit un grand nombre d'observations exactes qu'il est difficile d'avoir jusqu'à present dans la plûpart des Planetes, les Astronomes pour suppléer à ce défaut ont inventé diverses methodes par le moïen desquelles l'excentricité étant donnée, on calcule pour tous les degrez d'anomalie l'équation qui lui con-

vient. Mais cette équation se distribuë différemment selon les differentes hypotheses que l'on emploïe, & on est en doute quelle est la plus conforme à la nature, étant fort difficile de le verifier par les observations.

On peut aussi se tromper dans le choix que l'on fait de l'Epoque; car quoiqu'on la tire d'un grand nombre d'observations faites dans les occasions les plus favorables, & qu'on y évite les erreurs ausquelles ces observations peuvent être sujetes, on ne peut la déterminer sans supposer tous ces élemens que nous avons indiquez, & que nous avons dit être très-difficile à déterminer avec précision. La même erreur que l'on fait dans le choix de l'Epoque se répand aussi dans tous les autres calculs.

La recherche des nœuds des Planetes, & celle de l'inclinaison de leur orbite à l'égard de l'Ecliptique, n'est pas moins difficile que les autres elemens. Pour déterminer les nœuds des Planetes qui ne sont point des termes visibles, la meilleure maniere est d'observer pendant plusieurs jours la situation de la Planete, lorsque sa latitude change d'espece. Car si l'on ne peut pas observer immediatement le temps que la Planete n'a point de latitude, on le trouvera par la comparaison des observations précédentes & suivantes, ce qui donnera l'arrivée de l'étoile au nœud : mais comme à une petite variation de latitude, il en répond une beaucoup plus grande en longitude à cause du peu d'inclinaison des orbites des Planetes, il ne faut pas prétendre de trouver ce nœud avec beaucoup de précision, principalement dans les Planetes qui ont peu d'inclinaison. Le lieu du nœud ainsi trouvé, n'est son lieu veritable, que lorsque ce lieu vû de la terre concourt avec le lieu du Soleil, ou à son opposite. Excepté ces deux cas qui sont extraordinairement rares, il faut réduire par le moïen des hypotheses corrigées par les observations, la situation de ce nœud vû de la terre, à celle qu'il auroit étant vû du Soleil, pour avoir sa veritable situation.

L'inclinaison de l'orbite des Planetes à l'Ecliptique, se

peut déterminer en observant la latitude de la Planete lorsqu'elle est en quadrature avec le Soleil, & que le Soleil est en même tems dans un des nœuds de la Planete, qui sont des circonstances rares. On la peut aussi trouver par le moïen de la plus grande latitude de la Planete vûë de la terre qu'on ne peut pas souvent observer, mais seulement en quelque rencontre. La plus grande latitude étant trouvée, il faut la reduire par le rapport des distances de la Planete au Soleil & du Soleil à la terre, de l'apparence qu'elle fait à la terre à celle qu'elle feroit au Soleil. Cette latitude ainsi reduite & comparée à sa distance au nœud, donnera l'inclinaison de l'orbite de la Planete, qui est celle qu'on met dans les Tables pour en calculer la latitude.

La proportion de l'orbite du Soleil à celle des Planetes qui sert à connoître leur seconde inégalité, se peut chercher en deux manieres. La premiere par les observations jointes aux hypotheses. Mais ces proportions seront differentes suivant l'espece de ligne que l'on supposera que les Planetes décrivent, & selon la differente excentricité qu'on aura établie. La seconde maniere seroit en trouvant la seconde inégalité par les observations; ce qui ne se peut pratiquer que dans Jupiter, dont les Satellites peuvent servir à la connoître en certaines rencontres.

Pour les autres Planetes il faut emploïer la distance du Soleil à la terre, & le lieu de la Planete vû du Soleil qu'il faut trouver par les hypotheses, & qu'il faut comparer avec le lieu de la Planete vûë de la terre, & trouvé par les observations. Par cette methode la moïenne distance de la Planete au Soleil, que l'on tire des distances trouvées en differens endroits de l'orbe de la Planete, devroit être à peu près la même, & cependant elle se trouve souvent fort differente; ce qui fait voir les difficultez qu'il y a aussi dans cette recherche, quoiqu'elle ne soit pas des plus difficiles dans la Theorie des Planetes.

Après avoir établi le mieux qu'il est possible tous ces élemens, il reste à déterminer le moïen mouvement des Planetes, le mouvement de leur Apogée, & celui de leurs

nœuds, dont on se sert à trouver pour les siecles à venir les lieux des Planetes dans le Zodiaque.

Dans ces recherches nous ne sommes pas seulement exposez aux erreurs que nous faisons en déterminant ces élemens par trois observations, mais encore à celles qui dépendent des observations des anciens Astronomes, qui n'ayant pas les secours que nous avons presentement, ne faisoient souvent qu'à la vûë & à peu près les observations qu'il faut emploïer pour les comparer aux nôtres. Pour cette comparaison on choisit pour l'ordinaire les plus anciennes observations qu'on puisse avoir ; parce que l'erreur qui peut s'y être glissée étant partagée dans un plus grand intervalle de temps, reste beaucoup moins sensible. Mais comme plusieurs doutent de la justesse des plus anciennes observations, & que parmi celles qui ont été faites dans la suite il y en a qui paroissent plus exactes, ils ont aimé mieux se fonder sur ces observations moins anciennes, preferant cette precision à l'avantage qu'on pouroit tirer d'un plus long intervalle. Par la comparaison de differentes observations, le moïen mouvement vient un peu different, & il est difficile de déterminer lequel on doit preferer, n'étant pas possible de representer toutes les observations faites en differens temps, quoique les hypotheses qui s'éloignent le moins des observations, & qui en representent un plus grand nombre, doivent être censées les meilleures.

On ne sçauroit trouver qu'à peu près la situation de l'Apogée des Planetes par les observations anciennes, à cause que celles qui sont venuës jusqu'à nous sont en petit nombre, & qu'elles n'ont pas l'exactitude qui seroit necessaire. C'est-pourquoi le mouvement de l'Apogée qu'on tire de la situation qui resulte de ces observations, comparée à la situation où on le trouve presentement, ne peut pas être d'une grande précision, & ce mouvement se trouve different suivant les differentes observations anciennes que l'on emploïe.

Ce sont-là les difficultez generales, outre d'autres par-

ticulieres que les Aſtronomes rencontrent lorſqu'ils entreprennent de donner des regles des mouvemens des Planetes. Nous les avons expoſées afin qu'on connoiſſe que ce n'eſt pas ſans raiſon que les plus grands Aſtronomes ſe défient de leurs forces dans une ſi grande entrepriſe ; & que Kepler après avoir medité avec un grand ſuccès pendant près de trente années ſur les obſervations de Tycho, n'oſe pas ſe promettre une grande preciſion dans le raport de ſes hypotheſes avec les mouvemens celeſtes pour les ſiecles ſuivans.

Pour ſurmonter ces difficultez autant qu'il y auroit lieu de l'eſperer par des obſervations indépendemment des hypotheſes, quand le mouvement eſt plus ſimple, & n'a qu'une inégalité qui dépend de l'excentricité & de la diſtance de l'Apogée ſuivant les hypotheſes communes, il faudroit avoir un aſſez grand nombre d'obſervations pour déterminer les équations à autant de degrez d'anomalie qu'il eſt beſoin d'en mettre dans les Tables ; quand la Planete a une ſeconde inégalité qui demande la connoiſſance des differentes diſtances de la même Planete au Soleil & du Soleil à la terre, il faudroit des obſervations à toutes les variations & combinaiſons des diſtances & des configurations apparentes avec le Soleil, qui ne retournent les mêmes en quelques Planetes qu'après pluſieurs ſiecles.

Il n'y a que le Soleil dont nous puiſſions avoir ces obſervations, à cauſe que le mouvement apparent de cet aſtre eſt plus ſimple que celui des autres, & que la periode de ſon retour au même degré d'anomalie s'acheve en peu de temps. C'eſt auſſi la Planete dont on connoît mieux le mouvement ; car depuis l'an 1655 que M. Caſſini en a conſtruit des Tables ſur leſquelles divers Aſtronomes celebres ont calculé les Ephemerides, elles ſe ſont trouvées autant conformes qu'on pouvoit eſperer aux obſervations. C'eſt pourquoi dans la Theorie des autres Planetes, où il faut emploïer le mouvement du Soleil, nous n'avons crû pouvoir mieux faire que de l'emprunter de ces Tables,

qui

qui sont à l'épreuve de 50 années d'obseravtions faites avec de très-grands instrumens & fort exacts.

Dans l'impossibilité où nous sommes d'avoir pour les autres Planetes autant d'observations qu'il seroit necessaire, nous emploïerons le plus grand nombre que nous pourrons avoir de celles qui ont été faites depuis 30 ou 40 ans. La plus grande partie de ces observations a été faite par M. Cassini, en prenant au meridien la difference du passage entre ces Planetes & le Soleil, ou differentes étoiles fixes qui se rencontroient dans la même parallele, & observant leur hauteur meridienne. Une autre partie des observations a été faite hors du meridien, en observant la difference d'ascension droite & de declinaison entre la Planete & quelque étoile fixe, lorsqu'elle se recontroit proche du même parallele, soit que ces étoiles fussent proches l'une de l'autre en ascension droite, soit qu'elles en fussent fort éloignées.

Cette maniere de déterminer la situation des Planetes s'est pratiquée par le moïen des fils qui se croisent à angles de 45 degrez au foïer de la Lunette, tant appliquée au quart de cercle, que d'une Lunette posée sur une machine, appellée parallatique par M. Cassini, par le moïen de laquelle on suit facilement le cours de l'étoile à l'Occident. On laisse ces Lunettes dans une situation immobile, & on compte l'heure, la minute & la seconde que l'étoile la plus Occidentale passe par les trois fils. On fait la même chose à l'égard de l'étoile plus Orientale ; ce qui d'étermine la difference d'ascension droite & la declinaison d'une étoile à l'égard de l'autre ; & la situation d'une de ces étoiles étant connuë par rapport aux cercles de la sphere, on connoîtra la situation de l'autre. Nous n'entrerons point dans le détail de cette methode, ni la maniere aisée d'abreger ces calculs en se servant de la machine parallatique, parce qu'elle a été expliquée à l'Academie par M. Cassini à l'occasion de diverses conjonctions des Planetes, des observations des Taches du Soleil & de la Lune, & communiquées à presque tous les Astronomes

d'Europe depuis fort long-temps qu'il a trouvé ces methodes & qu'il les pratique. Il suffira de remarquer que par ces methodes on peut trouver l'ascension droite & la declinaison de la Planete presque aussi facilement & aussi exactement qu'on pourroit faire par des observations faites aumeridien, pourvû que la situation des étoiles fixes, ausquelles on compare la Planete, soit une fois bien determinée; parce que le temps qui sert à déterminer la difference de déclinaison, est aussi sensible que le peuvent être les divisions des instrumens dont on se sert pour connoître la declinaison.

On a encore cet avantage par ces methodes, que lorsqu'il y a des observations importantes, qui souvent ne se peuvent faire au meridien, à cause de quelques nuages qui surviennent dans le temps que ces étoiles passent au meridien, on le peut faire à toute autre situation de l'astre sur l'horizon & à des heures commodes, & qu'on les peut refaire plusieurs fois lorsqu'on n'est pas content des premieres; ce qui ne se peut pratiquer à l'égard des observations qu'on fait au meridien. Et parce que nous emploïons un grand nombre d'observations faites par ces methodes, & que la détermination exacte des Planetes dépend de celle des étoiles fixes, ausquelles elles ont été comparées, pour une plus grande précision nous avons déterminé l'ascension droite & la déclinaison de toutes ces étoiles par des observations faites au meridien le plus exactement qu'il a été possible.

Les hypotheses du mouvement de Saturne.

Pour établir les hypotheses de Saturne, nous avons d'abord calculé un grand nombre d'observations faites dans l'opposition de cette Planete avec le Soleil en diverses parties de l'orbe de la Planete, & nous avons comparé ces observations aux Tables de Kepler. Cette comparaison nous a fait connoître qu'aux années 1672 & 1673 ces Tables donnoient le lieu de Sature plus avancé dans le Zo-

diaque que les obſervations de 20 à 21 minutes. Qu'aux années 1686 & 1687, entre les obſervations & les Tables, il n'y avoit que 10 à 12 minutes, dont les Tables étoient plus avancées ; & qu'enfin aux années 1700, 1701 & 1702 cette difference étoit environ de 21 minutes comme trente années auparavant.

Nous avons choiſi en premier lieu ces obſervations pour en faire la comparaiſon avec les Tables ; parce que ſuivant toutes les hypotheſes cette Planete ſe trouvoit alors près des moïennes diſtances, où l'erreur qui pourroit être dans le calcul (quand même la ſituation de l'Apogée ne ſeroit pas bien déterminée dans ces Tables) ne peut faire qu'une petite difference dans la premiere équation. C'eſt pourquoi cette comparaiſon eſt très-propre pour établir la plus grand équation de la Planete, & l'Epoque de ſon mouvement.

Pour connoître l'erreur qui vient de l'Epoque, & celle qui eſt cauſée par la plus grande équation, & diſtinguer l'une de l'autre, nous avons conſideré que la difference entre les obſervations & les Tables ſeroit toûjours la même dans les differentes parties de l'anomalie, ſi elle venoit toute de l'erreur qu'il y auroit dans l'Epoque. Que ſi elle étoit cauſée toute par l'erreur qu'il y a dans la plus grande équation, elle ſeroit un excez dans un demi-cercle de l'anomalie, & en défaut dans les ſix autres ſignes. Mais parce que les Tables donnent toûjours le lieu de Saturne plus avancé que les obſervations, & que dans la difference qu'il y a, on trouve une variation de 9 à 10 minutes, l'erreur doit être attribuée partie à l'Epoque, partie à la plus grande équation. Par les obſervations des années 1672 & 1673, & par celles des années 1700, 1701 & 1703, faites toutes par des moïennes diſtances où l'équation eſt ſouſtrative, la difference eſt plus grande d'environ 10 minutes que dans les moïennes diſtances où l'équation eſt additive, comme il paroît par les obſervations des années 1686 & 1687. Cela nous a fait connoître qu'il faut augmenter de la moitié de cette difference, qui eſt de 5

minutes, la plus grande équation de Saturne déterminée par Kepler qui la fait de 6° 31′ 30″, & la faire de 6° 36′ 30″, ce qui est à une minute près de celle qui a été determinée par M. Boüillaud. Outre cette correction il en faut faire une seconde à l'Epoque, en ôtant 16 minutes au moïen mouvement de 1607 que Kepler fait de 6 28° 3′ 52″, & la faire de 6 27° 47′ 52″. Nous examinerons dans la suite s'il faut plutôt faire cette correction au moïen mouvement échû depuis les observation de Tycho jusqu'aux nôtres: mais en attendant nous la faisons à l'Epoque, étant indifferent pour les observations que nous emploïons dans cet examen sur lequel de ces deux élemens tombe cette correction.

L'Epoque & la premiere inégalité ainsi établie, nous avons examiné d'autres observations faites dans les autres parties de l'orbe de la Planete, & principalement celles qui ont été faites proche de l'Apogée & du Perigée pour déterminer leur situation. Nous avons une observation celebre de la conjonction précise de Saturne avec une étoile fixe proche du Perigée de Saturne, que M. Kirchius fit par le moïen d'une Lunette de 10 pieds, & qui arriva l'an 1679 le 17 de Janvier à 5 heures du matin. L'étoile qui fut cachée par Saturne est la moïenne de la corne meridionale du Taureau, & qui suivant nos observations reduites en ce temps-là, se trouvoit en 7° 59′ des Gemaux avec une latitude australe de deux degrez & 20 minutes, ce qui est aussi la longitude & la latitude qu'avoit alors Saturne.

Pour representer cette observation, en supposant les corrections déja faites, & en emploïant le mouvement du Soleil des Tables de M. Cassini, nous avons trouvé qu'il faut avancer de 52 minutes le lieu de l'Aphelie de Saturne déterminé par Kepler, & l'établir en 28° 28′ du Sagitaire, comme le donnent les Tables de M. Boüillaud. Cette détermination est aussi confirmée par les observations que nous avons faites proche de l'Aphelie de Saturne l'an 1694, & quoique parmi ces observations il y en ait de

celles qui demandent le lieu de l'Aphelie avancé d'environ un demi-degré plus que ne demanderoit l'observation de l'année 1679, ayant eu égard au mouvement fait depuis ce temps-là, nous nous sommes arrêtez à la détermination qui résultoit d'un plus grand nombre d'observations, la difference qui s'y trouve pouvant être causée de quelque petite erreur à laquelle on est exposé dans la détermination des lieux des Planetes.

Ayant ainsi déterminé l'Epoque, la plus grande équation & le lieu de l'Aphelie, nous avons calculé plusieurs oppositions de Saturne avec le Soleil observées en differentes parties de l'orbe de la Planete; & en emploïant l'équation calculée dans la forme elliptique, nous representons par ces hypotheses 27 oppositions observées depuis l'an 1672, parmi lesquelles il n'y a que celles des années 1698 & 1699 qui s'éloignent de 4 minutes de l'observation, la difference des autres étant plus petite ou nulle, ce qui confirme ces trois élemens établis auparavant.

Après ces comparaisons nous avons cherché la proportion de la distance de Saturne au Soleil dans les parties de l'orbe annuel, laquelle est un des élemens necessaires pour calculer la seconde équation qui convient à la Planete hors de ses oppositions & conjonctions avec le Soleil. Nous l'avons cherchée en déterminant par les observations le lieu veritable de Saturne dans ses quadratures avec le Soleil, & en le comparant à la situation de Saturne vûë du Soleil, qu'on calcule par les hypotheses comptées sur les observations de l'opposition la plus prochaine. Par cette methode & par un grand nombre d'observations faites en differens endroits de l'anomalie de Saturne dans ses conjonctures les plus favorables, nous n'avons pas pas trouvé cette moïenne distance précisément la même: mais ayant pris un milieu entre la plus grande & la plus petite, nous l'avons déterminée 955000 parties, dont la moïenne distance du Soleil à la terre est 100000.

Nous avons cherché le nœud de Saturne par des observations faites au meridien lorsque cette Planete n'avoit

point de latitude, ce qui arriva au mois de May de l'année 1696, cette Planete étant en 26° 36′ de Capricone, qui étoit le lieu du nœud vû de la terre : mais l'ayant reduit au Soleil à l'aide des hypotheſes, on trouve le lieu veritable du nœud auſtral de Saturne en 22° 10′ du Crapricorne. Il faut remarquer que comme la variation de la latitude de Saturne n'eſt pas ſenſible en 15 jours, on peut ſe tromper du moins d'un demi-degré dans cette détermination. D'où vient que par les obſervations faites la même année dans l'oppoſition avec le Soleil, nous trouvons le lieu du nœud moins avancé dans le Zodiaque que par les obſervations précedentes d'environ 25 minutes.

Les occaſions les plus favorables qu'il y ait eu depuis long-temps de trouver l'inclination de l'orbite de Saturne à l'Ecliptique, ſont celles qui ſe ſont preſentées les années 1688 & 1703. Par les obſervations de l'année 1688 faites fort près des limites des plus grandes latitudes de Saturne, & dans l'oppoſition de cette Planete avec le Soleil qui arriva en 21° 46′ de Libra, on trouve la latitude Septentrionale de Saturne de 2° 48′ 0″. Par le moïen de cette latitude & des rapports des diſtances du Soleil à Saturne & du Soleil à la terre, on trouve la parallaxe de latitude de 17′ 15″, qui étant ôtée de la latitude trouvée, donne la veritable inclinaiſon de Saturne à l'Ecliptique de 2° 30′ 45″. Par les obſervations de l'année 1703 on trouve la latitude meridionale de Saturne de 2° 48′ 50″, qui étant réduite comme la précedente, donne la même inclinaiſon de 2° 31′ 0″, qui ne differe de la précedente que de 15 ſecondes ; & ayant pris un milieu entre les deux, on établira cette inclinaiſon de 2° 30′ 50″, qui eſt comme moïenne entre celle qui a été déterminée par Kepler & par M. Boüillaud.

Nous avons dit que pour bien repreſenter les obſervations de Saturne faites depuis 30 ans, il falloit ôter 16 minutes à l'Epoque du moïen mouvement établie par Kepler. On peut auſſi repreſenter ces obſervations en corrigeant le moïen mouvement qui convient au temps échû

depuis les observations de Tycho jusqu'aux nôtres, & il est indifferent laquelle de ces deux corrections on emploïe pour representer nos observations. Il n'en est pas de même à l'egard des observations de Tycho; car si on fait cette correction à l'Epoque, les Tables ne peuvent representer ces mêmes observations de Tycho qu'environ à un tiers ou un quart de degré près; au lieu que si on distribuë cette correction au moïen mouvement, on pourra mieux representer les observations de Tycho avec les nôtres : & c'est le parti que nous avons crû d'abord qu'il falloit prendre. Mais en diminuant dans la même proportion le moïen mouvement de près de 20 siecles pour calculer la plus ancienne observation que nous aïons de cette Planete, qui est celle qui a été faite par les Assiriens 226 ans avant l'Epoque de J.C. le calcul fondé sur cette hypothese s'éloigne de plusieurs degrez de l'observation. Cette difference nous a paru trop grande pour pouvoir être tolerée dans une observation semblable de la conjonction de Saturne avec une étoile fixe, & qui suivant le témoignagne de Ptolemée est exacte, & sur laquelle il ne faut pas avoir aucun doute. C'est pourquoy nous n'avons pas trouvé à propos de faire cette correction au moïen mouvement; il reste donc toûjours les mêmes difficultez de representer les observations de Tycho avec les nôtres.

Pour les résoudre nous avons tenté diverses voies. Nous avons cherché en premier lieu si les oppositions de Saturne calculées sur les observations de Tycho étoient bien déterminées, & s'il ne s'étoit pas glissé quelques erreurs, auquelles on est exposé dans les longs calculs qu'il faut faire pour les trouver. Nous avons donc fait tout de nouveau les calculs de ces oppositions, dans lesquels nous avons emploïé les distances des Planetes avec les étoiles fixes telles qu'elles ont été observées par Tycho. Pour les distances des étoiles fixes entr'elles, nous les avons supposées telles qu'elles résultent de nos observations, aussibien que la longitude & la latitude de ces étoiles, & ré-

duite au temps des observations de Tycho. Par ces nou veaux calculs on a trouvé à la verité dans plusieurs oppositions quelques minutes de difference ; mais comme elle est quelquefois favorable, quelquefois contraire à la correction de l'Epoque, nous n'avons pû tirer de ce travail beaucoup d'éclaircissement.

Nous avons ensuite cherché d'accorder ces observations de Tycho avec les nôtres, en supposant dans l'Apogée un mouvement plus vîte que par les Tables ordinaires. Par ce moïen on representeroit un bon nombre des observations de Tycho ; mais il n'y auroit pas moïen d'accorder les observations faites près des moïennes distances, outre d'autres inconveniens qui en résultent dans les observations anciennes.

Après ces recherches nous nous sommes enfin déterminez à chercher le moïen mouvement par la comparaison des observations éloignées entr'elles du plus grand intervalle de temps qu'il est possible, parce que l'erreur qu'on aurroit pû faire dans ces observations, partagé dans un plus grand nombre d'années, reste moins sensible en chacune ; au lieu que si on vouloit conclure le moïen mouvement de 20 siecles par les observations éloignées seulement de cent ans, comme sont celles de Tycho à l'égard des nôtres, l'erreur que l'on peut faire dans les observations qu'on compare se multiplie dans la raison du petit intervalle au grand.

D'ailleurs nous avons reconnu, autant qu'on le peut faire par les observations de 32 années, que le moïen mouvement de Saturne dû à cet intervalle ne demande pas la correction proportionnée à celle qu'il faudroit faire au moïen mouvement pour representer également les observations de Tycho & les nôtres. Ce qui est aussi confirmé par plusieurs observations faites depuis 50 ans par le P. Riccioli & par Muti, qui s'accordent assez bien au moïen mouvement que nous avons tiré de la comparaison de nos observations avec celle qui fut faite 229 ans avant J. C. par laquelle comparaison le moïen mouvement de Saturne

turne pour cent ans resulte de 4 23°. 26' 24".

Pour les differences qui restent entre les hypotheses que nous établissons, & les observations de Tycho, de Longomontanus, de Kepler & d'autres Astronomes plus anciens, il y en a qui montent à un tiers de degré, ceux qui cherchent à accorder entierement les hypotheses aux observations, pourroient examiner si ces differences ne viennent point de quelques-unes de ces équations seculaires, dont Kepler nous avoit promis un Traité, & qu'il dit qu'il faut faire aux Planetes.

A l'égard du mouvement de l'Apogée nous n'en avons point de détermination exacte faite par les anciens, & le moïen qui nous reste pour le trouver, est de representer le mieux qu'il est possible les observations anciennes faites en divers temps, comme est celle qui fut faite 229 ans avant J. C. Par la comparaison du lieu de l'Apogée qui résulte de cette observation avec la situation où nous le trouvons presentement par nos observations, le mouvement de l'Apogée se trouve fort peu different de celui qui a été déterminé par M. Bouillaud; c'est pourquoi on peut s'en servir tel qu'il est dans les Tables.

Nous avons cherché le mouvement des nœuds par la comparaison de nos observations avec celles que Tycho fit l'an 1592, lorsque Saturne étant en 23° $\frac{1}{4}$ de Cancer, avoit une latitude Septentrionale de 8 minutes. Par cette observation, toutes reductions étant faites, nous trouvons le nœud Septentrional de Saturne en 21 degrez & de Cancer. Nous l'avons trouvé l'an 1696 par les observations faites la même année en 22° 10' du même signe; donc en 104 années il auroit eu un mouvement de 1° 8' selon la suite des signes. Mais ces observations sont trop peu éloignées l'une de l'autre pour pouvoir conclure avec quelque exactitude le mouvement des nœuds par un espace plus grand que cent ans.

Ptolemée observa de son temps que la plus grande latitude de Saturne étoit au commencement de Libra, & par les observations recentes on trouve cette plus grande

latitude en 22 du même signe; donc en 1550 ans environ les limites de la plus grande latitude de Saturne, & par consequent ses nœuds se feroient avancez de 22 degrez selon la suite des signes; ce qui seroit en raison d'environ 1° 28′ en cent ans.

OBSERVATION

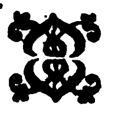
D'une petite Tache dans le Soleil en Novembre 1704. à l'Observatoire.

PAR M. DE LA HIRE.

1704. 29 Novembre. LE 25 à midy j'observay une petite Tache sur le disque du Soleil. Elle passa par le miridien après le premier bord du Soleil 2′ 2″, ou 18″ avant le dernier bord du Soleil; car tout le diametre du Soleil passoit en 2′ 20″.

La hauteur meridienne apparente de cette Tache étoit de 20° 14′ 10″, & celle du bord superieur du Soleil étoit de 20° 37′ 10″; donc 23′ de difference.

Je n'ay pû voir le Soleil qu'aujourd'huy 29 au matin au travers de quelques petits nuage; mais avec une Lunette de 6 pieds je n'ay pû rien remarquer de la Tache qui auroit dû paroître plus grande que le 25, puisqu'elle auroit dû être vers le milieu du Soleil; ce qui me fait croire qu'elle s'est dissipée.



SUR LA PLUS GRANDE PERFECTION POSSIBLE DES MACHINES.

Etant donné une Machine qui ait pour puissance motrice quelque corps fluide que ce soit, comme par exemple l'eau, le vent, la flame, &c. & qui doive servir à élever des poids solides ou liquides, comme des pierres, de la mine, des eaux, &c. on se propose de trouver la charge qu'il faut donner à cette Machine, & la proposition que ses differentes parties doivent avoir, afin qu'elle produise le plus grand effet possible, c'est-à-dire qu'elle éleve une plus grande quantité de poids dans un même temps qu'avec toute autre charge, & toute autre proportion possible ; & dans cet état de déterminer la vitesse de chacune de ces parties, & la quantité de ce plus grand effet. De plus une Machine étant construite au hazard, & étant müë comme la précédente, on détermine la vitesse de ses parties, l'effet qu'elle produira, & en même temps son degré de perfection.

PAR M. PARENT.

ART. I. DEpuis le temps qu'on s'est avisé demploïer des Machines pour élever des poids, toute la perfection que les plus habiles Machinistes ont pû atteindre, s'est bornée à les mettre d'abord en équilibre avec la charge qu'il s'agissoit de faire monter, & à diminuer ensuite au hazard cette charge ; ou à augmenter le raïon de quelqu'une des roues, ou accourcir celui de quelqu'une des lanternes, ou à faire enfin quelque chose d'équivalent, afin que la puissance motrice l'emportant sur sa charge, elle mît la Machine en mouvement ; encore le 1704. 29. Novembre.

nombre de ces sçavants Machinistes est-il très-petit. A l'égard des autres qui ne sont qu'en trop grand nombre pour le malheur du public, on peut dire qu'ils font tout au hazard, & que les plus habiles d'entr'eux ne réüssissent dans leurs entreprises, que parce qu'ils emploïent souvent autant de force pour une seule Machine, qu'il en faudroit pour en mouvoir plusieurs semblables. C'est de là que sont venuës tant de réformations de Machines qu'on voit tous les jours, soit par les Auteurs mêmes de ces Machines, soit par d'autres qui le plus souvent n'ont pas plus de connoissance qu'eux ; ce qui ne peut manquer de causer un grand préjudice aux proprietaires, aux Machinistes mêmes, & à ceux qui s'associent avec eux.

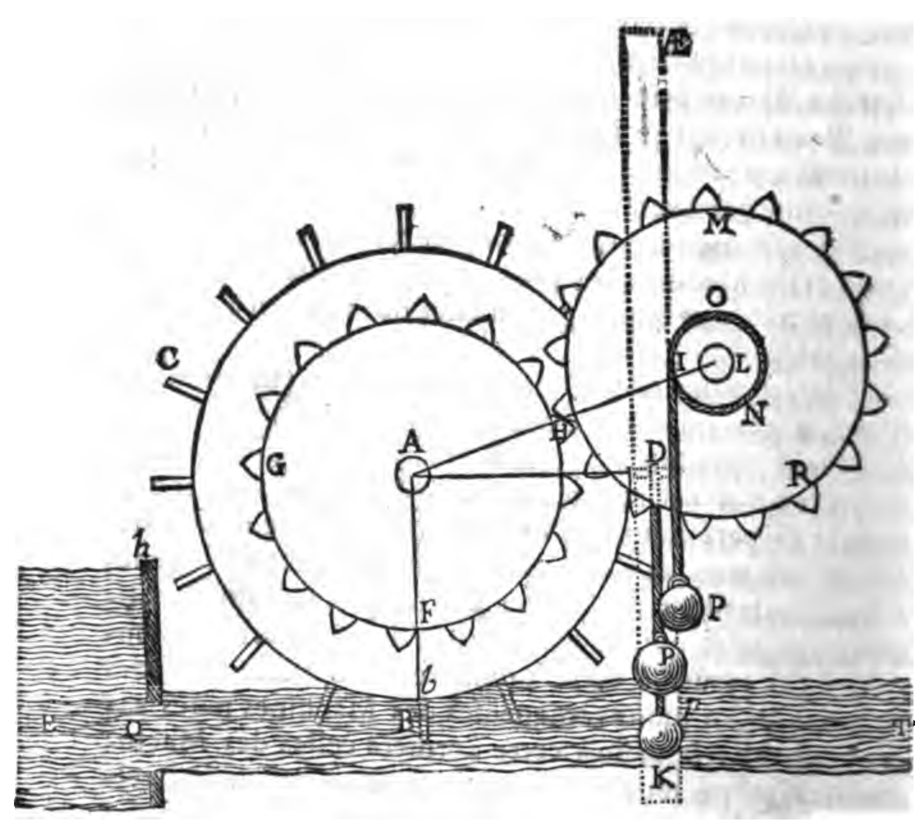
Mais quoiqu'on soit sûr du mouvement d'une Machine, lorsqu'après l'avoir mise en équilibre, on a diminué le poids dont elle est chargée de quelque-chose (en faisant abstraction des frotemens) ou changé quelques-uns de ses leviers, il s'en faut cependant beaucoup encore qu'elle ne soit dans son état de perfection ; car à mesure que l'on diminuë sa charge, on augmente à la verité sa vîtesse, ce qui pourroit augmenter l'effet ; mais cela même pourroit aussi fort bien le diminuer. De même en augmentant le raïon d'une des rouës, ou diminuant celui d'une des lanternes ou pignons, on peut augmenter à la verité la charge ; mais aussi on diminuë d'autant sa vîtesse, ce qui peut aussi tôt diminuer l'effet que l'augmenter : de sorte qu'il est très-important de trouver la proportion qui donne le plus grand effet.

Ce fut en visitant & en calculant les differentes Machines hydrauliques de Paris & des environs, que j'eus occasion de faire la premiere fois ces sortes de reflexions ; mais quoique je sçusse donner l'équilibre à une machine, j'étois encore bien éloigné de sçavoir lui donner les proportions les plus parfaites. Il falloit pour cela des principes pour le calcul des Machines dans l'état du mouvement, lorsqu'elles sont mûës par toutes sortes de puissances ; & nous n'en avions encore que pour les calculer dans l'état

du repos, ou tout au plus dans l'état du mouvement lorsqu'elles sont mûës par des puissances animées, ce qui n'est qu'un cas très-particulier. M'étant donc appliqué à la recherche de ces principes, je les expliquai en 1700 dans mes Elemens, où je déterminai les vîtesses d'un corps mû par un fluide, comme l'eau, le vent, &c. dans un autre fluide, comme par exemple dans une riviere, dans un étang, &c. & j'allai même jusqu'à indiquer les voies pour donner à une telle Machine les proportions necessaires, afin de lui faire produire le plus grand effet dont la force motrice est capable.

Enfin après un travail de quatre années (interrompu à la verité par quantité d'autres occupations) je suis heureusement parvenu à applanir toutes les difficultez qui m'avoient d'abord rebuté, & à les réduire à la portée de toutes les personnes qui ont les premieres teintures des Mathematiques; & j'ai trouvé des regles qui toutes generales qu'elles sont ne laissent pas de pouvoir être pratiquées par ceux qui ne sçavent que l'Arithmetique commune. J'ai ajoûté à cette premiere découverte celle des proportions les plus avantageuses des Machines mûës par des animaux; & enfin à cette derniere celles des Machines quelconques mûës par des fluides, & au moïen desquelles il s'agit d'élever des poids solides ou liquides, comme des marbres, de l'eau, &c. Ces trois découvertes composent trois Memoires differens: voici la derniere.

ART. II. Mais auparavant de venir au fait, j'ai jugé qu'il seroit à propos d'expliquer quelques termes dont je me sers, & les principes que je suppose. 1°. A l'égard des termes, si *EB* est un fluide quelconque, comme l'eau, le vent, &c. qui vienne dans le sens de la droite *EB* choquer les aîles ou paletes *B*, *D* du moulin *CBD* dont *A* est le centre, & *AB*, *AD* des raïons tirez du centre *A* aux centres d'impression *B* & *D* de ses aîles; & si le raïon *AD* étant supposé dans une situation horisontale, on suspend au centre de l'aîle *D* un poids P suffisant pour arrêter l'effort du fluide *EB*, & tenir le moulin en repos, j'appelle



ce poids P en general *poids d'équilibre*, & en particulier *la force* ou *l'effort absolu*, du fluide *EB*, qu'on suppose ici connu par les regles ordinaires des hydrauliques.

2°. L'effet produit par le fluide *EB* après un certain tems, étant plus ou moins grand, non seulement à mesure que les poids solides qu'il éleve sont plus ou moins grands, mais encore à proportion que ces mêmes poids montent plus ou moins vîte, j'appelle *l'effet general* d'un fluide le produit de la multiplication du poids solide qu'il éleve par la vîtesse du même poids; mais j'appelle en particulier le produit du poids P par la vîtesse même du fluide *EB l'effet naturel* du fluide, parce que c'est le même effet que si P étant mis dans une gondole sur l'eau *EB*, flotoit au gré de l'eau avec toute la vîtesse du fluide.

A l'égard des poids liquides, comme des colomnes d'eau élevées par des hydrauliques, l'effet dépend uniquement de la grosseur de ces colomnes & de leur vîtesse; c'est pourquoi l'exposant de l'effet est alors le produit de la base de la colomne par sa vîtesse.

3°. Si *GHF* est une lanterne fixe autour de l'arbre *A* du moulin *CBD*, laquelle engraine dans les dents de la roue *HMR* dont *L* est le centre ou l'arbe; en sorte que *H* soit le point d'attouchement de deux dents de la lanterne & de cette roue, & *AH*, *LH* deux raïons menez de leurs centres au point *H*; & qu'enfin *ION* soit un tambour fixe autour de l'arbre *L* de la roue *HMR*, lequel tambour porte un poids *P* capable d'arrêter l'effort du fluide *EB*, j'appellerai aussi le poids *P* *poids d'équilibre*: mais si l'on ôte quelque partie de ce poids *P*, afin que le fluide *EB* puisse mettre la Machine en mouvement, j'appelle le poids restant *p*, *poids diminué* en general, ou *poids de mouvement*; & si ce poids *p* a la grandeur requise pour la perfection de la Machine, je l'appelle alors *poids naturel* de la Machine.

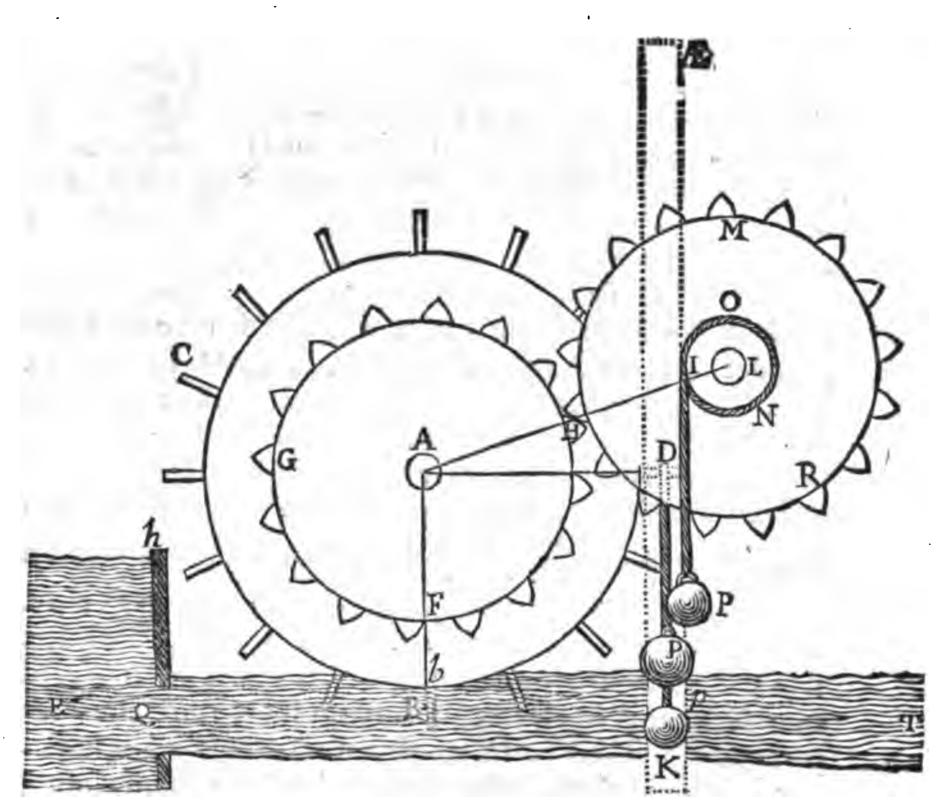
4°. Si au lieu de diminuer le poids *P*, on augmente un des raïons *AB*, *LH* des rouës; ou si l'on diminuë un des raïons *AH*, *LI* des lanternes & des tambours, j'appellerai ces raïons *raïons augmentez* ou *diminuez* en general, ou *raïons de mouvement*; & si en même tems ces raïons ont la proportion necessaire pour faire produire à cette Machine son plus grand effet, je les apelle alors *raïons naturels*. Au reste, s'il s'agissoit de Machines où les raïons ou leviers ne se manifestassent pas, comme dans les plans inclinez, dans les vis, &c. on pourroit prendre pour le levier de la force motrice la ligne qui marque son chemin, & de même pour le poids, ces chemins étant faits en même tems, ce qui est connu de tout le monde.

A l'égard des principes mechaniques sur lesquels je me fonde, je suppose 1°. qu'on est prévenu que l'effort d'un fluide *EB* contre une surface *B* est marqué par le produit de la multiplication de sa masse ou pesanteur specifique

du fluide par le quarré de sa vîtesse & par *B*; & que pour avoir l'effort ou moment du même fluide à l'encontre du poids *P*, il faut encore multiplier ce dernier produit par le produit des raïons des roues *AB*, *LH*.

2°. Que l'effort ou moment du poids *P* à l'encontre du fluide *EB* est simplement le produit de *P* par le produit des raïons *LI*, *AH* des tambours & des lanternes, sans avoir aucun égard à la vîtesse avec laquelle le poids *P* monte ou descend, dont la raison est que, suivant le principe de Galilée de l'acceleration des corps qui tombent, un poids qui tombe devroit accelerer sa vîtesse indéfiniment, sans la résistance de l'air. Or telle que soit la cause qui le fasse ainsi accelerer, la vîtesse naturelle de cette cause doit encore surpasser la plus grande vîtesse de ce corps (puisqu'il est impossible de faire impression sur un corps qui se meut, sans se mouvoir plus vîte que lui.) Donc selon Galilée, la vîtesse de cette cause est indéfiniment grande: d'où il suit évidemment que quand on éleve un corps avec une vîtesse finie, on ne souffre pas plus de résistance de la cause de sa pesanteur, que si on le soûtenoit simplement en repos; & quand on descend un corps de même avec une vîtesse finie, on ne souffre pas moins de charge de la cause de cette pesanteur, que si on le soûtenoit immobile, puisqu'une vîtesse indéfiniment grande augmentée ou diminuée d'une vîtesse finie n'augmente son effort en rien. Ainsi toute la difference qu'on pourroit appercevoir dans ces differentes actions, ne procede que du mouvement de nôtre corps, de ses parties, & de leurs differentes situations: De sorte que si une personne étant assise dans une chaise soûtenoit un poids en sa main, tandis qu'on la feroit monter & descendre sans aucune secousse, au moïen d'une corde tirée par dessus une poulie, ou d'une bascule: cette personne ne se sentiroit pas plus chargée en montant, ni moins en descendant, que quand on la soûtiendroit simplement en repos; ce qui est conforme à l'experience journaliere.

3°. Que si le fluide *EB* choquant l'aîle *B* d'une certaine vîtesse



vitesse soûtient le poids P en équilibre, & que venant ensuite la choquer avec une autre vitesse plus grande ou plus petite que la premiere, il soûtienne en équilibre un autre poids *p*, on aura l'Analogie : Comme le premier effort du fluide est à son second effort ; ainsi le premier poids soûtenu *P*, est au second poids soûtenu *p*.

4°. Que si la Machine ayant été mise en équilibre, on réduit le poids d'équilibre *P*, à *p*, afin que le fluide *EB* la fasse mouvoir, ce fluide ne choquera jamais l'aîle *B* en mouvement qu'avec l'excès de sa vitesse sur celle de *B*, & ce seul excès de vitesse devra être regardé à l'égard de *p* élevé, comme la vitesse entiere du fluide à l'égard de *P*, quand il soûtient *P* en repos, la vitesse de *p* étant toûjours très-moderée, & cette vitesse ne rendant pas *p* plus pe-

ſant que s'il étoit en repos, ſuivant le ſecond principe cy-deſſus.

5°. Enfin que la viteſſe de B eſt toûjours à celle de P en raiſon compoſée du raïon AB ou raïon AH, & du raïon LH au raïon LI; c'eſt-à-dire que la viteſſe de B eſt à celle de P, comme le produit des raïons des rouës AB, LH, au produit des raïons des Lanternes & tambours AH, LI; ce qui eſt connu de tout le monde.

ART. III. Toutes ces choſes étant propoſées, je nomme V la viteſſe du fluide EB, & x la viteſſe inconnuë que prendra le point B J'appelle AB, B; AH, b; LH, C; & LI, c; & je prends P pour marquer l'effort du fluide contre l'aîle B à l'encontre du poids d'équilibre P, ce qui donne dans l'état d'équilibre l'égalité ($P \times AB \times LH = P \times LI \times AH$), ou ($P \times B \times C = P \times c \times b$) d'où l'on tire la valeur de ($P = \frac{P \times B \times C}{b \times c}$). Suppoſant maintenant qu'on réduiſe P, à p; alors la Machine commencera de ſe mouvoir d'une viteſſe qui accelerera peu à peu juſqu'à un certain point, où étant arrivée elle y demeurera enſuite continuellement, (& cela en faiſant toûjours abſtraction des frotemens.) C'eſt cette viteſſe x que j'appelle *viteſſe uniforme*. Au reſte cette réduction de viteſſe à l'uniformité, vient de ce que l'effort du fluide contre l'aîle B diminuë à meſure que la viteſſe de B augmente; de ſorte que la viteſſe de B ne peut jamais atteindre celle du fluide, puiſque ſi ces deux viteſſes étoient égales, le fluide ne feroit plus aucun effort ſur B, ainſi p deſcendroit au lieu de monter. Or lorſque le point B aura atteint ſa viteſſe uniforme x, celle du fluide à l'égard de B ne ſera plus que $V-x$, & ſon quarré $\overline{V-x}^2$ par le quatriéme principe; au lieu que B étoit choqué avec la viteſſe totale V du fluide, quand le fluide étoit en équilibre avec P. Mais comme dans ce premier & ſecond choq c'eſt toûjours le même fluide qui choque & la même baſe B qui eſt choquée, il eſt évident que ni la peſanteur naturelle du fluide, ni la baſe B ne doivent point entrer dans la comparaiſon de ces deux ef-

forts. On aura donc ſimplement ſelon le troiſiéme & quatriéme principe l'Analogie ($V^2 | \overline{V-x}^2 \,||\, P | p$), d'où l'on tire l'égalité ($V^2 p = \overline{V-x}^2 \times P$) ; & tirant les racines quarrées de part & d'autre, on a ($V\sqrt{p} = \overline{V-x} \times \sqrt{P}$) d'où l'on déduit $\left(x = \frac{\overline{\sqrt{P}-\sqrt{p}} \times V}{\sqrt{P}}\right)$. Mais (par le principe 5.) x eſt à la viteſſe de $p = u$, comme $AB \times LH$ eſt à $AH \times LI$, ou comme BC à bc ; ce qui donne pour la viteſſe u deſirée de p $\left(\frac{\overline{\sqrt{P}-\sqrt{p}}}{\sqrt{P}} \times \frac{Vbc}{BC}\right)\left(\frac{bcx}{BC}\right)$, ou ſubſtituant la valeur de P cy-deſſus, on a $\left(u = \frac{Vbc}{BC} \times \overline{1 - \sqrt{\frac{pbc}{PBC}}}\right)$ pour la même viteſſe uniforme de p, de quelque grandeur que ſoit p au deſſous de P. On voit de plus à l'œil quelle ſeroit cette viteſſe uniforme de p, quelque compoſée que fût la Machine.

Art. IV. Si l'on multiplie maintenant cette viteſſe de p par p, on aura $\left(\frac{\overline{\sqrt{P}-\sqrt{p}}}{\sqrt{P}} \times \frac{bcpV}{BC}\right)$ pour l'expoſant de l'effet de la Machine (par la ſeconde définition), lequel effet changera à meſure que p ou B, C, b, c, varieront, comme il eſt aiſé de le voir.

Art. V. Si l'on ſuppoſe donc maintenant B, C, b, c, conſtants, & que l'on diminuë, ou que l'on augmente p autant qu'il eſt poſſible ; c'eſt-à-dire, qu'on le faſſe paſſer par tous les changemens de grandeur dont il eſt ſuſceptible, afin de trouver ſa valeur qui faſſe produire à la Machine ſon plus grand effet, on aura p variable dans la valeur generale de l'effet de l'article précédent ; & prenant la differentielle de cette valeur, ſçavoir $\left(\overline{\sqrt{P} - \frac{3}{2}\sqrt{p}} \times \frac{Vbcdp}{BC\sqrt{P}}\right)$ afin de l'égaler à zero (ſelon la methode des Infiniment petits) il en reſulte l'égalité ($\sqrt{P} = \frac{3}{2}\sqrt{p}$), d'où l'on tire ($\frac{2}{3}\sqrt{P} = \sqrt{p}$) & enfin ($\frac{4}{9}P = p$) deſirée $\left(= \frac{4}{9}\frac{PBC}{bc}\right)$. Ce qui nous apprend que ſi l'on réduit le poids d'équilibre P aux ($\frac{4}{9}$), ce poids aura la proportion propre à faire produire à la Machine ſon plus grand effet, & cette proportion eſt comme on le voit auſſi ſimple que generale.

ART. VI. Pour trouver à preſent l'expoſant de ce plus grand effet, il eſt manifeſte qu'il ne faut que ſubſtituer cette valeur de ($p = \frac{4}{9}P$) dans celle de l'effet general ($\frac{\overline{\sqrt{P} - \sqrt{p}}}{\sqrt{P}} \times \frac{bc \times pV}{BC}$), & il en réſultera ($\frac{4}{27}VP$) pour la valeur du plus grand effet; ce qui nous apprend que le plus grand effet qu'une telle Machine puiſſe produire, ne paſſe jamais les ($\frac{4}{27}$) du produit de P par la viteſſe du fluide, que nous avons appellé *l'effet naturel* dans la ſeconde définition; ce qui ſervira à déterminer aiſément le degré de perfection de ces ſortes de Machines lorſqu'elles ſeront faites au hazard: car il ne faudra pour cela que diviſer l'effet general cy-deſſus par l'effet parfait ($\frac{4}{27}VP = \frac{4}{27}\frac{VPbc}{BC}$), ce qui donnera le rapport ($\frac{27p \times \overline{\sqrt{P} - \sqrt{p}}}{4P\sqrt{p}} = \frac{27bc \times \overline{\sqrt{PBC} - \sqrt{pbc}}}{4PBC\sqrt{PBC}}$), qui marquera le degré de la Machine. Enfin diviſant l'effet parfait ($\frac{4}{27}VP$) par la valeur de $p = \frac{4}{9}P$, il vient ($\frac{VP}{3P}$) pour la viteſſe uniforme du poids p dans l'état de perfection ($= \frac{V}{3} \times \frac{bc}{BC}$) & ($x = \frac{V}{3}$). L'on peut remarquer que comme les raïons des rouës, lanternes & tambours de la Machine n'entrent point dans la valeur du plus grand effet ($\frac{4}{27}VP$), il s'enſuit que quelques changemens qu'on faſſe à ces raïons, (pourvû qu'on ait mis la Machine dans ſon état de perfection, comme on a fait cy-deſſus) le plus grand effet de la Machine ſera toûjours le même.

ART. VII. Suppoſons maintenant que le poids p à élever ſoit donné & conſtant, en ſorte qu'il ſoit permis ſeulement de faire quelques changemens aux raïons AB, AH, LH, LI, je dis que pour faire produire à la Machine ſon plus grand effet, il ne faut que diſpoſer d'abord tellement ces raïons, que p ſoit en équilibre avec l'effort du fluide EB, ou avec P, & enſuite augmenter un ou pluſieurs des

raïons AB, HL de la force motrice, ou diminuer un ou plusieurs raïons AH, Ll de la charge p, ou faire l'un & l'autre en même tems, & cela en telle proportion que le fluide n'ait que les $\frac{4}{9}$ de sa charge d'équilibre p à soûtenir, & alors la Machine sera dans son état de perfection.

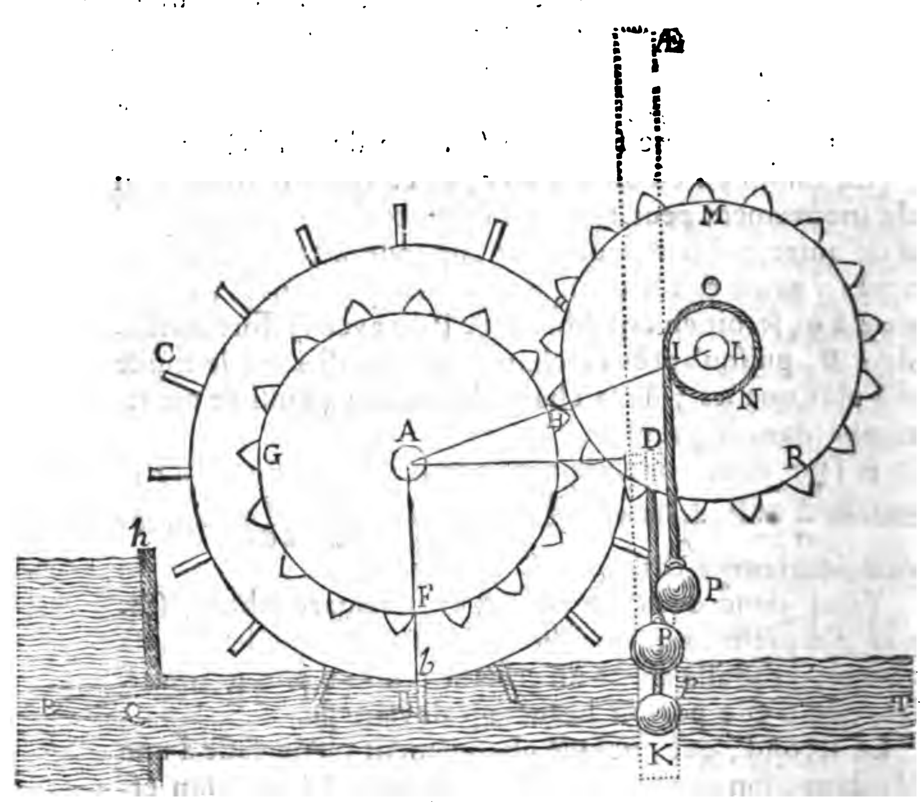
La raison en est aisée à voir, en ce que p dans cet état de mouvement peut toûjours être regardée comme les $\frac{4}{9}$ d'un autre poids P, qui étant appliqué à cette Machine après y avoir fait le changement marqué dans le rapport de 4 à 9, seroit en équilibre avec P ou avec l'effort du fluide EB, puisqu'après ce changement ainsi fait, le fluide n'a plus que les $\frac{4}{9}$ de sa charge à soûtenir ; ainsi ce cas retombe dans le premier.

Il faut donc conclure aussi que le plus grand effet sera encore $\frac{4}{27} V$ P, & la vitesse de p encore $(\frac{V}{3} \times \frac{bc}{BC})$, comme dans le premier cas.

Voici donc deux paradoxes très-remarquables ; sçavoir, le premier qu'une puissance n'ayant que les $\frac{4}{9}$ de sa charge, produise après un certain tems un plus grand effet, que si elle portoit beaucoup davantage.

Le second, que quelque changement qu'on fasse à une Machine, son produit n'excedera jamais $(\frac{4}{27})$ de son effet naturel, c'est-à-dire, de ce que la force motrice produiroit sans Machine.

Art. VIII. Pour faire maintenant application de ces principes à quelque chose d'usage, je supposerai que EB soit le jet horizontal d'une vanne dont l'ouverture soit Q, que Qb soit la distance du centre de cette ouverture à la surface de l'eau, & qu'il faille connoître la quantité d'eau que cette vanne est capable d'élever à une hauteur donnée $KÆ$ avec la Machine la plus parfaite de toutes. Pour y parvenir, je considere que la force du jet sera alors $(Q \times Qb = \mathrm{P})$, ce qui donnera en prenant $KÆ$ pour l'unité $(\mathrm{P} = \frac{Qb \times Q}{KÆ})$; & cette valeur de P étant substituée dans celle du plus grand effet $(= \frac{4}{27} V \mathrm{P})$, il en ré-



fulte $\left(\frac{4}{27} \times \frac{Qh \times V \times Q}{KÆ}\right)$ pour la quantité d'eau produite en *Æ* dans l'état de perfection ; d'où l'on tire l'Analogie generale pour toutes ces sortes d'hydrauliques.

Comme 27 fois la hauteur proposée *KÆ* est à 4 fois la hauteur de la chute de l'eau *Qh*, ainsi la dépense *D* de la vanne $Q = VQ$ à sa dépense en *Æ* avec la Machine la plus parfaite.

ART. IX. Enfin si l'on suppose que le fluide *EB* vient choquer l'aîle *B* avec differentes vitesses qui soient entr'elles comme les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c Et si l'on substituë 1 *V*, 2 *V*, 3 *V*, 4 *V*, 5 *V*, &c. au lieu de *V*, & 1 P, 4 P, 9 P, 16 P, 25 P, &c. au lieu de P dans la valeur generale du plus grand effet ($\frac{4}{27}$ *V*P), il en résul-

tera les plus grands effets $\frac{4}{27}VP$, $\frac{32}{27}VP$, $\frac{108}{27}VP$, $\frac{256}{27}VP$, $\frac{500}{27}VP$, qui repondent aux forces 4 P, 9 P, 16 P, 25 P.

Or les nombres 4, 32, 108, 256, 500, &c. sont quadruples des nombres 1, 8, 27, 64, 125, &c. & ceux-cy sont les cubes des vitesses 1, 2, 3, 4, 5, &c. Donc ces plus grands effets sont entr'eux comme les cubes des racines quarrées des differentes forces du fluide, ou des causes qui les produisent.

Ou si l'on veut comparer ces mêmes effets parfaits aux differens efforts du fluide contre l'aube *B*, on ôtera de la vitesse *V* du fluide celle de *B* dans l'état parfait $= \frac{V}{3}$, ce qui donnera pour la vitesse relative du fluide à l'égard de *B*, $\frac{2}{3}V$, dont le quarré $\frac{4}{9}V^2$ marquera en même tems son effort. Donc lorsque les vitesses absoluës du fluide seront 1 *V*, 2 *V*, 3 *V*, 4 *V*, 5 *V*, &c. ses vitesses relatives contre *A* seront $\frac{2}{3}V$, $\frac{4}{3}V$, $\frac{6}{3}V$, $\frac{8}{3}V$, $\frac{10}{3}V$, &c. dont les quarrés qui marqueront les differens efforts du fluide, sont comme les nombres 4, 16, 36, 64, 100, &c. ou comme les quarrés naturels 1, 4, 9, 16, 25, &c. Donc ces differens efforts sont entr'eux comme les differentes forces du fluide, c'est-à-dire encore, comme les quarrés des racines cubiques des differens effets qu'ils produisent. Donc même dans l'état parfait du mouvement *les effets ne sont proportionels ni aux forces ou causes, ni aux efforts qui les produisent*, comme on l'avoit crû jusqu'ici; ce qui peut passer encore pour un troisiéme paradoxe.

ART. X. Il ne nous reste maintenant pour épuiser cette matiere entierement, que de résoudre les cinq problêmes qu'on peut faire sur la grandeur du poids à elever, sur celle des aubes, sur les leviers de la force motrice, sur ceux du poids, & enfin sur sa vitesse, c'est-à-dire quatre de ces cinq differentes choses étant données à souhait de trouver la cinquiéme.

Pour y parvenir je suppose une eau dont la vitesse *v* soit connuë comme de 26 pieds par 2". qui est celle qu'elle acquiert en tombant par 13 pieds dans une pareille 2". se-

lon les experiences les plus exactes du P. Sebastien & de M. Mariotte, avec le poids π qu'elle est capable de soûtenir (à même distance de l'appui) en choquant contre une surface plate α d'un pied en quarré, lequel poids seroit ici de 910 liv. (ce qui s'accorde aussi à très-peu de chose près avec les experiences du même M. Mariotte faites en differens endroits de la Seine, en déduisant quelque petite chose pour le frotement de son Moulin) ce qui donnera l'Analogie en nommant A l'aube B: ($V^2 A$ | P || $v^2 \alpha$ | π), d'où l'on tire ($P = \frac{V^2 A \pi}{v^2 \alpha}$) & ($P = \frac{V^2 A \pi B C}{v^2 a b c}$).

Mettant donc dans l'équation de l'art. 3. ($V^2 p = \overline{V - x}^2 P$) les valeurs de P de ($x = \frac{u B C}{b c}$), on la change en cette autre ($V^2 p = \overline{b c V - B C u}^2 \times \frac{V^2 A B C \pi}{v^2 a b^3 c^3}$), d'où l'on tire ($p v^2 a b^3 c^3 = V^2 A B C \pi b^2 c^2 + u^2 A B^3 C^3 \pi - 2 V u B^2 C^2 A b c \pi$).

Si l'on demande donc le poids p, tout le reste étant donné, on aura ($p = \frac{\overline{V b c - u B C}^2}{v^2 a b^3 c^3} \times A B C \pi$).

Si l'on demande l'aube A, tout le reste étant connu, on aura ($A = \frac{p v^2 a b^3 c^3}{\overline{V b c - u B C}^2 \, B C \pi}$).

Si l'on veut avoir la vitesse u du poids p qu'on a trouvée dans l'art. 3. ($= \frac{V b c}{B C} \times \overline{1 - \sqrt{\frac{p b c}{P B C}}}$), il ne faudra qu'y substituer la valeur de P cy-dessus, & il viendra ......
($u = \frac{b c}{B C} \times \overline{V - v \sqrt{\frac{p b c a}{\pi B C A}}}$).

Pour trouver un des raïons de la force motrice comme B, on tirera de l'égalité cy-dessus ($B^3 - B^2 \times \frac{2 V b c}{u C} + B \times \frac{V^2 b^2 c^2}{u^2 c^2} - \frac{p v^2 a b^3 c^3}{\pi u^2 A C^3} = o$), laquelle en supposant ($B = z + \frac{2 V b c}{3 u C}$) se transforme en cette autre ($z^3 - z \times \frac{V^2 b^2 c^2}{3 u^2 C^2} + \frac{2 V^3}{27 u} - \frac{p v^2 a}{A \pi} \times \frac{b^3 c^3}{u^3 C^3} = o$) qui contient deux cas tous deux irréductibles

irréductibles, le quarré de la moitié de l'absolu étant toûjours moindre que le cube du tiers du coëfficient, à cause que up est toûjours moindre que $\frac{4}{27}\sqrt{P}$; c'est pourquoy on les résoudra par les Tables du cercle fort aisément, comme on le dira cy-après.

Enfin pour trouver un des raïons du poids comme b, on en prendra un à plaisir comme e, avec lequel on cherchera comme cy-dessus le raïon B de la force motrice : on cherchera aussi avec e le raïon β du fluide EB qui feroit un équilibre entre p & le fluide, faisant ($pec = PC\beta$) ou ($pec = \frac{V^2 A\pi C\beta}{b^2 a}$) & ($\frac{pecv^2 a}{V^2 AC\pi} = \beta$) en substituant la valeur de P cy-dessus, & on fera cette Analogie comme B est à β, ainsi e a un quatriéme terme qui sera la valeur de l'inconnuë b.

Pour résoudre la derniere équation cy-dessus, supposant premierement que l'absolu ait le signe +, ou ce qui est le même que ($\frac{4}{27}\sqrt{P}$) soit plus grand que ($2up$), on prendra la racine quarrée du tiers du coëfficient, sçavoir ($\frac{\sqrt{bc}}{3uC}$), & l'on divisera l'absolu par les $\frac{2}{3}$ du même coëfficient pour avoir ($\sqrt{\frac{2V^2A\pi - 27upv^2a}{6V^2uCA\pi} \times bc}$). On fera ensuite cette Analogie : $\frac{\sqrt{bc}}{3uC} \,|\, \sqrt{\frac{2V^3A\pi - 27upv^2a}{6V^2uCA\pi} \times bc} \,||\, 1 \,|\, 1 - \frac{27upv^2a}{2V^3A\pi} \,||$. ($1 \,|\, 1 - \frac{2up}{\frac{4}{27}\sqrt{P}}$); ainsi le sinus total des Tables du cercle a un quatrieme terme, qui sera un sinus dont on prendra l'arc & le tiers de cet arc & le double sinus de ce tiers. On fera ensuite cette seconde Analogie : comme le sinus total est au double sinus trouvé, ainsi ($\frac{\sqrt{bc}}{3uC}$) a un quatriéme terme, qui sera une des valeurs de z, sçavoir la moindre des 2 vraies.

Et pour avoir l'autre valeur, on prendra 5 fois le tiers d'arc trouvé, & le double sinus de ces $\frac{5}{3}$; après quoy on fera cette derniere Analogie : comme le sinus total est au

double sinus dernier, ainsi $(\frac{Vbc}{3nC})$ a un quatriéme terme, qui sera la plus grande valeur vraie de z.

Enfin si l'absolu a le signe —, ou si $(\frac{4}{27}VP)$ est moindre que $(2up)$, il n'y aura qu'une valeur vraie de z, qui sera égale à la somme des 2 qu'on vient de trouver.

Ayant z & y joignant $(\frac{2Vbc}{3nC})$, on aura aussi-tôt la valeur desirée de B. Ce qui restoit.

EXTRAIT DES OBSERVATIONS FAITES A LA MARTINIQUE

Par le P. Feüillée en 1703. & 1704.

Comparées aux observations qui avoient été déja faites en cette Isle par Mrs des Hayes & du Glos.

Et à celles qui ont été faites en même temps à l'Observatoire Royal.

PAR M. CASSINI le fils.

1704. 6. Decemb. LE P. Feüillée qui dans son voyage du Levant & des Isles de l'Archipel a déja fait plusieurs observations Astronomiques dont j'ai fait le rapport à l'Academie, a entrepris depuis son retour à Marseille une autre voyage dans le dessein d'y faire de nouvelles observations. Il a commencé par la Martinique où il a demeuré plus d'un an, comme il paroît par le Journal de ses observations qu'il a envoyées depuis peu à M. le Comte de Pontchartrain. Elles ont été souvent interrompuës par de longues maladies qui lui sont survenuës, & par des pluïes très-abondantes qu'il y a fait depuis le mois de Juin de l'année 1703, jusqu'au mois de Mars de cette année 1704. Il n'a pas laissé d'y faire un nombre considerable d'observations d'Eclipses de Satellites de Jupiter, dont il y en a deux du

premier qui ont été faites en même temps à l'Observatoire, & qui servent à déterminer avec exactitude la longitude de la Martinique. Il y en a plusieurs autres dont nous n'avons pas pû observer ici les correspondantes, tant à cause du temps qui n'est pas toûjours favorable, que parce qu'elles sont arrivées de jour à Paris, ou bien lorsque Jupiter n'étoit plus sur l'horizon. Nous ne laisserons pas de les comparer avec celles qui résultent à Paris par le calcul corrigé par les observations plus prochaines, & nous préfererons les observations qui précedent où suivent immediatement celles qui ont été faites à Paris, comme étant les moins sujettes à erreur.

Observations des Satellites de Jupiter faites à la Martinique 1703.

Le 19 Juillet à $2^h 41' 15''$ du matin à la Martinique, Immersion du 1 Satellite dans l'ombre de Jupiter.

6 53 57 à Paris par le calcul corrigé.

4 12 42 difference des Meridiens entre Paris & la Martinique, dont Paris est plus à l'Orient. Cette Immersion n'a pas pû être observée immediatement à Paris, y étant arrivée pendant le jour. Elle a été tirée de l'Immersion suivante, qui fut observée le 21 Juillet à $1^h 22' 22''$ du matin.

Le 26 Juillet à $4^h 35' 20''$ du matin à la Martinique, Immersion du 1 Satellite dans l'ombre de Jupiter.

8 47 43 à Paris par le calcul corrigé.

4 12 23 difference des Meridiens entre Paris & la Martinique. Cette observation est aussi arrivée de jour à Paris.

Le 7 Decembre à $7^h 10' 31''$ du soir à la Martinique, Emersion du 1 Satellite de l'ombre de Jupiter.

Le 7 Decembre à $11^h\ 23'\ 1''$ à Paris par le calcul corrigé.
4 12 30 difference des Meridiens entre Paris & la Martinique.

Le 12 Decembre à $10^h\ 4'\ 54''$ du soir à la Martinique, Emersion du 2 Satellite de l'ombre de Jupiter.

Le 20 Decembre à $0^h\ 41'\ 10''$ du matin à la Martinique, Emersion du 2 Satellite de l'ombre de Jupiter. Je n'ai point comparé ces deux observations du second Satellite avec celles qui résultent á Paris du calcul corrigé, n'en ayant pas observé vers ce temps-là.

Le 14 Decembre à $9^h\ 1'\ 44''$ du soir à la Martinique, Emersion du 1 Satellite de l'ombre de Jupiter au travers de foibles nuages.
13 15 0 Emersion du 1 Satellite observée à Paris.
4 13 16 difference des Meridiens entre Paris & la Martinique.

Le 29 Decembre à $0^h\ 44'\ 51''$ du matin à la Martinique, Emersion du 1 Satellite de l'ombre de Jupiter.
4 58 4 à Paris pour le calcul corrigé.
4 13 13 difference des Meridiens entre Paris & la Martinique. Cette Emersion n'a pas pû être observée à Paris, Jupiter étant alors sous l'horison.

Le 30 Decembre à $7^h\ 12'\ 59''$ du soir à la Martinique, Emersion du 1 Satellite de l'ombre de Jupiter.
11 26 40 Emersion du 1 Satellite observée à Paris.
4 13 41 difference des Meridiens entre Paris & la Martinique.

1704.

Le 14 Fevrier à $7^h 30' 40''$ du soir à la Martinique, Emersion du 1 Satellite de l'ombre de Jupiter.
11 43 19 à Paris par le calcul corigé.
4 12 39 difference des Meridiens entre Paris & la Martinique.

Le 21 Fevrier à $9^h 26' 28''$ du soir à la Martinique, Emersion du 1 Satellite de l'ombre de Jupiter.
13 39 31 à Paris par le calcul corrigé.
4 13 3 difference des Meridiens entre Paris & la Martinique.

Le 8 Mars à $7^h 49' 6''$ du soir à la Martinique, Emersion du 1 Satellite de l'ombre de Jupiter.
0 2 27 à Paris par le calcul corrigé.
4 13 21 difference des Meridiens entre Paris & la Martinique.

En prenant un milieu entre les deux observations du 14 & du 30 Decembre faites en même temps à Paris & à la Martinique, l'on a la difference des Meridiens entre ces lieux de $4^h 13' 28''$. Cette difference excede celle qui résulte de la comparaison des autres observations, & est plus petite que celle qui fut determinée en 1682, de $4^h 14' 45''$, par une observation de M^rs des Hayes & du Glos, qui est rapportée dans le Livre des Voyages de l'Academie, dont la correspondante ne fut pas observée en même temps à Paris. C'est-pourquoy je crois qu'il est plus à propos de preferer la difference qui résulte des deux observations du P. Feüillée comparées aux nôtres immediates, & de determiner la difference des Meridiens entre Paris & la Martinique de $4^h 13' 28''$ ou $6^d 22' 0''$.

Observations pour la latitude de la Martinique.

Le P. Feüillée s'est servi pour déterminer la hauteur du Pole de la Martinique d'un anneau Astronomique de 18 pouces de diametre, avec lequel il a fait un grand nombre d'observations de hauteurs Meridiennes du Soleil. Quoyque cet instrument ne puisse pas donner les hauteurs avec autant de précision que les grands quarts de cercle dont nous nous servons ordinairement, l'on ne laisse pas de reconnoître la bonté de celui dont s'est servi le P. Feüillée, & en même temps son exactitude à observer, puisque ces observations, qui sont au nombre de plus de 60, donnent la hauteur du Pole de cette Isle entre $14^d 42' 23''$, & $14^d 43' 55''$; de sorte qu'entre les extrêmes il n'y a qu'une minute & demie de difference.

Dans le Livre des Voyages de l'Academie la hauteur du Pole de cette Isle fut déterminée en 1682 de $14^d 44' 0''$, & cette détermination fut confirmée par le dernier Voyage que M. des Hayes fit à la Martinique, où il la trouva de même qu'elle est marquée dans le Livre des Voyages; ainsi il n'y a pas lieu de rien changer à cette détermination, qui d'ailleurs ne s'écarte pas d'une minute de celle qui résulte des observations du P. Feüillée.

Observations pour la variation de l'Aimant.

Le P. Feüillée s'étoit servi dans son voyage du Levant d'une Boussole dont la boëte étoit de cuivre : mais ayant remarqué que dans le même endroit l'éguille varioit quelquefois diversement, & ayant attribué cette variation au cuivre, il fit avant son départ de Marseille une boëte de bois d'un pied de diametre, dans laquelle il plaça une éguille de 9 pouces 7 lignes de très-fin acier, dans le dessein d'observer la variation de l'Aimant avec le plus d'exactitude qu'il lui seroit possible.

Ayant placé cette Boussole sur une pierre de niveau où

il avoit tracé avec beaucoup de soin une ligne Meridienne, il trouva le 9 Fevrier 1704 à la Martinique la variation de l'Aimant de $6^d\ 5'\ 0''$ Nord-Est, & le 10 du même mois de $6^d\ 10'\ 0''$.

La variation de l'Aimant avoit été observée à la Martinique au mois de Novembre de l'année 1682 par M^rs des Hayes & du Glos de 4^d & $10'$ ou environ Nord-Est, comme il est rapporté dans le Livre des Voyages de l'Academie. Il y a donc eu dans cet intervalle de temps, qui est de 21 années & quelques mois, une augmentation de la variation de l'Aimant d'environ deux degrés du Nord vers l'Est, au lieu que celle que l'on a observé à Paris a augmenté depuis ce temps-là du Nord vers l'Oüest. Car en 1682 au mois de May elle fut observée à Paris de $3^d\ \frac{1}{2}$, au lieu qu'elle fut trouvée en 1703 au mois d'Octobre de 9 degrés du Nord vers l'Oüest, comme il est rapporté dans la Connoissance des Temps de cette année ; de sorte qu'à peu près dans le même intervalle de temps que celui qui s'est écoulé dans les observations de la Martinique, il y a eu à l'Observatoire $5^d\ \frac{1}{2}$ d'augmentation du Nord vers l'Oüest ; ce qui est en raison de 15 à 16 minutes par année.

La differente direction de l'éguille aimantée, qui dans l'Europe est du Nord vers l'Oüest, & dans l'Amerique Meridionale du Nord vers l'Est, est apparemment ce qui a donné lieu à l'hypothese de M. Halley, qui trace dans les mers qui se trouvent entre ces deux continents, une ligne courbe où il n'y a point de variation de l'Aimant ; & qui est le terme des variations Orientales & Occidentales. Il a, selon les apparences, fondé son hypothese sur diverses observations qu'il a faites lui-même, & qu'il a tirées des Voyageurs. En effet il y a dans ces mers, suivant les dernieres observations que M. des Hayes a faites en Amerique en 1699 & 1700, plusieurs endroits où il n'y a point de variation. Mais dans la traversée de Gorée à la Cayenne, le lieu où cesse la variation, selon M. des Hayes, est éloigné de celui par où passe la ligne de M. Halley. M.

Halley faisant passer cette ligne beaucoup plus proche du Cap-Verd & de la Gorée que de Cayenne, au lieu que l'endroit où M. des Hayes n'a point trouvé de variation est plus proche de Cayenne que de Gorée. Car il rapporte que dans la plus grande partie de la traversée de Gorée à Cayenne, la variation a toûjours été Nord-Oüest, comme en France & en Canada, mais pas si grande ; que 6 ou 7 jours avant l'atterage de Cayenne elle étoit nulle ; qu'elle passoit ensuite au Nord-Est d'abord de peu, & qu'à Cayenne elle est de $5^{d} \frac{1}{2}$. Ainsi suivant cette observation cette ligne devroit être dans la traversée de Gorée à Cayenne beaucoup à l'Occident de l'endroit où elle est marquée dans la Carte de M. Halley.

Pour ce qui est de la declinaison de l'éguille à Cayenne que M. des Hayes marque être de $5^{d} \frac{1}{2}$ du Nord vers l'Est, elle s'accorde assez bien à celle de M. Halley, où elle paroît être de 6 degrés.

Celle de la Martinique differe un peu plus, ayant été observée par le P. Feüillée de $6^{d} 10'$, au lieu qu'elle est marquée dans la Carte de M. Halley de $5^{d} 20'$; mais il ne faut pas s'étonner de cette difference, puisque celle de Paris n'y est marquée que de 7 degrés, quoique dans le temps que M. Halley a imprimé sa Carte, elle y ait été observée de 8 degrés ou environ ; aussi il n'y a pas d'apparence qu'il ait pretendu representer les variations de l'Aimant dans la derniere précision.

M. des Hayes remarque aussi que dans une partie de la traversée pour le retour des Isles en France, la variation est encore Nord-Est jusqu'à la latitude de 30 à 31 degrés, & qu'après elle repasse au Nord-Oüest & y reste jusqu'en France. En cecy il paroît s'accorder à ce qui est representé dans la Carte de M. Halley. Mais quand même toutes les observations que l'on pourroit faire en ce temps-cy s'accorderoient aux variations qui sont marquées dans la Carte de M. Halley, il faudroit toujours une nouvelle hypothese pour exprimer les variations qui arriveroient dans la suite. Car en 1682 la variation de l'Aimant ayant été

été observée à Paris de $3^d \frac{1}{4}$ du Nord vers l'Oüest, & à la Martinique de 4^d 10' du Nord vers l'Est, il y avoit alors 4^d 40' de difference de variation qui répondoient à l'intervalle qui est entre ces lieux. Presentement la variation est à Paris de 9^d vers l'Oüest, & à la Martinique de 6^d 10' vers l'Oüest ; de sorte que dans le même intervalle il y a à present 15^d 10' de difference de variation, ce qui est environ le double de celle qui a été observée il y a 21 ans. Si ces differences de variation, l'une du Nord vers l'Oüest, & l'autre du Nord vers l'Est continuënt à augmenter comme il y a quelque apparence, l'hypothese de M. Halley aura dans la suite besoin de corrections qui demanderoient un grand nombre d'observations faites dans une longue suite d'années.

DESCRIPTION

De deux especes de Chamærhododendros *observées sur les côtes de la Mer Noire.*

PAR M. TOURNEFORT.

Chamærhododendros Pontica, maxima, folio Laurocerasi, flore è cæruleo purpurascente. Coroll. hist. rei herb. 42.

CEt arbrisseau s'éleve ordinairement à la hauteur d'un homme. On en trouve quelquefois de plus grands, dont le principal tronc est presque aussi gros que la jambe. Sa racine trace jusqu'à cinq ou six pieds de long, partagée d'abord en quelques autres racines grosses comme le bras, distribuées en subdivisions qui ne sont guerres plus épaisses que le pouce. Celles-ci diminuënt insensiblement, & sont accompagnées de beaucoup de chevelu. Elles sont dures, ligneuses, couvertes d'une écorce brune, & produisent plusieurs tiges de differentes grandeurs qui environnent le tronc. Le bois en est blanc, cassant, revêtu d'une écor- 1704. 10. Decembre.

ce grisâtre, qui tire en quelques endroits sur le brun. Les branches sont assez touffuës, & naissent souvent dès le bas; mais elles sont mal formées inégales & garnies de feüilles seulement vers les extremitez. Ces feüilles quoique rangées sans ordre sont d'une grande beauté, & ressemblent tout à fait à celles du Laurier-cerise. Les plus grands ont sept ou huit pouces de long sur environ deux ou trois pouces de large vers le milieu: car elles se terminent en pointe par les deux bouts. Leur couleur est verd gai, leur surface lisse & presque luisante, leur consistance ferme & solide. Le dos en est relevé d'une grosse côte arrondie; ce n'est qu'un allongement de la queuë, laquelle a près de deux pouces de long sur une ligne de large. Cette côte qui est sillonnée en devant, distribuë des vaisseaux de part & d'autre, qui se répandent & se subdivisent sur ces côtes dans un ordre comme alterne. Les feüilles deviennent moindres à mesure qu'elles approchent des sommitez: cependant on y en apperçoit assez souvent qui sont encore plus grandes que leurs inferieures. Depuis la fin d'Avril jusqu'à celle de Juin, ces sommitez sont chargées de bouquets de quatre ou cinq pouces de diametre, composez chacun de vingt ou trente fleurs qui naissent chacune des aisselles d'une feüille longue d'un pouce & demi, membraneuse, blanchâtre, large de quatre ou cinq lignes, pointuë cereusée en goutiere & posée en écaille avec ses voisines. Le pedicule des fleurs a depuis un pouce jusqu'à quinze lignes de long; mais il n'est épais que d'environ demi-ligne. Chaque fleur est d'une seule piece, longue d'un pouce & demi ou deux, rétrecie dans le fond, évasée & découpée en cinq ou six quartiers. Celui d'enhaut, qui est quelquefois le plus grand, est large d'environ sept ou huit lignes, arrondi par le bout ainsi que les autres, legerement frizé, orné vers le milieu de quelques points jaunes, ramassez en maniere d'une grosse tache. Les quartiers d'embas sont un peu plus petits, & découpez plus profondément que les autres. A l'égard de leur couleur le plus souvent elle est violette tirant sur le gris

Chamærhododendros Pontica, maxima, folio Laurocerasi
Flore e cæruleo purpurascente Coroll. Inst. rei Herb. 42

Berey fecit

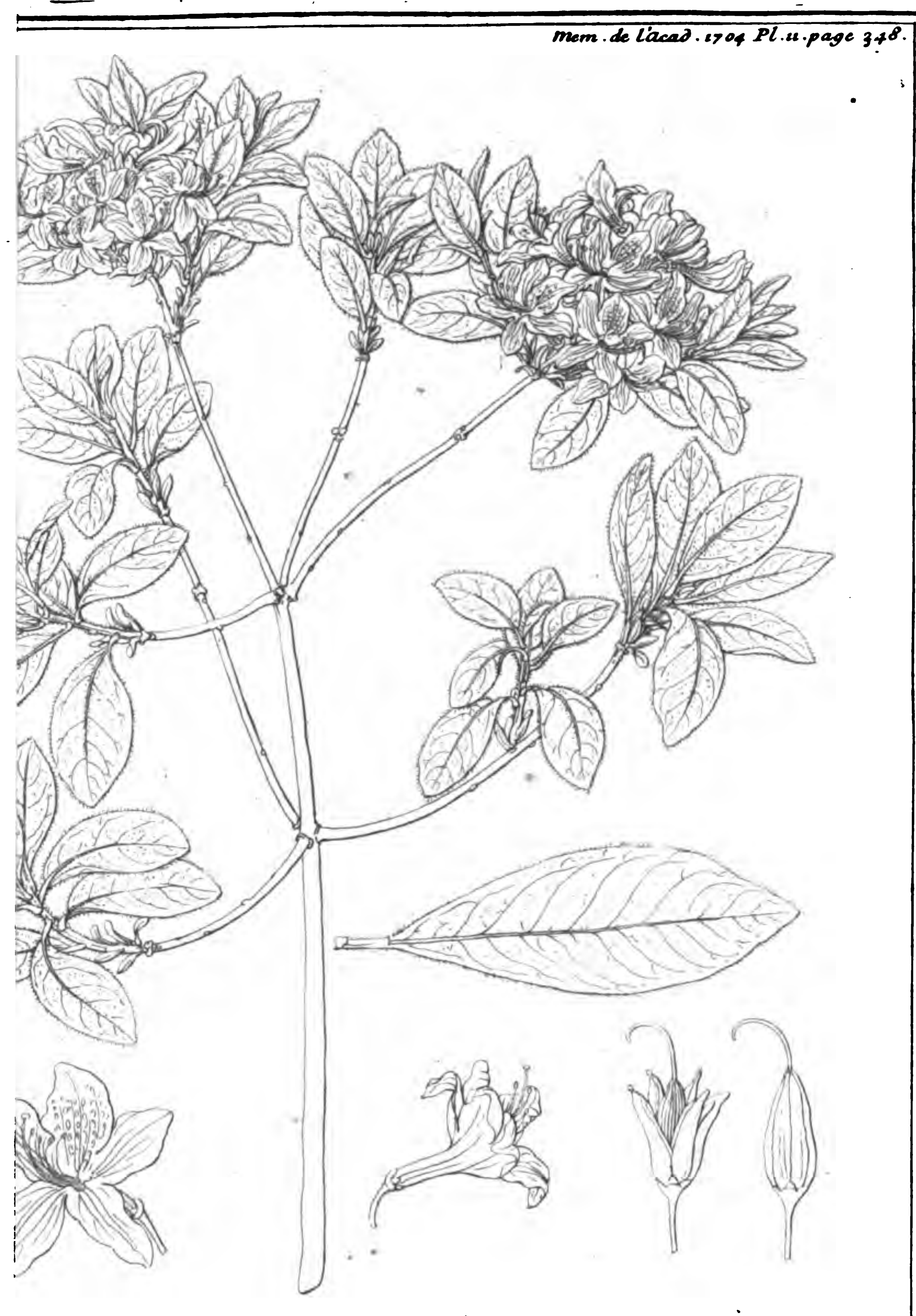
de lin. On trouve des pieds de cette plante à fleurs blanches, & d'autres à fleurs purpurines, plus ou moins foncées. Toutes ces fleurs sont marquées de points jaunes dont on vient de parler, & leurs étamines qui naissent en touffe, sont plus ou moins colorées de purpurin, mais blanches & cottonneuses à leur naissance. Ces étamines sont inégales, crochuës & entourent le pistlie : leurs sommets sont posez en travers, longs de deux lignes sur une ligne de large, divisez en deux bourses pleines d'une poussiere jaunâtre. Le calice des fleurs n'a qu'environ une ligne & demie de largeur, legerement canelé en six ou sept pointes purpurines. Le pistile est une espece de cone de deux lignes de long, relevé à sa base d'un ourlet verdâtre & comme frizé. Un filet purpurin, courbe & long de 15 ou 18 lignes termine ce pistile & finit par un bouton verdpâle. Les bouquets des fleurs sont très-gluants avant qu'elles s'épanoüissent : lorsqu'elles sont passées le pistile devient un fruit cylindrique, long d'un pouce à quinze lignes, épais d'environ quatre lignes, canelé, arrondi par les deux bouts. Il s'ouvre vers le haut en cinq ou six parties, & laisse voir autant de loges qui le partagent en sa longueur, & qui sont separées les unes des autres par les aîles d'un pivot qui en occupe le milieu. C'est ce pivot qui est terminé par le filet du pistile, & bien-loin de se dessecher il devient plus long tandis que le fruit est verd & ne tombe point. Les graines sont très-menuës, brun claire, longues de près d'une ligne.

Les feüilles de cette plante sont stiptiques sans autre saveur. Les fleurs ont une odeur agreable, mais qui se passe facilement.

Cette plante aime la terre grasse & humide. Elle vient sur les côtes de la Mer noire le long des ruisseaux, depuis la riviere d'Ava qui n'est qu'à trente lieuës de la sortie du Bosphore de Thrace jusqu'à Trebisonde.

Chamærhododendros Pontica, maxima, Mespili folio, flore luteo. Coroll. hist. rei. herb. 42.

Cette espce s'éleve quelquefois plus haut que la precedente, & produit un tronc de même grosseur, accompagné de plusieurs tiges plus menuës, divisées en branches inégales, foibles, cassantes, blanche en dedans, couvertes d'une écorce grisâtre & lisse si ce n'est aux extremitez où elles sont veluës & garnies de bouquets de feüilles assez semblables à celles du Neflier des bois. Ces feüilles sont longues de quatre pouces sur un pouce & demi de largeur vers le milieu, pointuës par les deux bouts, & surtout par celui d'embas, verd gai, legerement veluës, excepté sur les bords où les poils forment comme une espece de sourcil. Leur côte est assez forte, & se distribuë en nerveure sur toute la surface. Cette côte n'est que la suite de la queuë des feüilles, qui le plus souvent n'a que trois ou quatre lignes de longueur sur une ligne d'épaisseur. Les fleurs naissent dix-huit ou vingt ensemble, ramassées en bouquets à l'extremité des branches, soûtenuës par des pedicules d'un pouce de long, velus & qui naissent des aisselles de petites feüilles membraneuses blanchâtres, longues de sept ou huit lignes sur trois lignes de large. Chaque fleur est un tuyau de deux lignes & demi de diametre, legerement canelé, velu, jaune tirant sur le verdâtre. Il s'évase au-delà d'un pouce d'étenduë, & se divise en cinq quartiers, dont celui du milieu à plus d'un pouce de long sur presque autant de largeur, reflechi en arriere ainsi que les autres, & terminé en arcade gotique, jaune pâle, quoique doré vers le milieu. Les autres quartiers sont un peu plus étroits & plus courts, jaune pâle aussi. Cette fleur est percée en derriere, & s'articule avec le pistile qui est piramidal, canelé, long de deux lignes, verd blanchâtre, legerement velu, terminé par un filet courbe long de deux pouces, lequel finit par un bouton verd pâle. Des environs du trou de la fleur sortent cinq etamines plus courtes que le pistile, inégales, courbes, chargées de



Chamærhododendros Pontica, maxima, Mespili folio, Flore luteo Coroll. Inst. rei Herbar. 42.

Berey fecit

ſommets longs d'une ligne & demie, remplis de pouſſiere jaunâtre. Les étamines ſont de même couleur, veluës de leur naiſſance juſques vers le milieu, & toutes les fleurs ainſi que celles de l'eſpece précedente ſont penchées ſur les côtez de même que celles de la Fraxinelle. Le piſtile devient dans la ſuite un fruit d'environ quinze lignes de long, du diametre de ſix ou ſept lignes, relevé de cinq côtes, dur, brun & pointu. Il s'ouvre de la pointe à la baſe en ſept ou huit parties, creuſées en goutiere, leſquelles aſſemblées avec le pivot canelé qui en occupe le milieu forment autant de loges. Je n'en ay pas vû la graine meure.

Les feüilles de cette plante ſont ſtiptiques. L'odeur des fleurs approche de celle de la Chevrefeüille, mais elle eſt plus forte & porte à la tête.

Cette fleur me parut ſi belle que j'en fis un bouquet pour preſenter à Numan Coprogli Pacha de Candie preſentement, & Pacha d'Erzeron dans le temps que j'eus l'honneur de l'accompagner ſur la Mer noire ; mais je fus averti par ſon Chaia que cette fleur excitoit des vapeurs & cauſoit des vertiges. La raillerie me parut aſſez plaiſante, car le Pacha ſe plaignoit de ces ſortes d'incommoditez : cependant le Chaia ne railloit, pas & venoit d'apprendre par les gens du païs que cette fleur étoit nuiſible au cerveau. Ces bonnes gens par une tradition fort ancienne, fondée apparemment ſur pluſieurs obſervations, aſſurent auſſi que le miel que les abeilles font de ce qu'elles ſuccent ſur cette fleur, étourdit ceux qui en mangent & leur donne des nauſées.

Dioſcoride a parlé de ce miel à peu près dans les mêmes termes : « Autour d'Heraclée du Pont, dit-il, en certains « temps de l'année, le miel rend inſenſez ceux qui en man- « gent, & c'eſt ſans doute par la vertu des fleurs d'où il eſt « tiré. Ils ſuënt très copieuſement ; mais on les ſoulage en « leur donnant de la Rhuë, des ſalines & de l'hydromel à « meſure qu'ils vomiſſent. Ce miel, ajoûte le même Auteur, « eſt acre & fait éternuer. Il efface les rouſſeurs du viſage ſi « *Lib. 2. C. 103. & Eupor. lib. 2. ca. 38.*

„ on le broye avec du Coſtus : mêlé avec du ſel ou de l'Aloës, „ il diſſipe les noirceurs que laiſſent les meurtriſſures. Si les „ chiens ou les cochons avalent les excremens des perſon- „ nes qui ont mangé de ce miel, ils ſouffrent les mêmes ac- „ cidens.

Les deux Plantes dont on vient de parler ſe trouvent autour d'Heraclée du Pont, que lon appelle aujourd'huy Penderachi ou Elegri, & naiſſent en abondance tout le long des côtes & dans les bois juſqu'au dela de Trebiſonde. La premiere eſpece paſſe auſſi pour malfaiſante. Les beſtiaux n'en mangent que lorſqu'ils ne trouvent pas de meilleure nourriture.

Ariſt. de Mirab. Auſcult.

Pline a mieux débroüillé l'hiſtoire de ces abriſſeaux que Dioſcoride ni qu'Ariſtote, qui a cru que les abeilles amaſſoient ce miel ſur le Boüis ; qu'il rendoit inſenſez ceux qui en mangeoient & qui ſe portoient bien auparavant ; qu'au contraire il gueriſſoit les inſenſez. Pline s'en explique de la ſorte : Il eſt des années, dit-il, où le miel eſt très-

Lib. 11 cap. 12.

„ dangereux autour d'Heraclée du Pont. Les Auteurs n'ont „ pas connu de quelles fleurs les abeilles le tiroient. Voici „ ce que nous ne ſçavons. Il y a une Plante dans ces quar- „ tiers appellée *Ægolethron*, dont les fleurs dans les Prin- „ temps humides acquierent une qualité très-dangereuſe „ lorſqu'elles ſe fletriſſent. Le miel que les abeilles en font „ eſt plus liquide que l'ordinaire, plus peſant & plus rouge. „ Il a une odeur étrangere, & provoque à éternuer. Ceux „ qui en ont mangé ſuënt horriblement, ſe couchent à ter- „ re, & ne demandent que des rafraîchiſſemens. Il ajoûte enſuite les mêmes choſes que Dioſcoride, dont il ſemble qu'il ait traduit les paroles : mais outre le nom d'*Ægolethron* qui ne ſe trouve pas dans cet Auteur, voici une excellente remarque qui appartient uniquement à Pline.

Αἰγῶν ὄλεθρος. Caprarum pernicies.

„ On trouve, continuë-t-il, ſur les mêmes côtes du Pont „ une autre ſorte de miel qui eſt nommé *Mænomenon*, parce „ qu'il rend inſenſez ceux qui en mangent. On croit que les „ abeilles l'amaſſent ſur la fleur du *Rhododendros* qui s'y trou- „ ve communément parmi les forêts ; & les peuples de ce

quartier-là quoiqu'ils payent aux Romains une partie de « leur tribut en cire, se gardent bien de leur donner de leur « miel. «

Il semble que sur ces paroles de Pline l'on peut déterminer les noms de nos deux especes de *Chamærhododendros*. La seconde suivant les apparences est l'*Ægolethron* de cet Auteur; car la premiere qui fait des fleurs purpurines approche beaucoup plus du *Rhododendros*, & l'on peut la nommer *Rhododendros Pontica Plinii* pour la distinguer du *Rhododendros* ordinaire, qui est nôtre Laurier-rose connu par Pline sous le nom de *Rhododaphne & Nerium*. Il est certain que le Laurier-rose ne croît point sur les côtes du Pont Euxin, cette Plante aime les païs chauds. On n'en voit gueres passé les Dardanelles: mais elle est fort commune le long des ruisseaux dans les Isles de l'Archipel; ainsi le *Rhododendros* du Pont ne sçauroit être nôtre Laurier-rose: mais il est très-vrai-semblable que le *Chamærhododendros* à fleur purpurine est le *Rhododendros* de Pline. *Lib. 24. cap. XI.*

Quand l'Armée des dix mille approcha de Trebisonde, il lui arriva un accident fort étrange, & qui causa une grande consternation, ainsi que le rapporte Xenophon qui estoit un des principaux Chefs de ces troupes. Comme il y avoit plusieurs ruches d'abeilles, dit cet Auteur, les soldats n'en épargnerent pas le miel. Il leur prit un dévoyement par haut & par bas suivi de réveries; de sorte que les moins malades ressembloient à des yvrognes, & les autres à des personnes furieuses ou moribondes. On voyoit la terre jonchée de corps comme après une bataille. Personne neanmoins n'en mourut, & le mal cessa le lendemain environ l'heure qu'il avoit pris; de sorte que les soldats se leverent le troisiéme & le quatriéme jour, mais en l'état qu'on est après avoir pris une forte medecine. *Xenophon lib. 4. Retraite des dix mille.*

Diodore de Sicile rapporte le même fait dans les mêmes circonstances. Il y a toute apparence que ce miel avoit été tiré de quelqu'une de nos especes de *Chamærho-* *Lib. 14.*

dodendros. Tous les environs de Trebisonde en sont pleins & le Pere Lamberti Missionnaire Theatin convient que le miel que les abeilles succent sur un certain arbrisseau de la Colchide ou Mengrelie est dangereux & fait vomir. Il appelle cet arbrisseau *Oleandro giallo*, c'est-à-dire Laurier rose jaune, qui sans contredit est nôtre *Chamærhododendros Pontica, maxima, Mespili folio, flore luteo.* La fleur, dit-il, tient le milieu entre l'odeur du musc & celle de la cire jaune. Elle nous paroît assez semblable à celle de la *Chevrefeüille*, mais incomparablement plus forte.

Relation de la Colchide imprimée à Naples 1652 in quarto.

OBSERVATIONS

De l'Eclipse de Lune qui est arrivée le 11 *Decembre* 1704 *au matin à l'Observatoire.*

PAR M^RS DE LA HIRE.

1704. 11. Decembre.

LE ciel ayant toûjours été couvert pendant les 10 jours qui ont précedé celui de cette Eclipse, il sembloit qu'il n'y avoit aucune esperance d'en pouvoir rien observer. Cependant le soir précedent le ciel commença à s'éclaircir; mais le vent qui regnoit toûjours vers le Sud ne promettoit pas une grande serenité. Aussi vers les 4 heures du matin le ciel étoit fort broüillé, & la Lune étoit couverte de nuages cotonneux qui empêchoient de voir bien distinctement les taches de la Lune. Il faisoit alors peu de vent; mais vers les 6 heures le vent s'étant un peu augmenté, le ciel devenoit quelquefois assez serein pour laisser voir clairement la Lune: mais l'ombre de la terre sur le corps de la Lune n'a point été bien terminée dans tout ce que nous avons pû observer.

Sur les $5^h \frac{1}{2}$ on croyoit voir tantôt une penombre, & tantôt elle paroissoit se dissiper entierement. Enfin à $5^h 51'$ la penombre paroissoit distinctement & assez forte entre les taches Grimaldi & Tycho.

A $5^h 51'$.

A 5h 51' le bord de la Lune paroissoit fort sombre, & la penombre sembloit occuper 2 ½ doits.

A 6h 8' la Lune paroissoit éclipsée d'un doit à la seule estime, & l'on ne remarquoit pas de penombre sensible, & l'ombre étoit fort douteuse.

A 6h	11'	30"	L'ombre touchoit le bord de *Mare humorum*.
	14	30	Commencement de Grimaldi.
	16	0	La Lune éclipsée de 2 doits 12'.
	17	30	Fin de Grimaldi.
	21	0	Commencement de Tycho.
	27	0	L'ombre n'étoit point distincte.
	32	0	La Lune éclipsée de 3 doits 51'.
	34	0	Kepler peu distinctement.
	36	0	Copernic douteux.
	46	0	La Lune éclipsée de 5 doits 22'.
	56	0	La Lune éclipsée de 5 doits 49'.
à 7	0	0	La Lune éclipsée de 6 doits 3'.
	11	0	La Lune éclipsée de 6 doits 33'.

Après ce tems-là la Lune entra dans des nuages fort épois, & on ne la vit plus. La partie de la Lune qu'on voyoit un peu dans le fort de l'ombre paroissoit de couleur grisâtre.

Quelque tems avant l'Eclipse nous observâmes avec le Micrometre que le diametre de la Lune étoit de 30' 46" à la hauteur de 25 degrés.

Il sera facile de faire une figure exacte de la Lune avec ses Taches par les distances de quelques-unes que nous avons observées un peu avant l'Eclipse.

Distances des Taches au bord le plus proche de la Lune.

du bord	Au milieu de Platon.	3'	11"
de la	Au milieu de Grimaldi.	0	46
	Au milieu de Tycho.	4	26
Lune.	Au bord le plus proche de *Mare Crisium*.	1	34
	Au *Promontorium acutum*.	8	14
	A Aristarque.	2	45

Distances des Taches entr'elles.

Entre	Platon & Grimaldi.	18′	18″
	Grimaldi & Tycho.	14	20
	Promontorium acutum & Tycho.	14	39
	Promontorium acutum & Platon.	15	17

On remarquera que nous n'avons pas pris pour le *Promontorium acutum* une petite avance claire & pointuë qui est entre les deux Taches, mais une petite Tache claire qui en est proche & vers le milieu de la Lune.

Nous nous sommes servis de Lunettes de 7 piés pour faire ces observations, & nous avions appliqué le Micrometre à l'une de ces Lunettes.

Les Ephemerides de Mezzavacca marquent que cette Eclipse ne sera pas visible à Bologne, à cause qu'elle arrivera à $8^h\ 9'$, ce qui doit s'entendre du milieu. Cependant si elle a duré $2^h\ 40'$, le commencement aura été à $6^h\ 49'$, ce qui est près de trois quarts d'heures plutôt que le lever du Soleil, & par conséquent on en aura pû voir le commencement. Ce milieu réduit à Paris est $7^h\ 31'$.

Les Ephemerides de M. de Beaulieu marquent le milieu à Paris à $8^h\ 28'$, le commencement à $6^h\ 5'$, & la fin à $8^h\ 51'$; donc la durée $2^h\ 46'$, & la grandeur de 7 doits 29′.

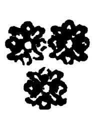
Les Ephemerides de l'Academie donnent le milieu de cette Eclipse à $7^h\ 27'\ 53''$, le commencement à $6^h\ 6'\ 56''$, la fin à $8^h\ 48'\ 50''$, la durée $2^h\ 41'\ 54''$, & la quantité de 6 doits 21′.

Le milieu de cette Eclipse dans ces trois Ephemerides est peu different, & les deux dernieres sont dans la même minute : il n'y a que la quantité qui est fort differente, car celles de M de Beaulieu la font plus grande que les nôtres de 1 doit 8′, ce qui est difficile à accorder avec sa durée : mais ce pourroit être une faute d'impression, car on auroit pû mettre $7^d\ 29'$ au lieu de 6 doits 29′, ce qui semble devoir être.

Les differences considerables qu'on remarque à l'ombre de la terre sur le corps de la Lune, ne peuvent venir

que de la densité & de la figure de l'Atmosphere plus ou moins elevée au-dessus de la terre dans les endroits qui font l'ombre, & où le Soleil se leve alors pour la Lune. Car les rayons qui traversent l'Atmosphere où ils se rompent, portent sur la partie de la Lune entierement éclipsée, cette fausse lueur qui paroît de differentes couleurs dans differentes éclipses, & quelquefois dans la même. Mais comme l'ombre de la terre paroît quelquefois assez terminée, & quelquefois fort confuse & inégale, il faut necessairement en rechercher la cause dans l'inégalité de l'extremité de l'Atmosphere qui donnera une ombre inégale; & l'Atmosphere étant tantôt plus rare & tantôt plus dense, détournera un peu plus ou un peu moins les derniers rayons qui la rencontrent vers cette extremité inégale, & fera que la figure de l'ombre ne sera point terminée, comme si l'Atmosphere étoit un corps fort different de l'Eter. Ce sont aussi ces rayons qui traversant cette Atmosphere inégale dans sa superficie, peuvent causer ces differentes couleurs qu'on voit dans le milieu de l'ombre.

Mais il y a encore une autre cause de la confusion de l'ombre de la terre dans les Eclipses, laquelle est par rapport à la partie du Soleil qui fait l'ombre, & c'est ce que nous appellons proprement *penombre*, & qui devient plus dense à proportion qu'il y a moins de parties du Soleil qui éclairent le corps, comme nous le remarquons dans les ombres de tous les corps sur la terre, & cette penombre sera toûjours la même par rapport à la figure du corps qui fait l'ombre. Mais cette penombre se mêlant avec l'ombre inégale & confuse de l'extremité de l'Atmosphere, causera toutes les varietés qu'on y remarque dans les Eclipses.



OBSERVATION

De l'Eclipse de Lune du 10 Decembre 1704.

PAR Mrs. CASSINI ET MARALDI.

1704. 13. Decemb. LE soir du 10 Decembre le ciel s'étant découvert, on mesura le passage de la Lune par le cercle horaire quatre fois depuis 6 heures & demie jusqu'à 7 heures. Il se trouva de 2 minutes 17 secondes d'heure.

La Lune ce jour-là & le jour suivant retourna au meridien en 24 heures 51', qui donnent 360^d ; donc 2' 17" d'heure font 33' 5" de degrez de parallele de la Lune, qui étant réduit à un grand cercle par la déclinaison de la Lune qui étoit alors 12 degrez 16 minutes, donnent 30' 38" diametre de la Lune.

A 7 heures 8' par le Micrometre, on mesura le diametre apparent de la Lune de 30' 43", la Lune étant élevée sur l'horizon de 30 degrez.

On observa la disposition des Taches de la Lune, & l'on trouva que le milieu de Grimaldi & la pointe de *Promontorium acutum* étoient précisément dans le diametre de la Lune qui concouroit avec la ligne de son mouvement composé à l'Occident, & que son centre apparent étoit au bord Occidental de *Sinus medius*, comme dans la Figure inserée dans le Livre de la Connoissance des Temps de cette année 1704. La disposition des autres Taches principales fut déterminée par le passage de ces Taches par le fil perpendiculaire à la trace de Lune, & par le fil incliné de 45 degrez, suivant la methode pratiquée dans nôtre grande Figure de la Lune, & dans celle qui a été inserée jusqu'à present dans la Connoissance des Temps.

On ne pût pas observer le passage de la Lune par le meridien la même nuit, parce que le ciel étoit couvert. Il se découvrit un quart d'heure après, & pendant le reste

de la nuit la Lune tantôt paroissoit, tantôt se cachoit.

Le matin suivant on voyoit la Lune dans un air trouble. Le diametre de la Lune mesuré par le Micrometre fut trouvé de 30' 21", moindre de 22 secondes que le soir precedent, presque à la même hauteur de la Lune sur l'horizon ; ce qui doit être attribué au mouvement de la Lune vers son Apogée.

A 6 heures on voyoit la penombre sur la Lune du côté de la Tache de Schicardus. On commença de douter du commencement de l'Eclipse à $6^h\ 3'\ 30''$.

Il fut plus évident à $6^h\ 4'\ 40''$ par une Lunette de 3 pieds.

Commencement à $6^h\ 5'\ 10''$ par une Lunette de 8 pieds.

Aux momens plus favorables on mesura les doits de l'Eclipse par le Micrometre.

A 6^h	10'		Partie de la Lune éclipsée...... 0 doits 38 min.
	12	0"	L'ombre au bord de *Mare humorum*.
	14	30	Un doit de la Lune éclipsée.
	15	0	Tout *Mare humorum* couvert.
	18		L'omb. à Grimaldi. On ne voit plus Tycho.
	20	40	Deux doits éclipsez.
	26	0	Deux doits & demi d'éclipsez.
	30		Deux doits 44'.
	34	40	Trois doits & demi.
	39		Trois doits 55'.
	39	40	Quatre doits.
	49	20	Quatre doits 55'.
	50	20	Cinq doits.
	56	0	Cinq doits 23'.
	59	20	Cinq doits 49'.
à 7^h	2'	0"	Six doits.
	10	0	Six doits 6'.

Dans ces quatre dernieres observations on voyoit assez distinctement le terme de l'ombre. La Lune se cacha ensuite & ne parut plus.

REMARQUES

Sur les nombres Quarrés, Cubiques, Quarré-Quarrés, Quarré-Cubiques & des autres degrés à l'infini.

PAR M. DE LA HIRE.

PROPOSITION PREMIERE.

TOut nombre Quarré joint à sa racine fait un nombre pair ou binaire.

Le quarré est pair ou impair ; s'il est pair sa racine est aussi paire, & par consequent la somme du pair du quarré & du pair de la racine sera aussi un nombre pair ou binaire. Mais s'il est impair sa racine sera impaire ; donc l'impair du quarré joint à l'impair de sa racine fait un nombre pair ou binaire. *Ce qu'il faloit démontrer.*

PROPOSITION II.

Tout nombre Cubique est plus grand que son prochain Cubique inferieur, ou dont la racine est moindre que la sienne d'une unité, d'un nombre senaire & divisible par 6, & de plus d'une unité.

On sçait que tout nombre Cubique dont la racine est plus grande que celle de son prochain inferieur, de l'unité, est plus grand que l'inferieur, de trois fois le quarré de la racine de l'inferieur plus trois fois la racine du même, & de plus d'une unité. Mais par la Proposition I. un nombre quarré plus sa racine est un nombre binaire, dont le triple de cette somme sera un nombre senaire ou divisible par 6 ; car il doit être binaire & ternaire, & il n'y a point de nombre plus petit que 6 qui soit l'un & l'autre, & de plus il y a l'unité.

Par exemple, le Cube 125 a pour sa racine le nombre 5, & le Cube immediatement inferieur 64 a le nombre 4 pour sa racine : la difference de ces deux Cubes doit être

trois fois le quarré de 4 qui est 16, plus trois fois sa racine 4, ce qui fera 60, plus l'unité, ce qui est 61 : mais 60 est un nombre divisible par 6. Donc 61 est divisible par 6, & il reste l'unité.

PROPOSITION III.

Maintenant si au lieu de prendre deux Cubes dont les racines soient seulement différentes d'une unité, qu'on en prenne deux dont les racines different de plusieurs unités, comme les Cubes de 4 & de 7.

Je dis que la difference des deux Cubes sera encore divisible par 6, & qu'il restera 3 unités après la division, c'est-à-dire, autant d'unités qu'il y en a dans la difference des racines.

Car par la Proposition II. la difference du Cube de 4 au Cube de 5 son prochain superieur, sera divisible par 6, & il restera une unité. De même la différence du Cube de 5 au Cube de 6 son prochain superieur, sera aussi divisible par 6, & il restera une unité ; & enfin la difference du Cube de 6 au Cube de 7 sera divisible par 6, & il restera une unité, donc les trois differences sont divisibles par 6, & il restera trois unités qui sont les trois restes.

Comme le Cube de 4 est 64, le Cube de 7 est 343 : la difference des deux Cubes est 279, qui est divisible par 6, & il reste 3.

Ce sera la même chose pour tous les autres Cubes.

PROPOSITION IV.

On voit par la Proposition précédente que si les racines des Cubes sont differentes entr'elles de 6 unités, alors leur difference sera divisible par 6 exactement.

Car il devroit y avoir 6 unités restantes, qui sont le nombre diviseur 6.

PROPOSITION V.

Tout nombre Cubique étant donc proposé, si l'on en ôte un nombre Cubique tel qu'on voudra, & que le reste soit divisé par 6, les unités restantes étant jointes à la racine du Cube ôté donneront la racine du Cube proposé, si elle est moindre que la somme de 6 plus la racine du

Cube ôté, ou bien en y ajoûtant 6 ou un multiple de 6, si elle est plus grande.

Cette Proposition est évidente par les précédentes.

PROPOSITION VI.

Il s'ensuit donc de la Proposition précédente, que si d'un nombre Cubique on en ôte o consideré ici comme premier Cube ôté, le reste qui sera le nombre Cubique proposé étant divisé par 6, il restera aprés la division un nombre qui sera la racine du Cube proposé, si la racine de ce Cube est moindre que 6; mais si elle est plus grande il faudra ajoûter 6 ou un multiple de 6 à ce reste.

Cette Proposition ne differe point de la précédente; car o qui a aussi o pour sa racine, est pris pour le Cube ôté.

PROPOSITION VII.

On peut par la même méthode trouver la même chose pour tout autre nombre que pour le Cubique. Comme pour le Quarré-quarré on trouvera qu'il ne faut le diviser que par 2: Pour le quarré Cubique qu'il faut le diviser par 10: Pour le Quarré-quarré cubique qu'il faut le diviser par 14, & ainsi des autres nombres des puissances superieures.

On aura toûjours dans quelque puissance que ce soit le moindre diviseur du nombre ajoûté à cette puissance pour faire la superieure, laquelle ait sa racine plus grande d'une unité par la regle suivante.

REGLE.

Toutes les puissances proposées dont l'exposant est pair, auront toutes pour leur diviseur le binaire ou le nombre 2, comme le Quarré, le Quarré-quarré, le Cube cube, &c. Mais celles dont l'exposant est pair de la progression double, comme 2, 4, 8, 16, 32, &c. & au-dessus de 4, auront pour diviseur le nombre 4.

Mais toutes les puissances dont l'exposant est nombre premier au dessus de 2, auront toûjours pour leur diviseur le double de l'exposant de la puissance. Comme pour le Cube qui a 3 pour exposant de sa puissance, on aura 6 pour diviseur: pour le Quarré-cube qui a 5 pour son exposant,

posant, on aura 10 pour son diviseur : pour le Quarré-quarré-cube qui a 7 pour son exposant, on aura 14 pour son diviseur, & ainsi des autres.

Toutes les autres puissances dont l'exposant est impair n'auront que 2 pour diviseur, à moins qu'elles ne soient nombres quarrés ; car alors elles se réduisent au nombre de leur racine, comme la 25e puissance a le même diviseur que la 5e, la 9e que la 3e, &c.

LEMME I.

Toutes les puissances d'une même racine numerique multipliées par differens nombres, contiennent chacune autant de fois le nombre multipliant, qu'il y a d'unités dans la puissance.

Cela est évident.

LEMME II.

Le plus grand diviseur commun de differentes puissances d'une même racine multipliées par differens nombres, sera le plus grand diviseur commun des nombres multiplians.

Car puisque la commune mesure sera dans les multiplians par le Lemme précédent, la commune mesure se trouvera aussi dans les produits des puissances par les nombres multiplians, & elle les mesurera exactement.

LEMME III.

Si l'on joint ensemble deux puissances differentes de la même racine, lesquelles soient multipliées par un même nombre ; le nombre sera aussi autant de fois dans la somme des puissances qu'il y aura d'unités dans cette somme.

Ce qui est évident.

DÉMONSTRATION.

Soit proposé la puissance de 6 dimensions ou dont l'exposant est 6, & que la racine soit appellée r, & la racine de la même puissance plus l'unité soit $r+1$, la difference de ses deux puissances sera

$$6r^5 + 15r^4 + 20r^3 + 15rr + 6r + 1.$$

Ayant retranché l'unité de cette difference, on trouvera les termes $6r^5$, $6r$, & $15r^4$, $15rr$, qui sont affectés

des mêmes nombres 6 & 15, il restera encore $20r^3$: il faut donc par les Lemmes précédens chercher le plus grand diviseur commun des trois nombres 6, 15, 20, mais on trouve qu'il n'y a que l'unité. Donc si la racine est paire, l'unité est le commun diviseur qui sera un binaire.

Mais si la racine est impaire, la somme des deux impairs $6r^5$ & $6r$ sera un nombre pair, & de même la somme des deux autres $15r^4$ & $15rr$; mais les r^3 étant un nombre impair, si on divise en 2 les $20r^3$, on aura $10r^3$ qui seront aussi un pair; mais les trois nombres 6, 15, 10 n'ont point non-plus de commune mesure que l'unité, & par conséquent cette unité est paire, & le nombre diviseur cherché ne peut être que le nombre 2 ou le binaire.

Si l'on propose une puissance de 7 dimensions, on aura pour la difference

$$7r^6 + 21r^5 + 35r^4 + 35r^3 + 21rr + 7r + 1.$$

Et en ayant ôté l'unité, on trouvera que la commune mesure des nombres qui multiplient les puissances de la racine sera le nombre 7; & par les raisons rapportées cy-devant, soit que la racine soit paire ou impaire, le nombre sera toûjours pair, & par conséquent il faudra doubler 7 qui sera 14 pour le diviseur cherché.

Voicy un exemple de la 17e puissance, dans laquelle il ne faut avoir égard qu'aux nombres qui multiplient les differens degrés de r, & qui seront 17, 136, 680, 2380, 6188, 12376, 19448, 24310, & les autres qui sont les mêmes repetés en descendant jusqu'à l'unité, & tous ces nombres sont divisibles par 17, dont le double est 34, qui sera le diviseur de cette puissance, suivant ce qui a été expliqué cy-devant.

Il est toûjours tres-facile de trouver tous ces nombres multiplians dans l'ordre de toutes les puissances de suite; car ils seront chacun égaux à la somme du superieur immediatement, & de celui qui le precede.

Mem. de l'Acad. 1704. p. 363. Pl. 12

TABLE . I .

inaisons de deux Carreaux mipartis de deux couleurs.

B

D A C B

A B D C

B C A D

17 20 B 18 19

33 36 C 34 35

49 52 D 50 51

21 24 B 22 23

37 40 C 38 39

53 56 D 54 55

25 28 B 26 27

41 44 C 42 43

57 60 D 58 59

29 32 B 30 31

45 48 C 46 47

61 64 D 62 63

Lud. Simonneau 1704

MEMOIRE SUR LES COMBINAISONS.

PAR LE R. P. SEBASTIEN TRUCHET.

DAns le dernier voyage que j'ay fait au Canal d'Orleans par ordre de son Altesse Royale, je trouvay dans un Château nommé la Motte S. Lyé à 4 lieuës en deçà d'Orleans, plusieurs Carreaux de fayence quarrés & mipartis de deux couleurs par une ligne diagonale, qui étoient destinez à carreler une Chapelle & plusieurs autres appartemens. Pour pouvoir former des desseins & des figures agreables par l'arrangement de ces Carreaux; j'examinay d'abord en combien de manieres deux de ces Carreaux pourroient se joindre ensemble, en les disposant toûjours en échiquier.

Je trouvay qu'il y avoit 64 manieres differentes de ranger deux de ces Carreaux, qui font 64 combinaisons : ce qui paroît surprenant ; car deux lettres ou deux chiffres ne se combinent ordinairement que deux fois, parce qu'ils ne changent de situation que pour être mis l'un après l'autre dans une ligne, la base demeurant toûjours la même : mais dans l'arrangement de deux Carreaux, l'un des deux peut prendre quatre situations differentes, dans chacune desquelles l'autre Carreau peut changer 16 fois, ce qui donne les 64 combinaisons que nous avons figurées & cottées dans la premiere Table suivante, dont l'explication est à côté. Voyez la 1. Table.

Nous avons trouvé ensuite qu'il y avoit des figures semblables dans ces 64 combinaisons, & que l'on pouvoit les réduire à 32 figures differentes; parce que chaque figure est repetée 2 fois dans la même situation ; & que les deux figures ne sont differentes l'une de l'autre que par la transposition du Carreau le plus ombré, comme on le peut voir dans la seconde Table, où elles sont toutes figurées

Voyez la 2. Planche. deux à deux, & cottées des mêmes chiffres qu'elles ont dans la premiere Table.

Nous avons encore trouvé que ces 32 figures differentes se peuvent réduire à 10 semblables, si l'on n'a pas d'égard à leur situation & au même point de vûë, & que les figures semblables ne different que par leur position differente sur leurs quatre côtez, comme on le peut voir dans la troisiéme Table de la seconde Planche, où elles sont figurées & cottées de suite des mêmes chiffres qu'elles ont dans la premiere & seconde Table. *2. Planche.*

Après avoir examiné les combinaisons de deux Carreaux, on pourroit mettre ici les combinaisons que l'on pourroit faire avec 3, 4, 5, &c. & plusieurs Carreaux; mais comme ce détail sera long, & que nous ne sommes pas encore content de ce que nous avons fait là-dessus, nous remettrons cet article à un autre Memoire.

Nous avons consulté les Livres de l'Architecture civile, & ceux qui traitent des combinaisons, pour nous assurer si quelqu'un avoit déja fait les mêmes remarques que nous: mais nous n'y avons rien trouvé qui en approchât.

Nous avons cherché ensuite à former des desseins & des compartimens avec ces figures jointes ensemble, & toûjours en échiquier; & nous en avons trouvé une trop grande quantité, pour les rapporter tous: nous en avons choisi seulement un cent que nous avons mis au net, afin que chacun puisse juger par ses yeux de la verité de ce que nous avons dit, & de la fécondité de ces combinaisons dont l'origine est pourtant si simple.

On n'a gravé dans ces Memoires que 30 de ces desseins, pour ne point trop grossir le volume. L'explication de chaque dessein est à côté, avec la maniere de les construire par la premiere Table, qui sert comme d'un Dictionnaire pour trouver les combinaisons dont on s'est servi pour les former. Ils sont tous construits par l'arrangement des deux Carreaux pris ensemble, & placés dans l'ordre que nous avons marqué à côté de chaque Planche.

EXPLICATION DE LA I. TABLE.

Des 64 combinaisons de deux Carreaux mipartis de deux couleurs.

On a figuré dans cette Planche les 64 combinaisons que l'on peut faire avec deux Carreaux mipartis en couleur par leur diagonale.

Cette Planche est divisée en 4 colonnes de haut en bas: chaque colonne est partagée en cinq quarrés. Dans le premier quarré de chaque colonne on a figuré en grand un seul Carreau, qui est differemment situé dans chacune, comme on le peut voir par les 4 lettres *ABCD*, qui marquent toûjours les mêmes côtés de chaque Carreau; sçavoir *AD* les deux côtés colorés, & *BC* les deux côtés blancs, en sorte que dans tous les quarrés de la premiere colonne le Carreau le plus ombré est toûjours comme appuyé horizontalement sur le côté *A*.

Dans la seconde colonne il est sur le côté *B*, sur le côté *C* dans la troisiéme, & sur le côté *D* dans la quatriéme colonne.

Dans les quatre quarrés qui achevent la premiere colonne, & qui ont la lettre *A* au centre, on a figuré les 16 combinaisons qui se peuvent faire avec 2 Carreaux, l'un desquels, qui est le plus ombré, demeure toûjours horizontal sur le côté *A*: on l'a coloré d'une teinte plus forte pour le distinguer de celui qui change de situation.

On a suivi le même ordre dans les trois autres colonnes: les quarrés de chacune sont marqués d'une même lettre, comme de *B* dans la seconde, de *C* dans la troisiéme, & de *D* dans la quatriéme colonne.

Dans chaque colonne on a separé les combinaisons de quatre en quatre, pour éviter la confusion.

EXPLICATION DE LA II. TABLE.

De la réduction de 64 combinaisons à 32. figures.

CEtte Table a été faite pour faire voir la réduction des 64 combinaisons de la premiere Table à 32 figures qui paroissent semblables & dans la même situation.

Elle est partagée d'abord en deux grandes colonnes de 16 lignes chacune.

Chaque colonne est subdivisée en 4 autres, dont la premiere marque le nombre des réductions : la seconde marque les mêmes chiffres que les figures semblables ont dans la premiere Table : la troisiéme & quatriéme colonne marquent les deux mêmes figures, qui ne sont differentes que par la transposition du Carreau le plus ombré.

La seconde grande colonne n'est differente de la premiere, que parce que l'on a mis à la derniere colonne les nombres qui marquent les réductions.

EXPLICATION DE LA III. TABLE.

CEtte troisiéme Table montre que l'on peut encore réduire les 32 figures de la seconde Table à 10 figures qui sont semblables; mais qui sont situées de 4 manieres différentes, comme on le peut voir dans chaque ligne, qui contient d'abord le chiffre de la réduction, ensuite les chiffres des combinaisons semblables, & enfin les figures de ces mêmes combinaisons situées & contournées comme elles le sont dans la premiere Table.

Construction des six Desseins de la premiere Planche.

AVIS GENERAL.

Pour construire tous les Desseins qu'on a figurés dans cette Planche & dans les suivantes, il faut avoir recours à la premiere Table des 64 combinaisons, dans laquelle toutes les combinaisons dont on s'est servi sont cottées par des chiffres, & prendre celles qu'on a marquées pour former chaque rang des desseins,

TABLE II.

...ion des 64. combinaisons a 32. figures qui paroissent semblables.

la 1.re et la 3.me	1	3	la 21.e et la 47.me	21	47	17
la 2.e et la 4.me	2	4	la 22.e et la 48.me	22	48	18
la 5.e et la 31.me	5	31	la 23.e et la 45.me	23	45	19
la 6.e et la 32.me	6	32	la 24.e et la 46.me	24	46	20
la 7.e et la 29.me	7	29	la 25.e et la 59.me	25	59	21
la 8.e et la 30.me	8	30	la 26.e et la 60.me	26	60	22
la 9.e et la 43.me	9	43	la 27.e et la 57.me	27	57	23
la 10.e et la 44.me	10	44	la 28.e et la 58.me	28	58	24
la 11.e et la 41.me	11	41	la 33.e et la 35.me	33	35	25
la 12.e et la 42.me	12	42	la 34.e et la 36.me	34	36	26
la 13.e et la 55.me	13	55	la 37.e et la 63.me	37	63	27
la 14.e et la 56.me	14	56	la 38.e et la 64.me	38	64	28
la 15.e et la 53.me	15	53	la 39.e et la 61.me	39	61	29
la 16.e et la 54.me	16	54	la 40.e et la 62.me	40	62	30
la 17.e et la 19.me	17	19	la 49.e et la 51.me	49	51	31
la 18.e et la 20.me	18	20	la 50.e et la 52.me	50	52	32

TABLE III.

...duction des 32. fig. a 10 seulement, mais differament situées.

1. 3	18. 20	33. 35	50. 52	1 3 18 20 33 35 50 52
2. 4	17. 19	34. 36	49. 51	2 4 17 19 34 36 49 51
5. 31	16. 54	39. 61	24. 46	5 31 16 54 39 61 24 46
6. 32	13. 55	40. 62	21. 47	6 32 13 55 40 62 21 47
7. 29	14. 56	37. 63	22. 48	7 29 14 56 37 63 22 48
8. 30	15. 53	38. 64	23. 45	8 30 15 53 38 64 23 45
9. 43	28. 58			9 43 28 58
10. 44	25. 59			10 44 25 59
11. 41	26. 60			11 41 26 60
12. 42	27. 57			12 42 27 57

Premiere planche des desseins.

A

D

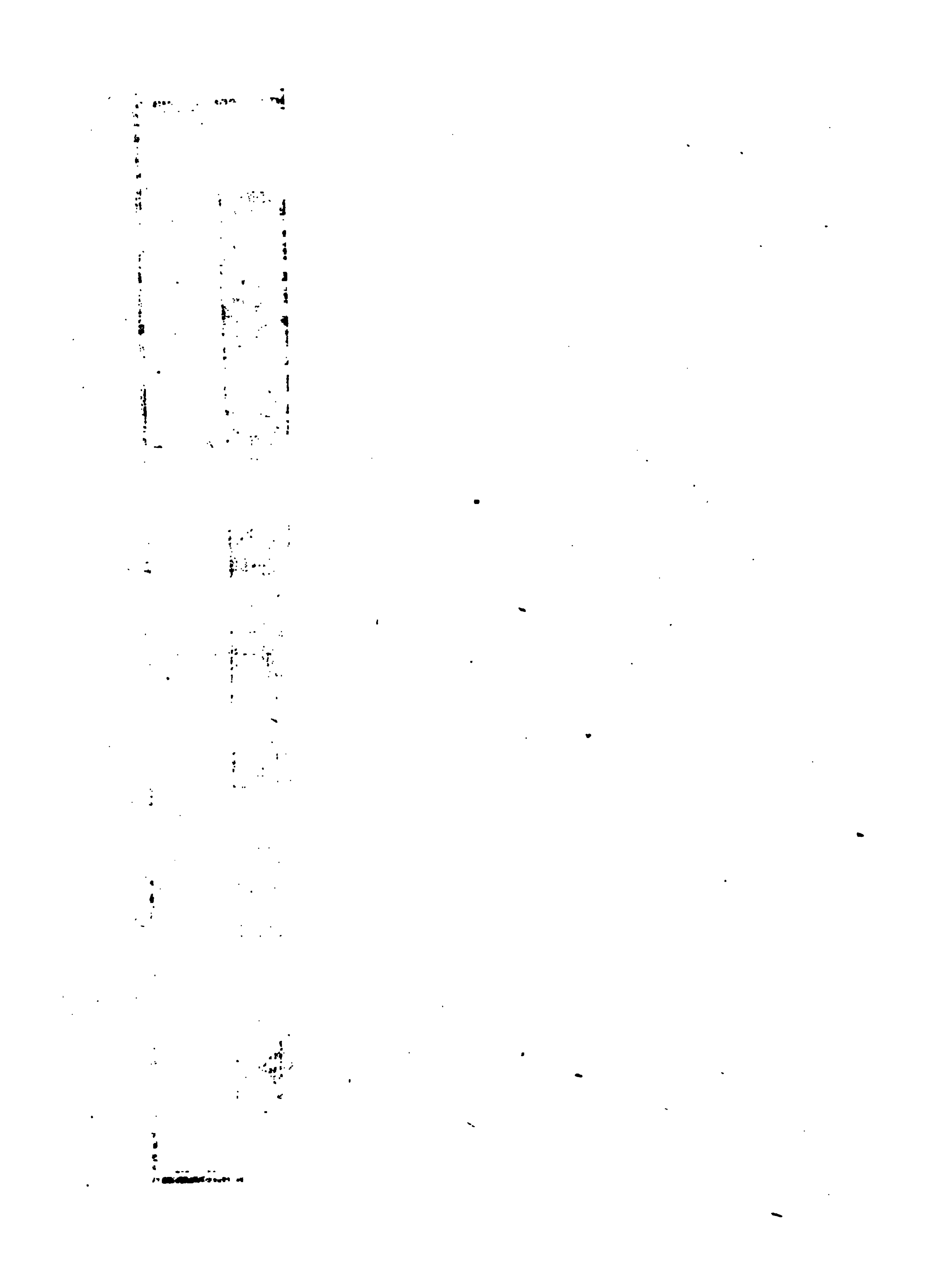
B

E

C

F

Ind Simonneau 1704



& les mettre de suite de gauche à droite comme on met les lettres dans chaque ligne d'écriture ordinaire.

LE premier Dessein marqué *A*
Est construit avec la seconde combinaison repetée de suite, & recommencée à chaque rang.

Le second Dessein marqué *B*.
Est formé en faisant une premiere rangée entiere avec la seconde combinaison, puis une seconde rangée avec la trente-quatriéme. Ces deux rangées repetées font tout le Dessein.

Le troisiéme Dessein marqué *C*
Se fera en formant alternativement une 1re rangée avec la 12me combinaison, & une seconde avec la 10me.

Le quatriéme Dessein marqué *D*
Se forme alternativement d'une 1re rangée de la 6me combinaison repetée de suite, & d'une seconde rangée de la 40me repetée de même.

Le cinquiéme Dessein marqué *E*
Se construit ainsi. On fait un 1r rang avec les 2 combinaisons 24 & 14 mises alternativement ; un second rang avec la 22 & la 16me aussi alternées ; un 3me rang avec les 2 combinaisons du premier, mais en mettant la 14me avant la 24me ; & enfin le 24me rang, comme le second, en renversant l'ordre & en mettant la 16me avant la 22me.

Le sixiéme Dessein marqué *F*.
Se fait en mettant alternativement au 1r rang la 24me combinaison repetée de suite, & au second rang la 16me repetée de même.

Construction des six Desseins de la seconde Planche.

LE premier Dessein marqué *G*
Se fait avec la 42me combinaison repetée de suite dans le premier rang, & avec la 10me repetée de même dans le second : Le 3me rang se fait comme le second ; le 4me & le 5me rang ; comme le premier.

Le second Dessein marqué *H*

Est fait avec les trois combinaisons 28, 26 & 50 mises de suite dans le premier rang; puis avec les 26, 50 & 28 mises de même dans le second; & enfin avec les 50, 28 & 26 de suite dans le troisiéme rang.

Le troisiéme Dessein marqué *I*

Se construit avec les combinaisons 10 & 12 mises de suite dans le premier rang, & avec les 12 & 10 mises aussi de suite dans le second & troisiéme rang.

Le quatriéme Dessein marqué *L*,

Se forme avec la 14me combinaison repetée de suite dans le premier rang, & avec les combinaisons 40e & 8e mises de suite dans le second; puis avec les 38e & 6e mises aussi de suite dans le troisiéme; & enfin avec la 22e repetée de suite dans le quatriéme rang.

Le cinquiéme Dessein marqué *M*

Est fait avec la combinaison 24e repetée de suite dans le premier rang, & avec la 22e repetée de même dans le second.

Le sixiéme Dessein marqué *N*

Se fait avec les combinaisons 6e & 38e mises ensemble & de suite dans le premier rang, avec la 40e & la 8e mises de même dans le second, avec la 38e & la 6e rangées de même dans le troisiéme, & enfin avec la 8e & la 40e dans le quatriéme rang.

Construction des six Desseins de la troisiéme Planche.

LE premier Dessein marqué *O*

Se fait avec les deux combinaisons 14e & 24e mises ensemble & repetées de suite dans le premier rang, & avec les mêmes dans un ordre renversé dans le second, c'est-à-dire en commençant par la 24e.

Le second Dessein marqué *P*

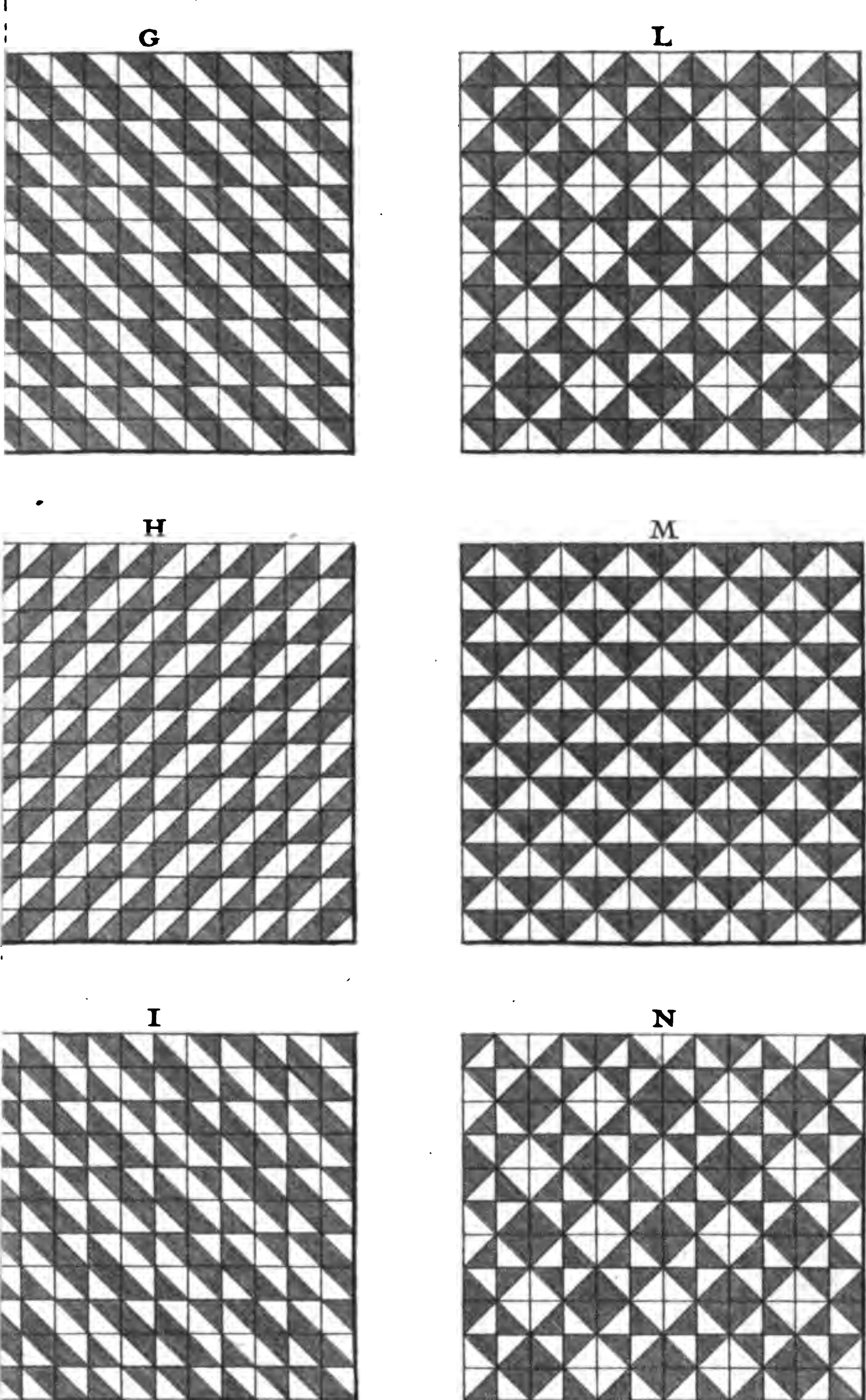
Est fait avec la 24e combinaison repetée de suite dans le premier rang, & avec la 14e repetée de même dans le second.

Le troisiéme Dessein marqué *Q*

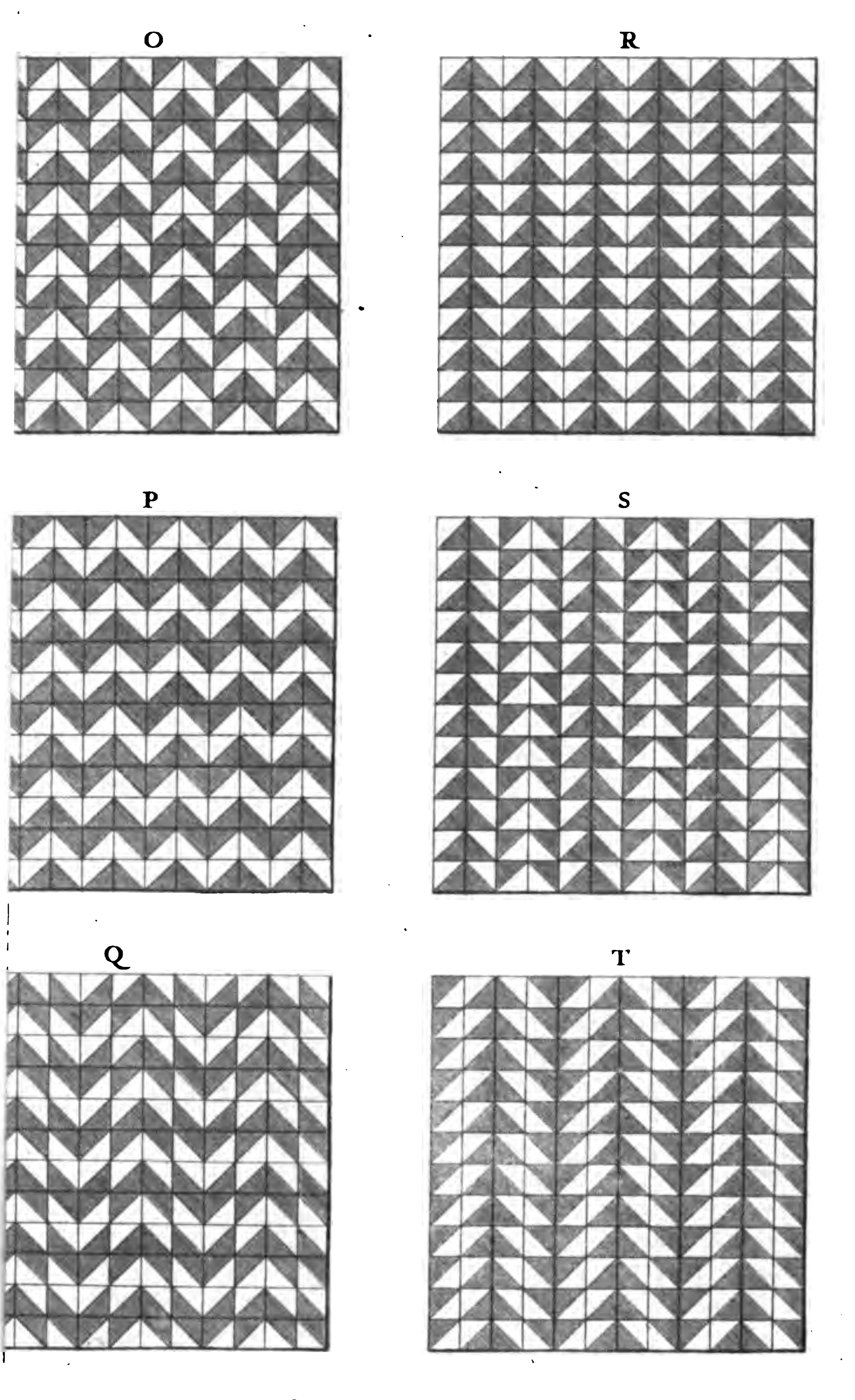
Se forme avec la 50e & la 2e mises ensemble & repetées de suite

Mem. de l'Acad. 1704. p. 368. Pl. 15

Seconde Planche des desseins



Troisieme Planche



Lud. Simonneau

suite dans le premier rang, & avec la 18e & la 34e mises de même dans le second.

Le quatriéme Dessein marqué *R*.

Se fait avec la 14e combinaison repetée de suite en chaque rang.

Le cinquiéme Dessein marqué *S*

Est fait avec la 14e & la 24e mises ensemble repetées & de suite dans chaque rang.

Le sixiéme Dessein marqué *T*

Se fait avec la 28e & la 12e mises ensemble & repetées de suite : tous les rangs se font de la même maniere.

Construction des six Desseins de la quatriéme Planche.

LE premier Dessein marqué *V*.

Est composé avec les combinaisons 10, 14, 10 & 6e mises & repetées de suite au 1r rang, puis avec les 16, 12, 8 & 12e repetées de même au second, ensuite avec les 14, 10, 6, 10e rangées de même au 3e; avec les 12, 8, 12 & 16e dans le 4e; avec les 10, 6, 10 & 14e dans le 5e; avec les 8, 12, 16 & 12e dans le 6e; avec les 6, 10, 14 & 10e dans le 7e; & enfin avec les 12, 16, 12 & 8e pour le 8e rang.

Le second Dessein marqué *U*.

Se forme en faisant un premier rang avec les deux combinaisons 28 & 12e mises de suite, un second avec la 14e & la 22e aussi de suite, un troisiéme avec la 12 & 28e, & un quatriéme enfin avec la 22e & la 14e.

Le troisiéme Dessein marqué *X*.

Se fait avec les combinaisons 10, 14 & 12e repetées de suite dans le 1r rang, avec les 22, 34 & 2e de suite dans le second; avec les 14, 12 & 10e dans le 3e; avec les 34, 2 & 22e dans le 4e; avec les 12, 10 & 14e pour le 5e; & enfin avec les 2, 22 & 34e pour le 6e rang.

Le quatriéme Dessein marqué *Y*

Est fait avec les deux combinaisons 28 & 12e mises & repetées de suite dans le 1r rang; avec les 26 & 10e de même dans le second; avec les 10 & 26e dans le 3e; & enfin avec

les 12 & 28ᵉ mises & repetées de même dans le 4ᵉ rang.

Le cinquiéme Dessein marqué Z

Se fait avec les deux combinaisons 24 & 16ᵉ mises ensemble & repetées de suite dans le 1ʳ rang, puis avec les 26 & 10ᵉ mises de même dans le second rang.

Le sixiéme Dessein marqué &

Se forme avec les deux combinaisons 28 & 10ᵉ mises ensemble & repetées ainsi dans le 1ʳ rang; avec les 26 & 12ᵉ dans le second, avec les 12 & 26 dans le 3ᵉ; & enfin avec les 10 & 28ᵉ rangées de même dans le 4ᵉ rang.

Construction des deux Desseins de la cinquiéme Planche.

LE premier Dessein marqué 1

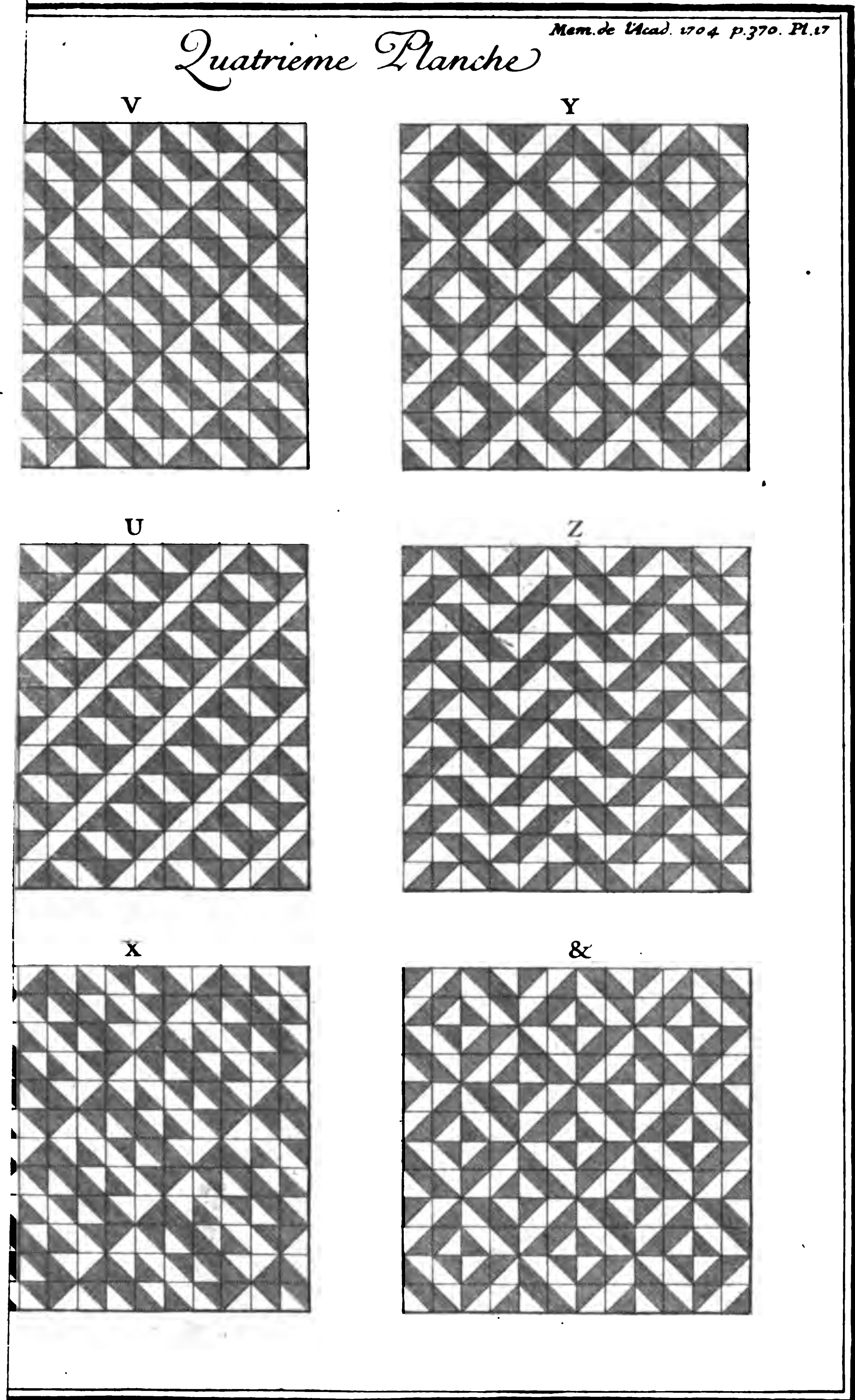
Est construit de cette maniere. On forme le premier rang avec la 12ᵉ combinaison repetée deux fois de suite & avec la 28ᵉ repetée de même, & ainsi en continuant alternativement pour le 1ʳ rang: le second se fait avec les 2 combinaisons 28 & 12ᵉ repetees chacune deux fois de suite en continuant alternativement: le 3ᵉ se fait avec la 26 & la 10ᵉ repetées chacune deux fois de suite: le 4ᵉ se fait comme le second rang: le 5ᵉ est formé comme le 3ᵉ: le sixiéme avec la 10 & 26ᵉ repetées deux fois chacune, comme nous avons dit: le 7ᵉ avec la 12 & la 28ᵉ repetées chacune deux fois de suite: le 8ᵉ se forme de la même maniere que le 6ᵉ rang.

Le second Dessein marqué 2

Se forme en mettant au premier rang la 14ᵉ combinaison, la 22ᵉ & la 14ᵉ de suite & repetées dans le même ordre: le second rang se fait avec les 3 combinaisons 12, 16 & 28ᵉ mises de suite & repetées dans le même ordre: le 3ᵉ rang se fait avec les 3 combinaisons 10, 24 & 26ᵉ mises & repetées de même; le 4ᵉ rang avec les 3 combinaisons 26, 16 & 10ᵉ de suite & repetées comme aux autres rangs: le 5ᵉ avec les 3 combinaisons 28, 24 & 12ᵉ mises de même: le 6ᵉ rang se fait en mettant de suite & repetant dans le même ordre la 22, la 14ᵉ & la 22ᵉ, & en continuant de la même maniere on acheve tout le Dessein.

Mem. de l'Acad. 1704. p.370. Pl. 17

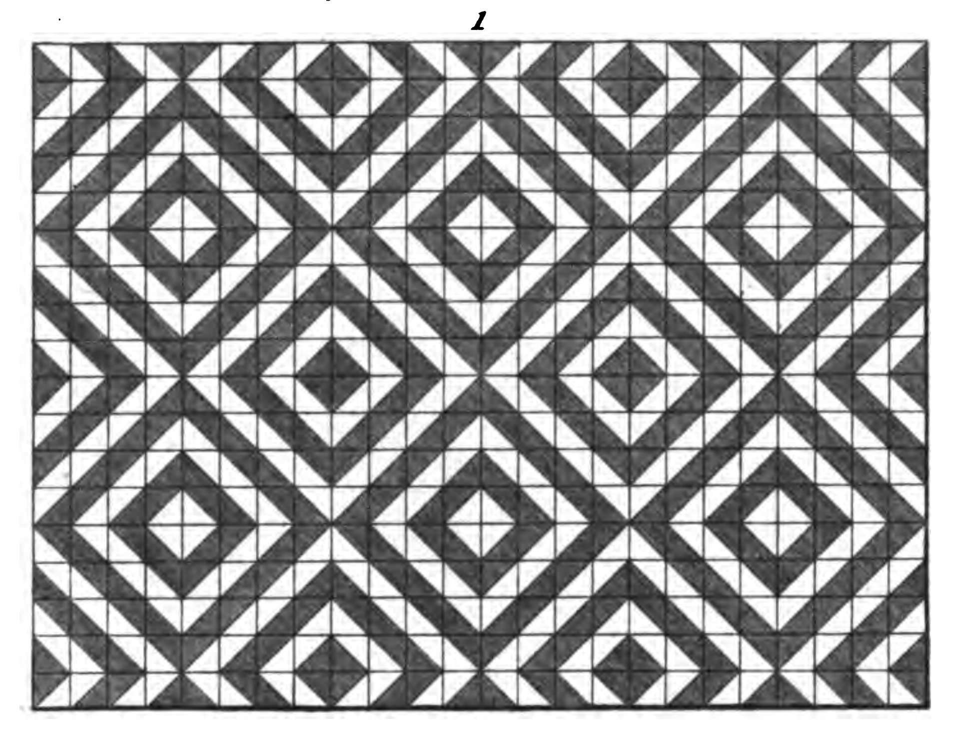
Quatrieme Planche



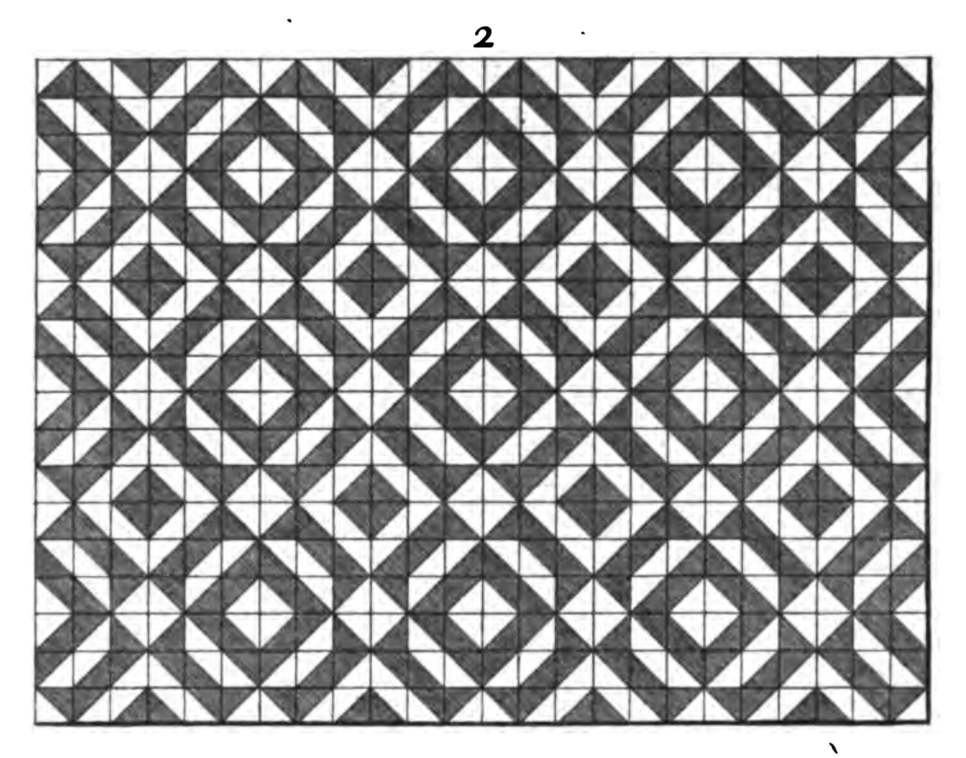
Lud. Simonneau

Cinquième Planche

1



2



Lud. Simonneau

Construction des deux Desseins de la sixiéme Planche.

LE premier Dessein marqué 3.
Se forme en mettant dans le premier rang la 24e combinaison deux fois de suite, puis la 12e, la 14e & la 28e chacune une fois de suite: le second rang avec la 14e mise deux fois; puis la 10e, la 22e & la 26e chacune une fois: le 3e rang est fait en mettant 2 fois la 24e, puis la 12, la 16 & la 28e une fois chacune: le 4e rang en mettant la 8, la 40, la 28, la 24 & la 12e chacune une fois: le 5e se forme avec la 6, la 38, la 12, la 16 & la 28e mises de suite chacune une fois: le 6e se fait avec la 16e mise 2 fois, la 28, la 24 & la 12e chacune une fois: le 7e rang avec la 22e repetée 2 fois, puis la 26, la 14 & la 10e chacune une fois: le 8e se fait avec la 16e mise deux fois, puis la 28, la 22 & la 12e chacune une fois: le 9e en mettant la 22e deux fois, & la 14e trois fois de suite: enfin le 10e rang se forme avec la 14e mise deux fois, & avec la 22e mise trois fois de suite.

Le second Dessein marqué 4
Se range ainsi. Mettés une fois la 28e combinaison, puis deux fois la 12e, une fois la 22e, & enfin une fois la 28e, & ainsi de suite pour le premier rang: le second se fait avec la 26e une fois, la 10e deux fois, la 22e & la 26e chacune une fois: le troisiéme rang, avec la 18, la 34, la 12, la 16 & la 28e chacune une fois: le quatriéme, avec la 28, la 12, la 10, la 22 & la 26e chacune une fois: le cinquiéme, avec la 12, la 28, la 26, la 14 & la 10e une fois chacune: le sixiéme, avec la 2, la 50, la 28, la 24 & la 12e mises une fois chacune: le septiéme, avec la 10e une fois, la 26e deux fois, la 14 & la 10e une fois chacune: le huitiéme, avec la 12e une fois, la 28e deux fois, la 14 & la 12e une fois chacune: le neuviéme, avec la 10, la 26, la 50, la 24 & la 2e une fois chacune: enfin le dixiéme rang se fait avec les 26, 10, 34, 16 & 18mes combinaisons mises chacune une fois.

Construction des deux Desseins de la septiéme Planche.

LE premier Dessein marqué 5.

Est formé avec la 26e combinaison, la 22 & la 10e mises de suite chacune une fois dans le premier rang; avec la 28, la 16 & la 12e mises une fois chacune dans le second; avec la 12, la 14 & la 28e mises de même dans le troisiéme; ensuite avec la 28, la 22 & la 12e dans le quatriéme; avec la 12, la 24 & la 28e de suite dans le cinquiéme; & enfin avec la 10, la 14 & la 26e aussi de suite & chacune une fois dans le sixiéme rang.

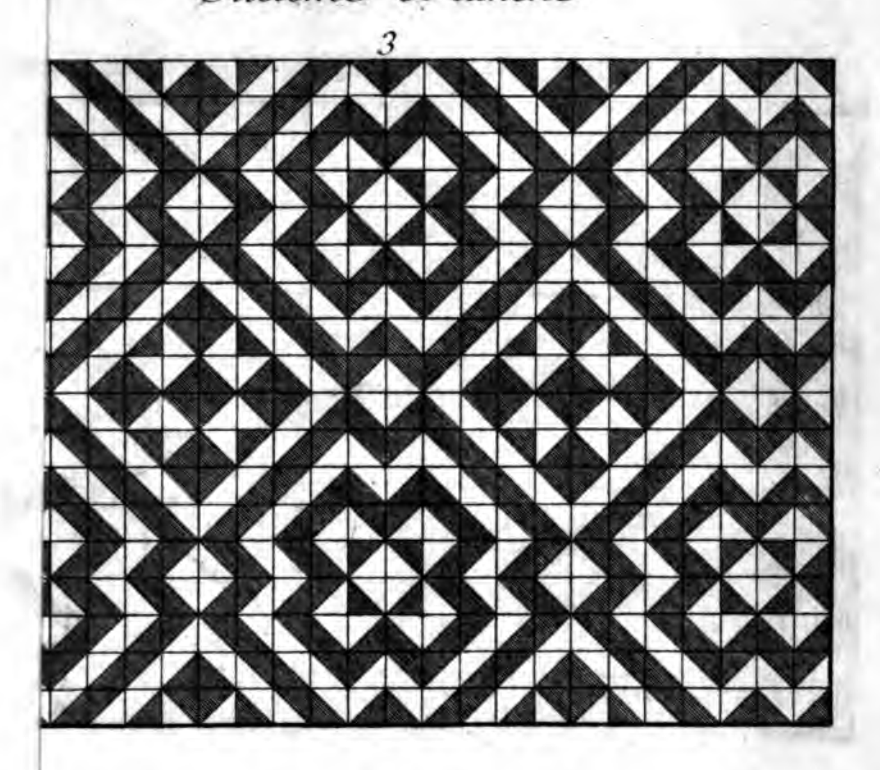
Le second Dessein marqué 6

Se fait avec la 16 & la 8e chacune une fois, puis la 22e deux fois, ensuite la 40e & la 16e chacune une fois pour le premier rang: le second se forme avec la 34e, la 6e, la 50e, la 2e, la 38 & la 18e chacune une fois: le troisiéme se fait avec la 12, la 8, la 26, la 10, la 40 & la 28e mises de suite une fois chacune: le quatriéme, par la 28, la 6, la 10, la 16, la 38 & la 12e une fois chacune: le cinquiéme est fait par la 50, la 8, la 34, la 18, la 40 & la 2e mises chacune une fois de suite: le sixiéme rang, avec la 24 & la 32e chacune une fois, puis la 14e deux fois de suite, la 28 & la 24e chacune une fois: le septiéme, avec la 22 & la 40e chacune une fois, puis deux fois de suite la 16e, & une fois chacune la 8 & la 22e: le huitiéme se fait par la 2, la 38, la 18, la 34, la 6 & la 50e mises une fois chacune: le neuviéme, avec la 10, la 40, la 28, la 12, la 8 & la 26e mises de suite: le dixiéme, par la 26, la 38, la 12, la 28, la 6 & la 10e mises aussi de suite: le onziéme, avec la 18, la 40, la 2, la 50, la 8 & la 34e chacune une fois de suite: enfin le douziéme rang est fait par la 14 & la 38e chacune une fois, la 24e deux fois de suite, la 6 & la 14e chacune une fois.

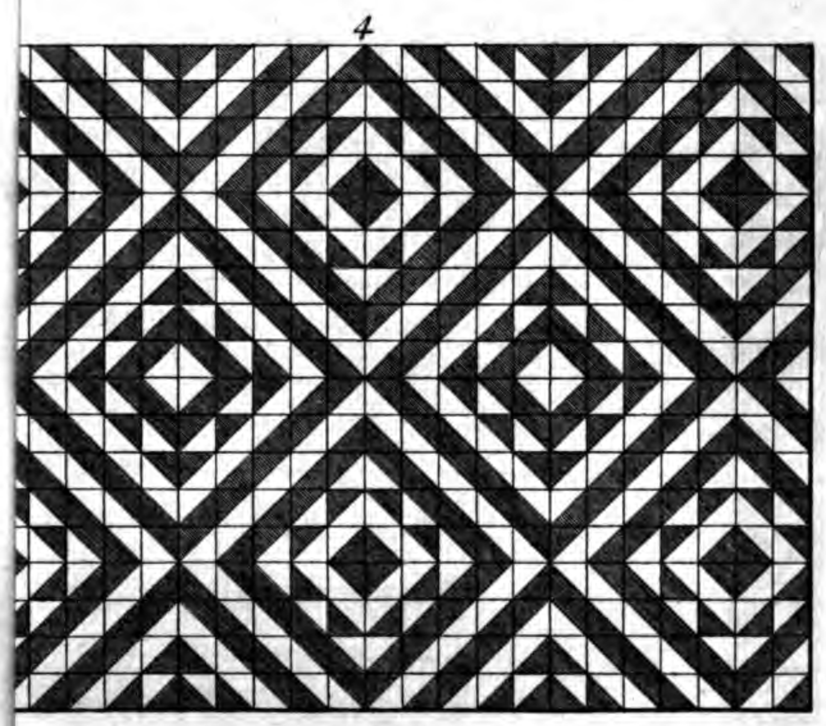
Fin des Memoires.

Sixiéme Planche

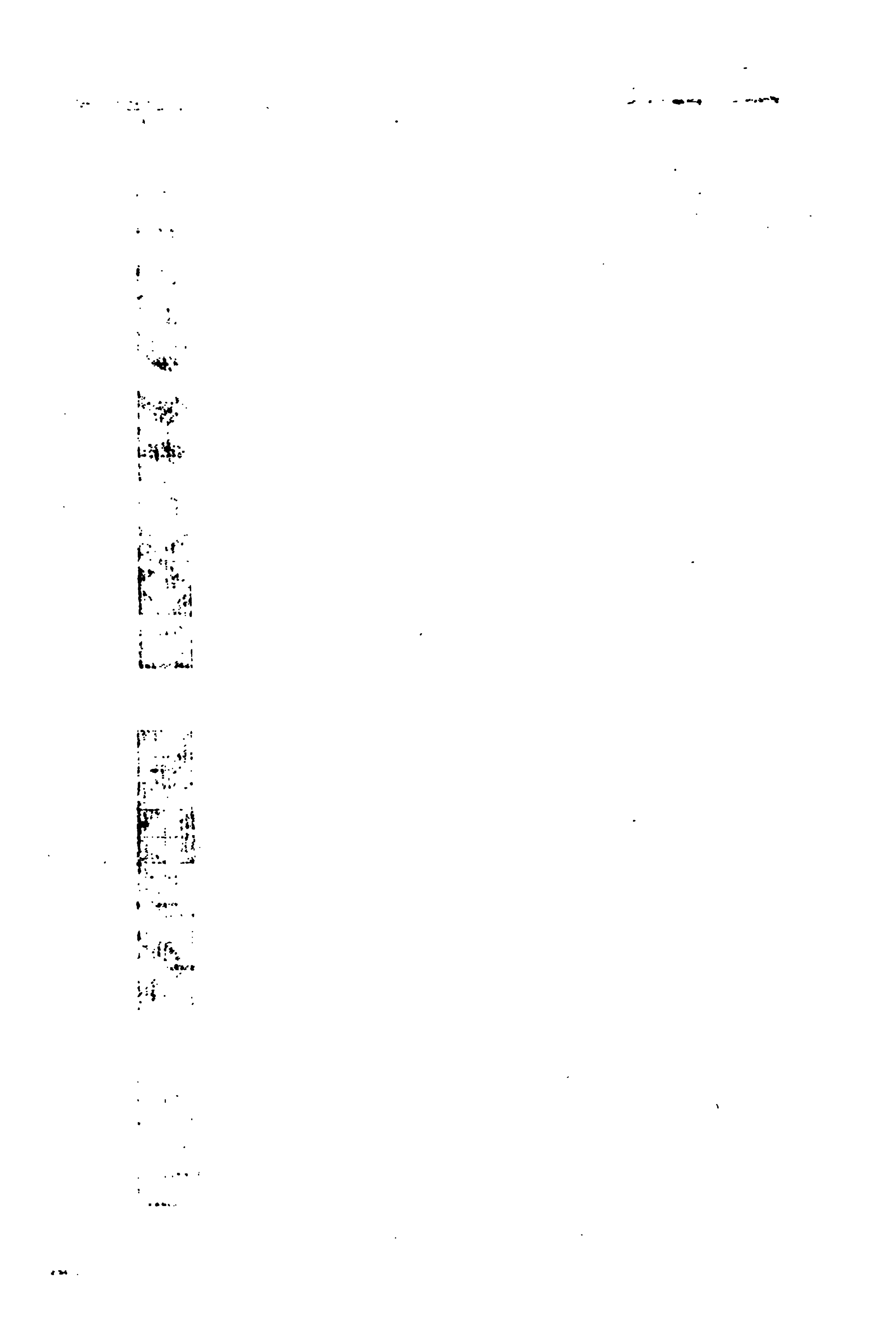
3



4

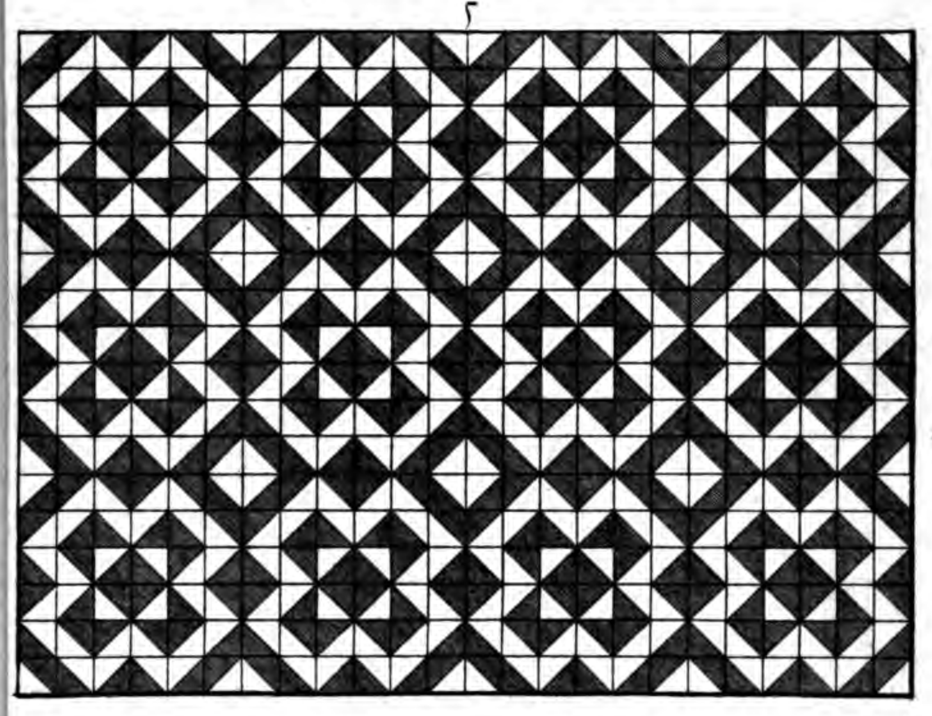


Lud. Simonneau

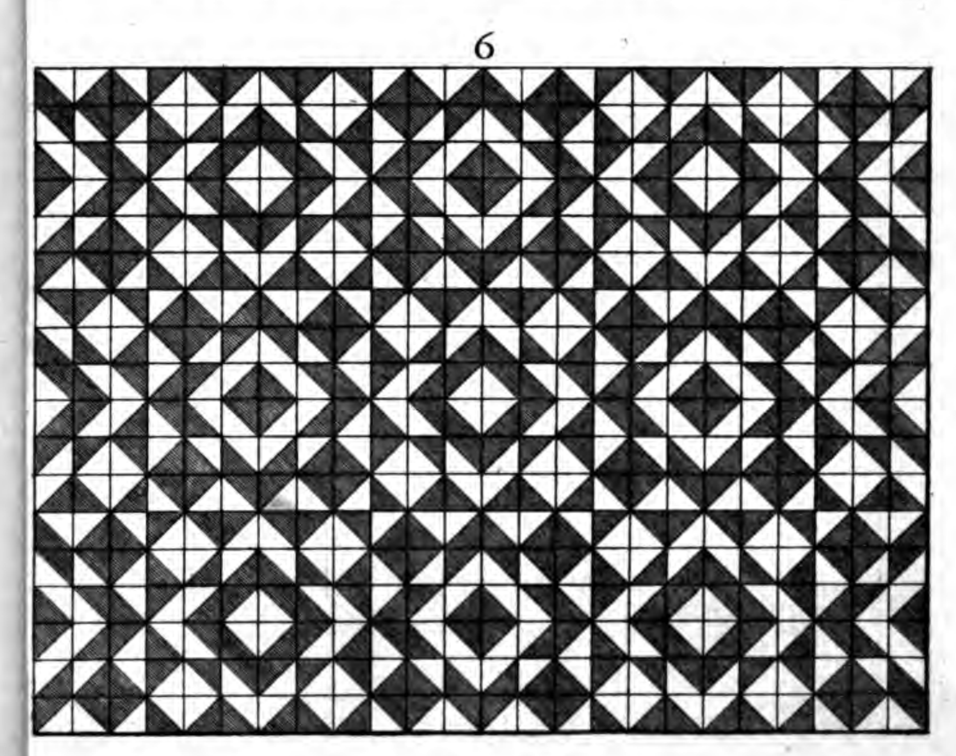


Septiéme Planche

5



6



Lud. Simonneau







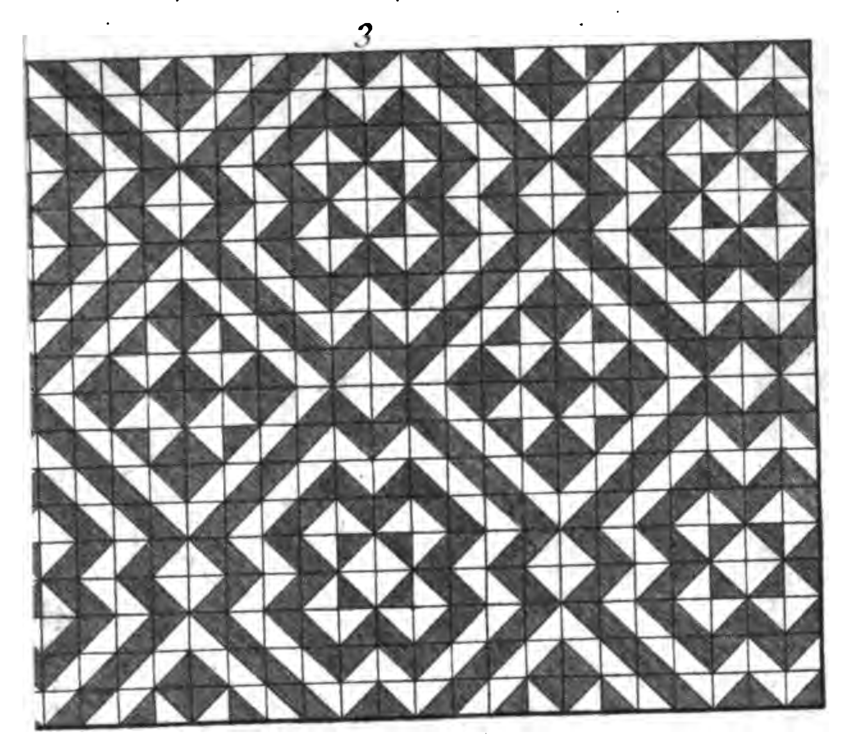




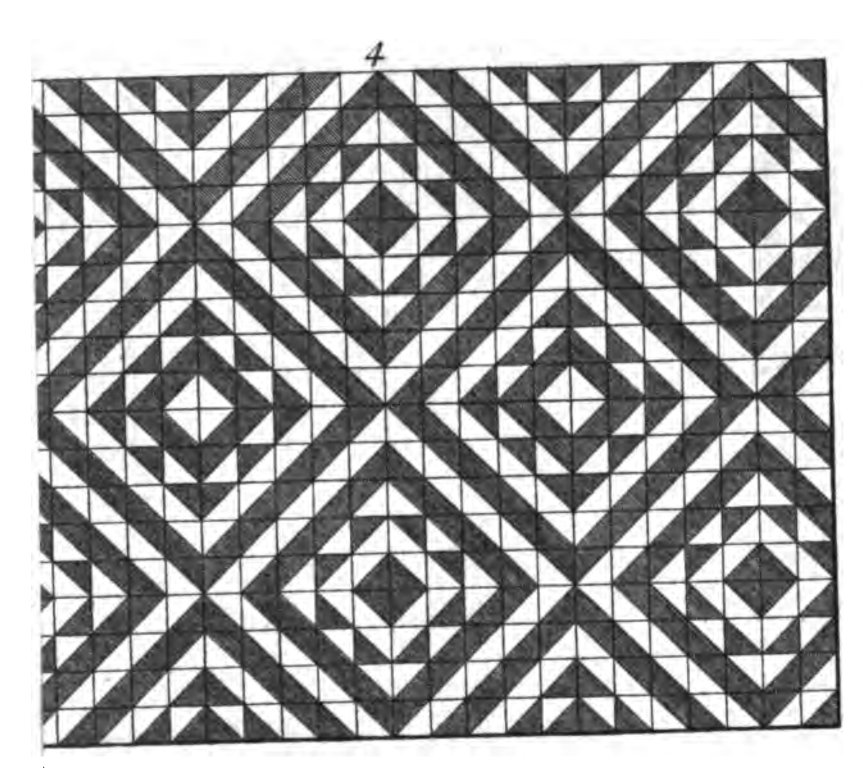
Mem. de l'Acad. 1704. p. 372. Pl. 19

Sixiéme Planche

3



4

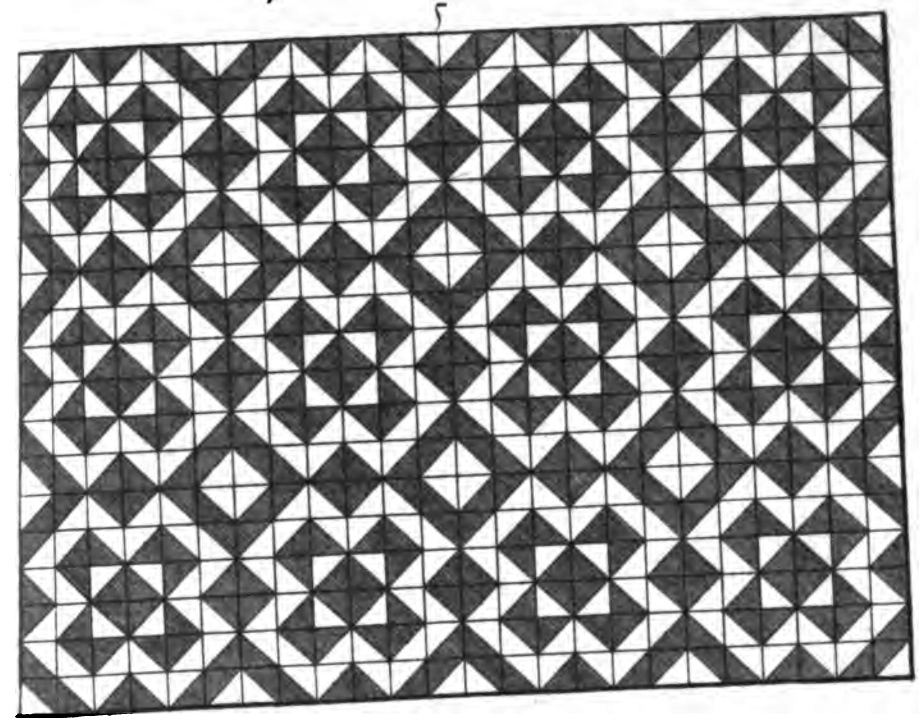


Lud. Simonneau

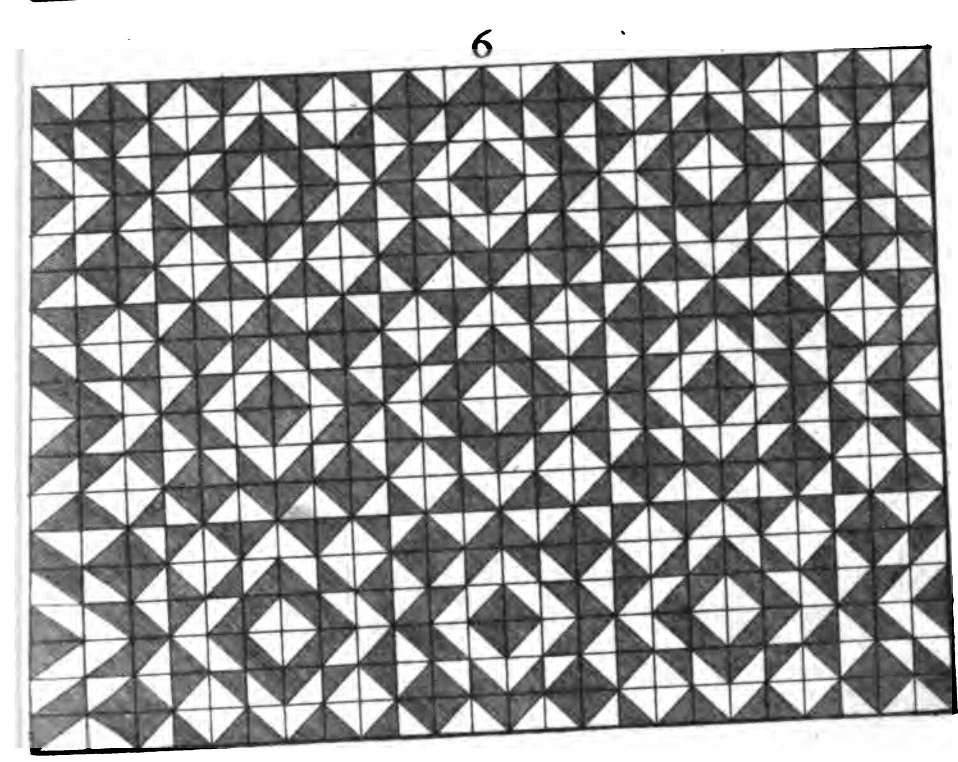
Septiéme Planche



5



6



Lud. Simonneau



